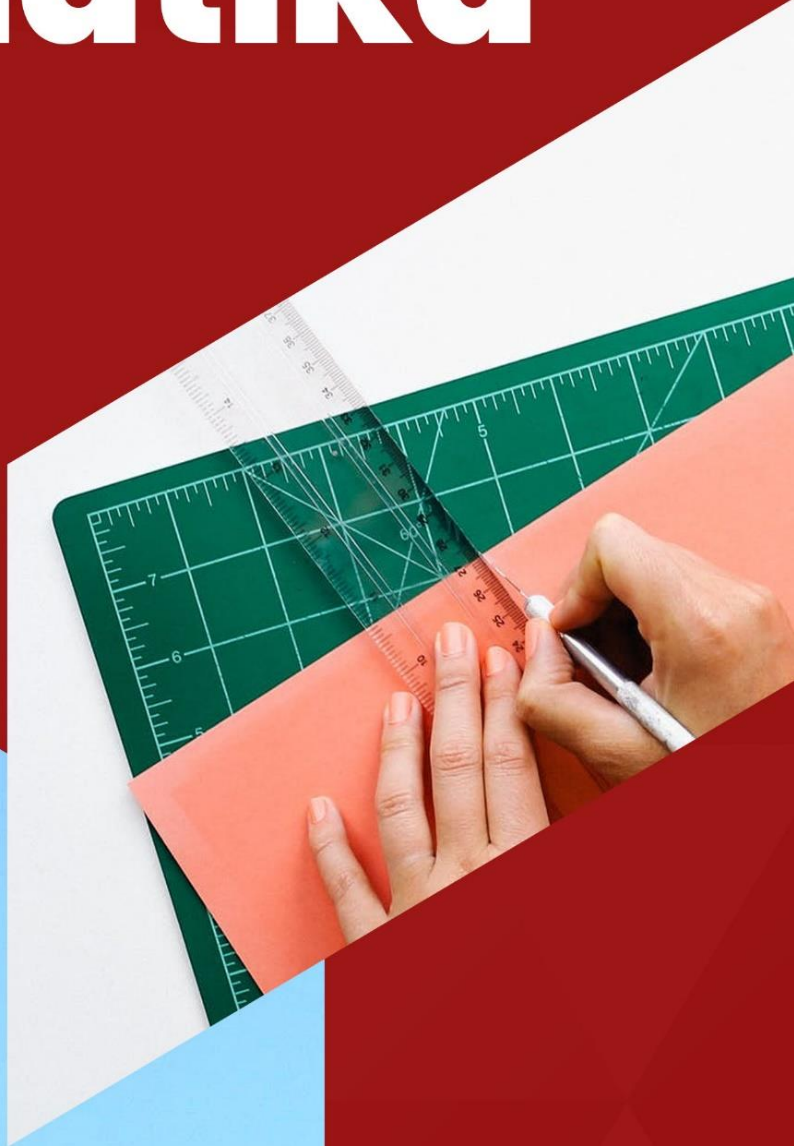
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI, PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

BERANI JUJUR HEBAT!

JUJUR ADALAH LANGKAH AWAL BERANTAS KORUPSI

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum



KELAS XI

INTEGRAL TAK TENTU FUNGSI ALJABAR

MATEMATIKA UMUM KELAS XI

PENYUSUN
Titin Suryati Sukmadewi, S.Si., M.Pd.

Unit Kerja:

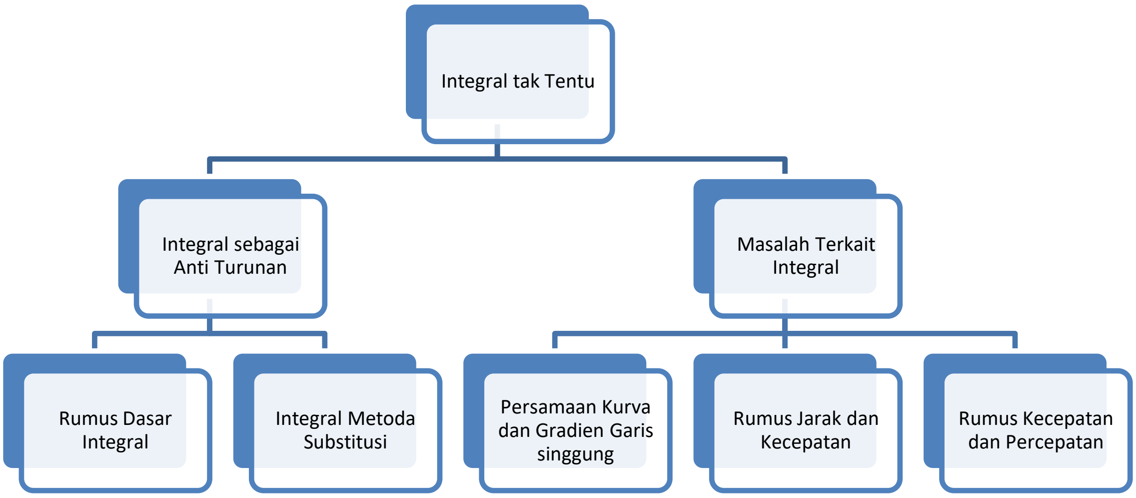
SMA Negeri 1 Sumedang

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Integral	:	Operasi invers (balikan) dari turunan
Integral tak Tentu	:	Integral yang tidak disertai dengan batasan-batasan (batas atas atau batas bawah)
Integral Substitusi	:	Pengintegralan yang cara penyelesaiannya menggunakan pemisalan sebagai pengganti sementara sebagian atau seluruh fungsi yang akan diintegralkan
Gradien Garis Singgung Kurva	:	Nilai turunan pertama fungsi kurva di absis titik singgungnya
Fungsi Kecepatan	:	Turunan pertama fungsi jarak
Fungsi Percepatan	:	Turunan pertama fungsi kecepatan

PETA KONSEP


Integral tak Tentu
Integral sebagai Anti Turunan
Masalah Terkait Integral
Rumus Dasar Integral
Integral Metoda Substitusi
Persamaan Kurva dan Gradien Garis singgung
Rumus Jarak dan Kecepatan
Rumus Kecepatan dan Percepatan

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Peminatan
Kelas	:	XI
Alokasi Waktu	:	8 x 45 menit
Judul Modul	:	Integral Tak Tentu

B. Kompetensi Dasar

3.10 Mendeskripsikan integral tak tentu (anti turunan) fungsi aljabar dan menganalisis sifat-sifatnya berdasarkan sifat-sifat turunan fungsi.

4.10 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu (anti turunan) fungsi aljabar

C. Deskripsi Singkat Materi

- Hitung integral erat kaitannya dengan kalkulus diferensial atau turunan suatu fungsi. Integral ditemukan terlebih dahulu sebelum turunan, sebelum akhirnya diketahui bahwa ternyata integral dan turunan ternyata mempunyai hubungan. Walaupun integral ditemukan terlebih dahulu, hitung integral akan lebih mudah dipahami dengan mudah setelah kita mempelajari turunan.
- Modul ini membahas tentang menentukan integral sebuah fungsi aljabar sebagai anti turunan, rumus-rumus dasar dan teknik substitusi. Seperti halnya turunan mempelajari tentang gradien garis singgung suatu kurva, maka integral pun dapat digunakan kebalikannya yaitu dapat menentukan persamaan suatu kurva jika diketahui gradien garis singgung kurva tersebut. Begitu pula dengan kecepatan sebagai turunan dari persamaan jarak, dan percepatan sebagai turunan dari kecepatan. Integral dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan jarak, kecepatan, dan percepatan.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Sebelum Ananda membaca isi modul, terlebih dahulu membaca petunjuk khusus dalam penggunaan modul agar memperoleh hasil yang optimal.

1. Sebelum memulai menggunakan modul, mari berdoa kepada Tuhan yang Maha Esa agar diberikan kemudahan dalam memahami materi ini dan dapat mengamalkan dalam kehidupan sehari-hari.
2. Sebaiknya Ananda mulai membaca dari pendahuluan, kegiatan pembelajaran, rangkuman, hingga daftar pustaka secara berurutan.
3. Setiap akhir kegiatan pembelajaran, Ananda mengerjakan latihan soal dengan jujur tanpa melihat uraian materi.
4. Ananda dikatakan tuntas apabila dalam mengerjakan latihan soal memperoleh nilai ≥ 75 sehingga dapat melanjutkan ke materi selanjutnya.
5. Jika Ananda memperoleh nilai < 75 maka Ananda harus mengulangi materi pada modul ini dan mengerjakan kembali latihan soal yang ada.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar

Kedua : Masalah yang Melibatkan Integral Tak Tentu

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
INTEGRAL TAK TENTU FUNGSI ALJABAR

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan kalian dapat menentukan integral tak tentu fungsi aljabar.

B. Uraian Materi

Sumber: *www.en.wikipedia.org*

Leibniz

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) adalah seorang ilmuwan, filsuf, matematikawan, diplomat, pustakawan, dan pengacara berkebangsaan Jerman keturunan Sorb.

Menurut catatannya, terobosan sangat penting terjadi pada 11 November 1675 ketika ia mendemonstrasikan kalkulus integral pertama kalinya untuk menghitung luas daerah di bawah fungsi y = x.

Ia memper kenalkan beberapa notasi dalam kalkulus yang tetap digunakan sampai sekarang

Integral Fungsi

Setiap hari tentu saja kita sering melakukan aktivitas yang saling berkebalikan, seperti naik dan turun, maju dan mundur, menghirup udara dan menghembuskan udara, dan lain sebagainya. Begitu pula dalam matematika kita mengenal operasi yang saling berkebalikan atau saling invers seperti pengurangan dengan penjumlahan, pembagian dengan perkalian, pemangkatan dengan penarikan akar dan sebagainya. Nahh kalian pernah mempelajari turunan dari sebuah fungsi, lalu operasi apakah yang merupakan kebalikan atau invers dari turunan?

Kalian tentu masih ingat bahwa turunan dari sebuah fungsi $f(x)$ kita tulis $f'(x)$. Nah seandainya diketahui sebuah fungsi $f(x)$ adalah turunan dari sebuah fungsi $F(x)$, bagaimana kita dapat menentukan fungsi $F(x)$?

1. Integral sebagai Anti Turunan

Jika $F'(x) = f(x)$ maka $F(x)$ adalah anti turunan/anti derivatif dari $f(x)$

Jika $y = F(x)$ maka $\frac{dy}{dx} = F'(x)$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)$

$\Leftrightarrow dy = f(x)dx$

$\Leftrightarrow \int dy = \int f(x)dx$

$\Leftrightarrow y = \int f(x)dx$

Jika $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ maka $\int f(x)dx = F(x) + C$ untuk setiap bilangan real C

Proses mendapatkan $\frac{dy}{dx}$ dari y (suatu fungsi x) disebut diferensial, sedangkan proses mendapatkan y dari $\frac{dy}{dx}$ disebut **Integral**

Lambang $\int$ adalah simbol integral, $f(x)$ yaitu fungsi di samping simbol integral disebut **integran**, dan $\int f(x)dx$ disebut **integral tak tentu** dan dibaca **integral dari $f(x)$ terhadap x.**

Jadi dari persamaan $\int f(x)dx = F(x) + C$, turunan dari ruas kanan adalah integran di ruas kiri.

Berikutnya, bagaimana cara kita menentukan integral tak tentu dari sebuah fungsi $f(x)$? Simak pada bagian berikutnya ya.

2. Rumus-rumus Integral Tak Tentu
   a. $\int dx = x + C$
   b. $\int a\, dx = ax + C$
   c. Integral Pangkat
   Untuk setiap bilangan real $n \neq -1$, berlaku bahwa:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

Contoh 1:

$\int x^4\, dx =$

Alternatif Penyelesaian:

$$\int x^4\, dx = \frac{1}{4+1} x^{4+1} + C$$
$$= \frac{1}{5} x^5 + C$$

Contoh 2:

$\int \frac{1}{x^3} dx =$

Alternatif Penyelesaian:

$$\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3}\, dx$$
$$= \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C$$

$= \frac{1}{-2}x^{-2} + C$

$= \frac{1}{-2x^2} + C$

Contoh 3:

$\int x\sqrt{x}\,dx =$

Alternatif Penyelesaian:

$\int x\sqrt{x}\,dx = \int x^{3/2}dx$

$= \frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1} + C$

$= \frac{1}{5/2}x^{\frac{5}{2}} + C$

d. Integral Perkalian Skalar

Untuk setiap bilangan real k berlaku:

$$\int k\ f(x)dx = k\int f(x)dx$$

Contoh:

$\int 4x^3\,dx =$

Alternatif Penyelesaian:

$\int 4x^3\,dx = 4\int x^3dx$

$= 4\left(\frac{1}{3+1}x^{3+1}\right) + C$

$= 4\left(\frac{1}{4}x^4\right) + C$

$= x^4 + C$

e. Integral Penjumlahan dan Pengurangan

Dalam integral berlaku sifat linieritas yaitu:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

Contoh:

$\int (2x-1)(x+3)\,dx =$

Alternatif Penyelesaian:

$\int (2x-1)(x+3)\,dx = \int \left(2x^2 + 5x - 3\right)dx$

$= \int 2x^2\,dx + \int 5x\,dx - \int 3\,dx$

$= 2\int x^2\,dx + 5\int x\,dx - \int 3x^0\,dx$

$= \left(\frac{2}{2+1}x^{2+1} + C_1\right) + \left(\frac{5}{1+1}x^{1+1} + C_2\right) - \left(\frac{3}{0+1}x^{0+1} + C_3\right)$

$= \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + C_1 + C_2 + C_3$

$$= \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + C$$

f. Integral Metoda Substitusi

Pengintegralan dengan metoda substitusi memiliki cara penyelesaian menggunakan pemisalan sebagai pengganti sementara sebagian atau seluruh fungsi yang akan diintegralkan

Bentuk umum:

$$\int f(u)\left(\frac{du}{dx}\right)du = \int f(u)du$$

Contoh 1:

$$\int (ax+b)^n dx =$$

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $u = ax + b$

$du = a\,dx$

$dx = \frac{1}{a}du$

$$\int (ax+b)^n dx = \int (u)^n \frac{1}{a}\,du$$

$$= \frac{1}{a}\int u^n du$$

$$= \frac{1}{a}\frac{1}{(n+1)}u^{n+1} + C$$

$$= \frac{1}{a(n+1)}u^{n+1} + C$$

$$= \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C$$

Contoh 2:

$$\int (x+1)(x^2+2x+1)^4 dx =$$

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $u = x^2 + 2x + 1$

$du = (2x+2)\,dx$

$du = 2(x+1)dx$

$dx = \frac{1}{2(x+1)}du$

$$\int (x+1)(x^2+2x+1)^4 dx = \int (x+1)u^4\,\frac{1}{2(x+1)}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \cancel{(x+1)}u^4\,\frac{1}{\cancel{(x+1)}}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \cancel{(x+1)}u^4\,\frac{1}{\cancel{(x+1)}}du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^4\,du$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{(4+1)}u^{4+1} + C$$

$$= \frac{1}{10}\,u^5 + C$$

$$= \frac{1}{10}\,(x^2+2x+1)^5 + C$$

C. Rangkuman

1. Jika $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$ maka $\int f(x)dx = F(x) + C$ untuk setiap bilangan real C
2. $\int dx = x + C$
3. $\int a\ dx = x + C$
4. Untuk setiap bilangan real $n \neq -1$, berlaku bahwa:
$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$
5. Untuk setiap bilangan real k berlaku:
$$\int k\ f(x)dx = k\int f(x)dx$$
6. Dalam integral berlaku sifat linieritas yaitu:
$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$
7. Bentuk umum integral metoda substistusi:
$$\int f(u)\left(\frac{du}{dx}\right)du = \int f(u)du$$

D. Latihan Soal

Pilihlah jawaban yang paling tepat.

1. Hasil dari $\int 5\,dx$ adalah ….
   A. C
   B. 0
   C. $5x + C$
   D. $\frac{5}{2}x^2 + C$
   E. $5x^2 + C$
2. Hasil dari $\int \pi\,dx$ adalah ….
   A. $\pi x + C$
   B. $\frac{1}{2}\pi^2 + C$
   C. 0
   D. πC
   E. $\pi + C$
3. Hasil dari $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x}}dx$ adalah ….
   A. $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + C$
   B. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$
   C. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
   D. $-\frac{2}{3x\sqrt{x}} + C$
   E. $-\frac{2}{5x^2\sqrt{x}} + C$
4. Hasil dari $\int x(6x-2)dx =$….
   A. $12x - 2 + C$
   B. $12x^2 - 2x + C$
   C. $6x^3 - 2x^2 + C$
   D. $2x^3 - x^2 + C$
   E. $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$
5. Hasil dari $\int (6x+2)(x-3)dx =$….
   A. $6x^2 - 16x - 6 + C$
   B. $12x - 16 + C$
   C. $2x^3 - 8x^2 - 6x + C$
   D. $6x^3 - 16x^2 - 6x + C$
   E. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$
6. Hasil $\int (4x+3)\left(4x^2+6x-9\right)^9 dx$ adalah ….
   A. $\frac{1}{10}\left(4x^2+6x-9\right)^{10} + C$
   B. $\frac{1}{15}(2x-3)^{10} + C$
   C. $\frac{1}{20}(2x-3)^{10} + C$
   D. $\frac{1}{20}\left(4x^2+6x-9\right)^{10} + C$
   E. $\frac{1}{30}\left(4x^2+6x-9\right)^{10} + C$
7. Hasil $\int 6x\sqrt{3x^2+5}dx$ = ….
   A. $\frac{2}{3}(6x^2+5)\sqrt{6x^2+5} + C$
   B. $\frac{2}{3}(3x^2+5)\sqrt{3x^2+5} + C$
   C. $\frac{2}{3}(x^2+5)\sqrt{x^2+5} + C$

D. $\frac{3}{2}(x^2+5)\sqrt{x^2+5}+C$

E. $\frac{3}{2}(3x^2+5)\sqrt{3x^2+5}+C$

8. Hasil dari $\int \frac{3x-1}{(3x^2-2x+7)^7} = ...$

A. $\frac{1}{3(3x^2-2x+7)^7}+C$

B. $\frac{1}{4(3x^2-2x+7)^6}+C$

C. $\frac{1}{6(3x^2-2x+7)^6}+C$

D. $\frac{-1}{12(3x^2-2x+7)^6}+C$

E. $\frac{-1}{12(3x^2-2x+7)^7}+C$

Kunci Jawaban dan Pembahasan

1. C
   Pembahasan:
   $\int a\,dx = ax + C$ sehingga $\int 5\,dx = 5x + C$
2. A
   Pembahasan:
   $\int a\,dx = ax + C$ dengan a sebuah konstanta, dan π sebuah konstanta (bilangan riil), sehingga $\int \pi\,dx = \pi x + C$
3. D
   Pembahasan:
   $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{x^{5/2}}dx$
   $= \int x^{-5/2}dx$
   $= \frac{1}{-\frac{5}{2}+1}x^{-\frac{5}{2}+1} + C$
   $= \frac{1}{-\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + C$
   $= -\frac{2}{3}\frac{1}{x^{3/2}} + C$
   $= -\frac{2}{3x\sqrt{x}} + C$
4. D
   Pembahasan:
   $\int x(6x-2)dx = \int\left(6x^2 - 2x\right)dx$
   $= \frac{6}{3}x^3 - \frac{2}{2}x^2 + C$
   $= 2x^2 - x^2 + C$
5. C
   Pembahasan:
   $\int (6x+2)(x-3)dx = \int\left(6x^2 - 16x - 6\right)dx$
   $= \frac{6}{3}x^3 - \frac{16}{2}x^2 - 6x + C$
   $= 2x^3 - 8x^2 - 6x + C$
6. D
   Pembahasan:
   $\int (4x+3)\left(4x^2+6x-9\right)^9 dx$
   Misalkan $u = 4x^2 + 6x - 9$
   $du = (8x+6)dx$
   $du = 2(4x+3)dx$
   $dx = \frac{1}{2(4x+4)}du$
   $\int (4x+3)\left(4x^2+6x-9\right)^9 dx = \int \cancel{(4x+3)}u^9 \frac{1}{2\cancel{(4x+3)}}du$
   $= \frac{1}{2}\int u^9 du$
   $= \frac{1}{2}.\frac{1}{10}u^{10} + C$
   $= \frac{1}{20}u^{10} + C$
   $= \frac{1}{20}\left(4x^2+6x-9\right)^{10} + C$
7. B
   Pembahasan:

$\int 6x\sqrt{3x^2+5}dx$

Misalkan $u = 3x^2 + 5$

$du = 6x\ dx$

$dx = \frac{1}{6x}\ du$

$\int 6x\sqrt{3x^2+5}dx = \int 6x\ u^{1/2}\ \frac{1}{6x}du$

$= \int u^{1/2}\ du$

$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\ u^{\frac{1}{2}+1} + C$

$= \frac{1}{3/2}\ u^{3/2} + C$

$= \frac{2}{3}u\sqrt{u} + C$

$= \frac{2}{3}(3x^2+5)\sqrt{3x^2+5} + C$

8. D

Pembahasan:

$\int \frac{3x-1}{(3x^2-2x+7)^7}$, misal $u = 3x^2 - 2x + 7$

$du = (6x-2)dx$

$du = 2(3x-1)dx$

$dx = \frac{1}{2(3x-1)}du$

$\int \frac{3x-1}{(3x^2-2x+7)^7}dx = \int (3x-1)u^{-7}\ \frac{1}{2(3x-1)}du$

$= \frac{1}{2}\int u^{-7}\ du$

$= \frac{1}{2}.\frac{1}{-7+1}u^{-7+1} + C$

$= \frac{1}{2}.-\frac{1}{6}\ u^{-6} + C$

$= -\frac{1}{12}u^{-6} + C$

$= -\frac{1}{12}(3x^2-2x+7)^{-6} + C$

$= -\frac{1}{12(3x^2-2x+7)^6} + C$

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
1	Apakah ananda dapat menentukan $\int a\,dx$?	Ya	Tidak
2	Apakah ananda dapat menentukan $\int x^n\,dx$?	Ya	Tidak
3	Apakah ananda dapat menentukan $\int ax^n\,dx$?	Ya	Tidak
4	Apakah ananda dapat menentukan $\int (f(x) \pm g(x))\,dx$?	Ya	Tidak
5	Apakah ananda dapat menentukan integral menggunakan metoda substitusi?	Ya	Tidak

Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan riview pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak"

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

MASALAH YANG BERKAITAN DENGAN INTEGRAL TAK TENTU

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan siswa dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu.

B. Uraian Materi

Masalah yang Melibatkan Integral Tak Tentu

1. Menentukan persamaan kurva dari fungsi turunan

Ketika mempelajari turunan, kalian sudah membahas gradien dan persamaan garis singgung kurva di suatu titik. Jika $y = f(x)$ maka gradien garis singgung kurva di sembarang titik pada kurva itu adalah:

$$m_{gs} = y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Oleh karena itu jika diketahui gradien garis singgung kurva, maka persamaan kurvanya adalah:

$$y = f(x) = \int f'(x)dx = F(x) + C$$

Lalu bagaimana menentukan nilai C? Nilai C dapat dihitung jika diketahui salah satu titik yang melalui kurva tersebut.

Contoh 1:

Gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di sembarang titik (x, y) adalah $\frac{dy}{dx} = 4x + 3$. Jika kurva melalui titik (0,5) tentukanlah persamaan kurvanya.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui $m_{gs} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$

Sehingga $y = f(x) = \int (4x + 3)dx$

$= 2x^2 + 3x + C$

Kurva melalui titik (0,5) sehingga nilai $x = 0$ dan $y = 5$ bisa disubstitusikan ke persamaan $f(x) = 2x^2 + 3x + C$

$5 = 2.0^2 + 3.0 + C$

$5 = 0 + 0 + C$

Diperoleh $C = 5$

Sehingga $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$

Contoh 2:

Gradien garis singgung suatu kurva di titik (x, y) adalah $6\sqrt{x}$. Jika Kurva ini melalui titik (9,120) maka persamaan garis singgung kurva ini di titik yang berabsis 1 adalah….

Alternatif penyelesaian:

Diketahui $m_{gs} = \frac{dy}{dx} = f'(x) = 6\sqrt{x}$

Sehingga $y = f(x) = \int \left(6\sqrt{x}\right)dx$

$= \int \left(6x^{1/2}\right)dx$

$= 6 \int x^{1/2}dx$

$$= \frac{6}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{6}{3/2} x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= 6.\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

$f(x) = 4x\sqrt{x}$ +C

Kurva melalui titik (9,120) sehingga kita bisa substitusikan koordinat titik tersebut ke persamaan kurva $f(x)$.

$120 = 4.9.\sqrt{9} + C$

$120 = 108 + C$

$C = 12$

$f(x) = 4x\sqrt{x} + 12$

Kita akan menentukan persamaan garis singgung kurva di titik berabsis 1, jadi kita tentukan titik singgung dan gradien garis singgungnya terlebih dahulu.

$f(x) = 4x\sqrt{x} + 12$

$f(1) = 4.1.\sqrt{1} + 12 = 16$

Jadi titik singgungnya adalah (1,16)

Gradien garis singgungya adalah $6\sqrt{x} = 6\sqrt{1} = 6$

Persamaan garis dengan gradien $m = 6$ dan melalui titik (1,16) adalah:

$y - 16 = 6(x - 1)$

$y = 6x + 10$

2. Kecepatan dan Percepatan

Kalian pun sudah mempelajari bahwa turunan dari jarak terhadap waktu adalah kecepatan, dan turunan kecepatan terhadap waktu adalah percepatan.

Kecepatan didefinisikan sebagai laju perubahan jarak terhadap waktu.

$v = \frac{ds}{dt}$ atau $ds = vdt$

$$\int ds = \int vdt$$

$$s = \int v\,dt$$

(v merupakan persamaan kecepatan dalam t)

Jadi jika diketahui persamaan kecepatan, persamaan jarak bisa dihitung dengan mengintegralkan persamaan kecepatan.

Percepatan didefinisikan sebagai laju perubahan kecepatan terhadap waktu.

$a = \frac{dv}{dt}$ atau $dv = a\,dt$

$$\int dv = \int a\,dt$$

$$v = \int a\,dt$$

(a merupakan persamaan percepatan dalam t)

Jadi jika diketahui persamaan percepatam, persamaan kecepatan bisa dihitung dengan mengintegralkan persamaan kecepatan.

Contoh 1:

Sebuah bola bergerak dengan kecepatan $v = 3t^2 - 2t$ m/det. Jika pada saat $t = 3$ detik panjang $s = 9$ meter, tentukan rumus jarak pada saat t detik.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui $v = 3t^2 - 2t$

$s = \int v\,dt$ atau $s = \int(3t^2 - 2t)dt$

$= t^3 - t^2 + C$

$s(t) = t^3 - t^2 + C$; diketahui pada saat $t = 3$, $s = 9$ sehingga kita substitusikan ke persamaan untuk mendapatkan nilai C.

$$9 = 3^3 - 3^2 + C$$

$$9 = 27 - 9 + C$$
$$9 = 18 + C$$
$$C = 9 - 18 = -9$$

Rumus jarak diperoleh $s(t) = t^3 - t^2 - 9$

Contoh 2:
Diketahui persamaan percepatan sebuah benda adalah $a = (6t^2 + 1)$ m/det², tentukan persamaan kecepatan benda jika pada saat $t = 2$ detik kecepatannya adalah 20 m/det.
Alternatif penyelesaian:
Diketahui $a = 6t^2 + 1$

$$v = \int a\,dt$$
$$v = \int (6t^2 + 1)dt$$
$$= 2t^3 + t + C$$

Sehingga $v(t) = 2t^3 + t + C$; diketahui pada saat $t = 2$ detik kecepatannya adalah 20 m/det, kita substitusikan untuk mendapatkan nilai C.

$$20 = 2.\,2^3 + 2 + C$$
$$20 = 16 + 2 + C$$

Diperoleh nilai $C = 2$, sehingga persamaan kecepatannya adalah $v(t) = 2t^3 + t + 2$

C. Rangkuman

1. Jika $y = f(x)$ maka gradien garis singgung kurva di sembarang titik pada kurva itu adalah:
$$m_{gs} = y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$
maka persamaan kurvanya adalah:
$$y = f(x) = \int f'(x)dx = F(x) + C$$
2. Kecepatan didefinisikan sebagai laju perubahan jarak terhadap waktu.
$v = \frac{ds}{dt}$ atau $ds = vdt$
Untuk mendapatkan rumus jarak jika diketahui rumus kecepatan adalah:
$$\int ds = \int vdt$$
$$s = \int v\,dt$$
3. Kecepatan didefinisikan sebagai laju perubahan kecepatan terhadap waktu.
$a = \frac{dv}{dt}$ atau $dv = a\,dt$
Untuk mendapatkan rumus jarak jika diketahui rumus percepatan adalah:
$$\int dv = \int a\,dt$$
$$v = \int a\,dt$$

D. Latihan Soal

Untuk memantapkan pemahaman materi, kerjakanlah latihan soal berikut. Pilihlah jawaban yang paling tepat.

1. Gradien garis singgung suatu kurva di titik (x, y) adalah $3\sqrt{x}$, jika kurva ini melalui titik (4,9), nilai y di titik berabsis 1 adalah ....
   A. -5
   B. -4
   C. -3
   D. -2
   E. -1
2. Tentukan persamaan fungsi f jika grafik fungsi $y = f(x)$ melalui titik (1, 2) dan gradien garis singgung di setiap titiknya ditentukan oleh persamaan $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{16}{x^4}\ dan\ x \neq 0$
   A. $y = x + \frac{16}{3x^3} - \frac{13}{3}$
   B. $y = x - \frac{16}{3x^3} - \frac{13}{3}$
   C. $y = x + \frac{16}{3x^3} + \frac{13}{3}$
   D. $y = x - \frac{16}{3x^3} + \frac{13}{3}$
   E. $y = x + \frac{16}{3x^3}$
3. Diketahui $F'(x) = 4x - 1$ dan $F(3) = 20$. Nilai $F(1)$ adalah ....
   A. 4
   B. 5
   C. 6
   D. 7
   E. 8
4. Sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus. Kecepatan benda pada setiap saat adalah $v = 6t^2 + 4t$ m/det. Pada saat $t = 0$ panjang lintasan yang ditempuh adalah $s = 5$ meter. Jarak yang ditempuh benda saat $t = 2$ detik adalah....
   A. 21
   B. 23
   C. 25
   D. 27
   E. 29
5. Diketahui kecepatan suatu benda adalah $v(t) = 6t^2 - 8t$ dan posisi benda pada jarak 5 untuk $t = 0$. Rumus fungsi jarak $s(t)$ adalah ....
   A. $s = 2t^3 - 4t^2 + 3$
   B. $s = 2t^3 - 4t^2 + 5$
   C. $s = 2t^3 - 4t^2 + 7$
   D. $s = 12t - 8$
   E. $s = 12t - 7$
6. Diketahui suatu partikel bergerak dengan percepatan $a(t) = 24t + 10$. Jika diketahui kecepatan partikel pada $t = 10$ adalah 1.303, persamaan kecepatan partikel adalah ....
   A. $v = 24t^2 + 10 - 197$
   B. $v = 24t^2 + 5t - 147$
   C. $v = 12t^2 + 10t$
   D. $v = 12t^2 + 10t + 3$
   E. $v = 12t^2 + 10t + 13$

Kunci Jawaban dan Pembahasan

1. A

   Pembahasan:

   Gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di sembarang titik (x, y) adalah $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{x}$,

   $y = \int 3\sqrt{x}dx$

   $y = 3\int x^{1/2}dx$

   $= 3.\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C$

   $= 3.\frac{2}{3}x^{3/2} + C$

   $= 2x\sqrt{x} + C$

   Kurva melalui titik (4,9), kita substitusikan $x = 4$ dan $y = 9$ diperoleh:

   $9 = 2.4\sqrt{4} + C$

   $9 = 16 + C$

   $C = -7$

   Sehingga $y = 2x\sqrt{x} - 7$

   Untuk $x = 1$ diperoleh $y = 2.1\sqrt{1} - 7 = 2 - 7 = -5$

2. B

   Pembahasan:

   $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{16}{x^4} = 1 - 16x^{-4}$

   $dy = (1 - 16x^{-4})dx$

   $y = \int(1 - 16x^{-4})dx$

   $= x - \frac{16}{-3}x^{-3} + C$

   $= x + \frac{16}{3}x^{-3} + C$

   $= x + \frac{16}{3x^3} + C$

   Kurva $y = f(x)$ melalui titik (1,2)

   $2 = 1 + \frac{16}{3} + C$

   $\frac{6}{3} = \frac{19}{3} + C$

   $C = -\frac{13}{3}$

   $y = x + \frac{16}{3x^3} - \frac{13}{3}$

3. C

   Pembahasan:

   $F'(x) = 4x - 1$

   $F(x) = \int F'(x)\,dx$

   $= \int(4x - 1)dx$

   $= 2x^2 - x + C$

   Diketahui kurva melalui titik (3,20)

   $20 = 2.3^2 - 3 + C$

   $20 = 18 - 3 + C$

   $C = 5$

   Sehingga diperoleh $F(x) = 2x^2 - x + 5$

   Nilai $F(1) = 2.1^2 - 1 + 5 = 6$

4. E

   $v = 6t^2 + 4t$

   $s = \int v\,dt$

   $= \int(6t^2 + 4t)dt$

   $= 2t^3 + 2t^2 + C$

$s(0) = 5$
$5 = 2.0^3 + 2.0^2 + C$
$C = 5$
$s = 2t^3 + 2t^2 + 5$
Untuk $t = 2$ diperoleh $s = 2.2^3 + 2.2^2 + 5 = 29$

5. B
Pembahasan:
$v(t) = 6t^2 - 8t$
$s = \int v\, dt$
$= \int (6t^2 - 8t) dt$
$= 2t^3 - 4t^2 + C$
Posisi benda pada jarak 5 untuk $t = 0$
$5 = 2.0^3 - 4.0^2 + C$
$C = 5$
Jadi $s = 2t^3 - 4t^2 + 5$

6. D
Pembahasan:
Percepatan $a(t) = 24t + 10$.
$v = \int a\, dt$
$= \int (24t + 10)\, dt$
$= 12t^2 + 10t + C$
Kecepatan partikel pada $t = 10$ adalah 1.303
$1.303 = 12.10^2 + 10.10 + C$
$1.303 = 1200 + 100 + C$
$C = 3$
Sehingga persamaan kecepatannya adalah $v = 12t^2 + 10t + 3$

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
1	Apakah ananda dapat menentukan persamaan kurva jika diketahui gradien garis singgung kurva tersebut dan salah satu titik yang dilaluinya?	Ya	Tidak
2	Apakah Ananda dapat menentukan persamaan jarak jika diketahui persamaan kecepatannya?	Ya	Tidak
3	Apakah Ananda dapat menentukan persamaan kecepatan jika diketahui persamaan percepatannya?	Ya	Tidak

Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan riview pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak"

EVALUASI

1. Hasil dari $\int dx$ adalah ....
   A. C
   B. 0
   C. $x + C$
   D. $\frac{1}{2}x^2 + C$
   E. $x^2 + C$
2. Hasil dari $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$ adalah ....
   A. $\frac{2}{5}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$
   B. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + C$
   C. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
   D. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$
   E. $\frac{2}{3}x^2\sqrt{x} + \frac{2}{5}x\sqrt{x} + C$
3. Hasil dari $\int 2x(3x-1)dx =$....
   A. $12x - 2 + C$
   B. $12x^2 - 2x + C$
   C. $6x^3 - 2x^2 + C$
   D. $2x^3 - x^2 + C$
   E. $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$
4. Hasil dari $\int (3x+1)(2x-6)dx =$....
   A. $6x^2 - 16x - 6 + C$
   B. $12x - 16 + C$
   C. $2x^3 - 8x^2 - 6x + C$
   D. $6x^3 - 16x^2 - 6x + C$
   E. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$
5. Hasil $\int (4x-6)\left(x^2 - 3x + 4\right)^4 dx$ adalah ....
   A. $6\left(x^2 - 3x + 4\right)^5 + C$
   B. $3\left(x^2 - 3x + 4\right)^5 + C$
   C. $\frac{1}{3}\left(x^2 - 3x + 4\right)^5 + C$
   D. $\frac{1}{6}\left(x^2 - 3x + 4\right)^5 + C$
   E. $\frac{1}{12}\left(x^2 - 3x + 4\right)^5 + C$
6. Hasil $\int \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2+9x-1}} dx = \ldots.$
   A. $2\sqrt{3x^2+9x-1} + C$
   B. $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+9x-1} + C$
   C. $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+9x-1} + C$
   D. $\frac{1}{2}\sqrt{3x^2+9x-1} + C$

E. $\frac{3}{2}\sqrt{3x^2+9x-1}+c$

7. Gradien garis singgung suatu kurva $y = f(x)$ di titik (x, y) adalah $f'(x) = 4x - 3$. Jika kurva $f(x)$ini melalui titik $(-1{,}12)$, persamaan kurva $f(x)$ adalah ....
   A. $2x^2 - 3x + 7$
   B. $x^2 - 4x - 5$
   C. $2x^2 - 3x + 6$
   D. $x^2 - 3x + 6$
   E. $x^2 + 3x - 6$
8. Diketahui $g'(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ dan $g(1) = \frac{1}{3}$. Rumus fungsi $g(x)$ adalah ....
   A. $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} - 5$
   B. $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} - 4$
   C. $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} - 3$
   D. $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} - 2$
   E. $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} - 1$
9. Dari sebuah titik awal, sebuah bola bergerak lurus ke arah kanan dengan percepatan $a = 6t - 24$ m/det. Jika saat $t = 0$ kecepatannya adalah 36 m/det maka rumus kecepatannya adalah ....
   A. $3t^2 - 24t + 32$
   B. $3t^2 - 24t + 34$
   C. $3t^2 - 24t + 36$
   D. $2t^3 - 12t^2 + 34$
   E. $2t^3 - 12t^2 + 36$
10. Diketahui kecepatan suatu benda adalah $v(t) = 3t^2 - 4t$ dan posisi benda pada jarak 5 untuk t = 2. Rumus fungsi jarak $s(t)$ adalah ....
    A. $s = t^3 - 2t^2 + 3$
    B. $s = t^3 - 2t^2 + 5$
    C. $s = t^3 - 4t^2 + 13$
    D. $s = t^3 - 4t^2 + 15$
    E. $s = t^3 - 4t^2 + 17$

Kunci Jawaban Evaluasi

1. C
2. D
3. D
4. C
5. C
6. C
7. A
8. E
9. C
10. B

DAFTAR PUSTAKA

Sukino (2017). *Matematika untuk SMA/MA*. Jakarta: Erlangga

Rosihan Ari Y dan Indriyastuti (2008). *Perspektif Matematika 3 Kelas XII SMA/MA IPA.* Solo: Tiga Serangkai.

Matematika Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan (2014). Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.