TEOREMA TITIK TETAP DI RUANG BARISAN *p-SUMMABLE* DALAM NORM-n

Anwar Mutaqin dan Indiana Marethi

Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Sultan Ageng Tirtayasa

Jl. Raya Jakarta Km 4 Serang Banten, Telp. 0254-280330, Fax. 0254-281254,

e-mail: anwarmutaqin@gmail.com

ABSTRACT

This paper discusses fixed point theorem on the space of p-Summable in n-Norm . There are two versions for n-Norm on the space of p-Summable, Gunawan's and Gahler's version. Fixed point theorem based on n-Norm for Gunawan's version had been proved by Gunawan himself. In this paper, fixed point theorem on the space of p -Summable in n-Norm for Gahler's version is proofed. The key is using the relation between n-Norm and Norm on the space of p-Summable, and also using the fact that fixed point theorem in usual norm had been proofed.

ABSTRAK

Penelitian membahas teorema titik tetap di ruang P-Summable dalam Norm-N . Ada dua versi Norm-N di ruang P-Summable, yaitu versi Gunawan dan Gahler. Teorema titik tetap berdasarkan Norm-N versi Gunawan telah dibuktikan oleh Gunawan. Pada makalah ini dibuktikan teorema titik tetap di ruang P-Summable dalam NORM-N versi Gahler. Kuncinya adalah memanfaatkan hubungan antara Norm-N dengan norm di ruang p-summable dan fakta bahwa teorema titik tetap dalam norm biasa telah dibuktikan.

Kata Kunci: Teorema Titik Tetap, Norm-N, Ruang P-Summable

PENDAHULUAN

Teorema titik tetap merupakan salah satu teorema yang penting dalam aplikasi matematika, khususnya dalam mencari solusi suatu model matematika. Umumnya solusi analitik suatu model matematika sulit ditemukan, meskipun dijamin eksistensinya. Jika solusinya dijamin ada, maka perlu dibangun suatu algoritma untuk mencari solusinya secara numerik dengan ketelitian yang ditentukan. Algoritma tersebut biasanya berupa iterasi dalam bentuk barisan bilangan atau barisan operator bergantung pada model matematika yang akan diselesaikan. Teorema titik tetap adalah komponen penting yang menjamin iterasi yang dibangun konvergen ke suatu bilangan atau operator tertentu.

Di ruang p-summable ada dua versi norm-*n*, yaitu versi Gunawan dan versi Gahler. Gunawan telah dibuktikan teorema titik tetap dalam norm-*n* versi Gunawan. Oleh karena itu perlu dirumuskan dan dibuktikan teorema titik tetap dalam norm-*n* versi Gahler.

KAJIAN TEORI

Teori Norm-*n*

Teori tentang *norm-n* diperkenalkan oleh Gahler pada pertengahan tahun 1960-an sebagai perumuman (generalisasi) dari norm biasa di ruang vector. Sebuah vector dilengkapi dengan norm yang diinterpretasikan secara geometris sebagai panjang vector tersebut. Jika ada dua buah vector, maka kedua vector tersebut dapat membangun suatu area dengan luas tertentu. Dalam hal ini luas area yang direntang oleh kedua vector dapat dihitung dengan norm-*2*. Selanjutnya, untuk banyaknya vector yang lebih dari atau sama dengan tiga, maka vector-vektor tersebut membentuk bangun yang disebut *paralelpipedium*. Untuk menghitung volume paralelpipedium diperlukan konsep ruang ber*norm-n*. Teori *norm-n* dibangun dalam rangka memberikan suatu formula untuk menghitung volume tersebut. Panjang, luas, dan volume ruang yang direntang vector-vektor merupakan interpretasinya secara geometris, sedangkan pada aplikasinya dapat bermacam-macam sesuai dengan permasalahan yang akan diselesaikan.

Ruang bernorm-*n* adalah ruang vector

berdimensi

(dengan

atau

) atas

yang dilengkapi dengan fungsi norm-*n*

yang memenuhi sifat-sifat:

jika dan hanya jika

bergantung linear,

invarian terhadap permutasi

untuk setiap

dan

,

untuk setiap

.

Beberapa contoh norm-*n* adalah sebagai berikut:

Sebarang ruang hasil kali dalam

dapat dilengkapi dengan *norm-n* baku

dengan

Di

, norm-*n* baku tersebut dapat disederhanakan menjadi

dengan

dan

.

Jika

ruang vector yang dilengkapi dengan norm

, maka menurut Gahler (1960),

dapat dilengkapi dengan norm-*n*

Gunawan (2002) membuktikan bahwa semua norm-*n* di ruang vector berdimensi hingga adalah norm. Hasil ini menunjukkan ada keterkaitan erat antara norm-*n* dan norm. Kajian tentang norm-*n* saat ini bekembang luas.

Seperti halnya di norm biasa, di *norm-n* didefinisikan juga barisan konvergen dan barisan Cauchy.

Definisi 2.1. Misalkan

barisan di

dan

. Barisan

dikatakan konvergen ke

dalam *norm-n* jika untuk setiap

terdapat

sedemikian sehingga

untuk setiap

dan untuk setiap

.

Definisi 2.2. Misalkan

barisan di

. Barisan

dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap

terdapat

sedemikian sehingga

untuk setiap

dan untuk setiap

.

Aplikasi *norm-n* dapat dilihat di statistika, yaitu pada matriks korelasi dan matriks kovarian. Ahli statistika menggunakan teori *norm-n* untuk menghitung sudut kanonik yang dibentuk oleh dua ruang. Hasil-hasil lainnya dari teori *norm-n* masih menunggu untuk diaplikasikannya.

Norm-*n* di Ruang *p-summable*.

Di Ruang barisan p-summable (

), Gunawan (2001) memberikan norm-*n* sebagai berikut:

untuk

, dan

untuk

. Khusus untuk

, norm-*n* tersebut sama dengan norm-*n* baku. Hal ini terjadi karena

merupakan ruang hasil kali dalam.

Sebagai akibat dari formula Gahler, norm-*n* yang didefinisikan dengan

adalah norm-*n* di ruang

untuk

. Mutaqin dan Gunawan (2010) menunjukkan bahwa formula norm-*n* dari Gahler

tersebut dapat ditulis dalam bentuk

Hubungan antara kedua norm-*n* di ruang

adalah sebagai berikut

Teorema 2.2. Untuk setiap

,

untuk

.

Akibat dari teorema tersebut adalah setiap barisan di

yang konvergen dalam norm-*n*

, maka akan konvergen juga dalam norm-*n*

. Akibat lainnya adalah ketaksamaan berikut

Hal ini juga dapat disimpulkan bahwa barisan di

yang konvergen dalam norm biasa, maka konvergen dalam norm-*n*

.

HASIL

Teorema titik tetap di ruang

dalam norm-n pernah dirumuskan dan dibuktikan oleh Gunawan (2001). Secara

lengkap teorema tersebut adalah sebagai berikut:

Teorema 3.1. *Misalkan*

sedemikian sehingga

untuk semua

dan suatu

, yaitu

kontraktif terhadap

, maka

mempunyai titik tetap yang tunggal di

.

Teorema titik tetap tersebut dirumuskan dan dibuktikan tanpa mendefinisikan operator-n terbatas. Hal ini seolah-olah terputus hubungan dengan teori operator terbatas. Padahal, teori norm-n merupakan perluasan dari teori norm, sehingga sudah seharusnya pengertian operator terbatas juga diperluas untuk norm-n. Dalam teori norm biasa teorema titik tetap senantiasa berkaitan dengan operator terbatas. Operator terbatas setara dengan fungsi kontinu pada pemetaan dari Himpunan bilangan real ke himpunan bilangan real.

Namun demikian, jika hasil ini bisa diterima, maka teorema titik tetap dalam norm-n versi Gahler dapat dirumuskan menggunakan hasil yang diperoleh Mutaqin dan Gunawan (2010). Untuk keperluan pembuktian teorema di bawah, perhatikan bahwa untuk

, norm-2 versi Gahler menjadi

Teorema 3.2. *Misalkan*

sedemikian sehingga

untuk semua

dan suatu

, maka

mempunyai titik tetap yang tunggal di

.

Bukti. Ruang

lengkap terhadap norm

, yaitu setiap barisan Cauchy di

konvergen. Jadi jika dapat ditunjukkan bahwa

kontraktif terhadap norm

, maka teorema titik tetap terbukti. Berdasarkan hipotesis,

dan

dengan

dan

. Selanjutnya pada ketaksamaan yang pertama pilih

dengan

dan

. Pada ketaksamaan yang kedua pilih

dan

. Kemudian dijumlahkan, maka didapat

Karena

, maka

kontraktif terhadap norm

.

Teorema yang telah dibuktikan tersebut merupakan teorema titik tetap di ruang p-*summable* dalam norm-*n* versi Gahler. Selanjutnya, teorema di atas dapat digeneralisasi untuk norm-*n*.

Teorema 3.3. *Misalkan*

sedemikian sehingga

untuk semua

dan suatu

, maka

mempunyai titik tetap yang tunggal di

.

Bukti teorema ini diserahkan kepada pembaca karena bukti untuk sangat detail.

SIMPULAN

Berdasarkan hasil yang telah diuraikan, dapat disimpulkan bahwa teorema titik tetap di ruang*p-summable* ada dua berdasarkan norm-*n* yang ada di ruang tersebut. Kunci pembuktian teorema titik tetap di ruang*p-summable* dalam norm-n versi Gahler didasarkan pada hasil yang dicapai oleh Mutaqin dan Gunawan (2010) yang mengubah bentuk norm-*n* versi Gahler.

DAFTAR PUSTAKA

Gähler, S. (1964): *Lineare 2-normietre Räume*. Math. Nachr. 28, 1-43.

Gunawan, H (2001): *The space of p-summable sequences and its natural n-norm*. Bull. Austral. Math. Soc. 64, 137 - 147.

Mutaqin, A and Gunawan, H. (2010). *Equivalence of n-Norm in p-summable sequence space*, (2008). Journal of Indo. Math. Soc., vol. 16, No. 1.