



# MEKANIKA KLASIK

DEPARTEMEN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN

# MEKANIKA KLASIK

REPOSITORI	
SLIMS	✓
COVER	✓
PINDAI	



TIDAK DIPERDAGANGKAN UNTUK UMUM



# MEKANIKA KLASIK

Penerjemah  
**Musaddiq Mushbach**

**Pusat Pembinaan dan Pengembangan Bahasa  
Departemen Pendidikan dan Kebudayaan  
Jakarta  
1996**

## Mekanika Klasik

Judul Asli  
Klasische Mechanik

Pembina Proyek  
Dr. Hasan Alwi

Penulis  
L.D. Landau  
E.M. Lifschitz

Pemimpin Proyek  
Drs. A. Murad

Penerjemah  
Dr. Musaddiq Musbach

Penyunting  
A. Murad

Pembantu Teknis  
Radiyo

ISBN 979-459-694-9

Pusat Pembinaan dan Pengembangan Bahasa  
Jalan Daksinapati Barat IV  
Rawamangun  
Jakarta 13220

Hak cipta dilindungi undang-undang.  
Sebagian atau seluruh isi buku ini dilarang diperbanyak  
dalam bentuk apa pun tanpa izin tertulis  
dari penerbit, kecuali dalam hal pengutipan  
untuk keperluan penulisan artikel  
atau karya ilmiah.

## **KATA PENGANTAR**

### **KEPALA PUSAT PEMBINAAN DAN PENGEMBANGAN BAHASA**

Sejak Rencana Pembangunan Lima Tahun II, telah digariskan kebijakan pembinaan dan pengembangan kebudayaan nasional dalam berbagai siginya. Dalam garis haluan ini, masalah kebahasaan dan kesastraan merupakan salah satu masalah kebudayaan nasional yang perlu digarap dengan sungguh-sungguh dan berencana sehingga tujuan akhir pembinaan dan pengembangan bahasa dan sastra Indonesia dan daerah dapat dicapai. Tujuan akhir pembinaan dan pengembangan itu antara lain, adalah meningkatkan mutu kemampuan menggunakan bahasa Indonesia sebagai sarana komunikasi, sebagaimana digariskan dalam Garis-Garis Besar Haluan Negara.

Untuk mencapai tujuan itu, perlu dilakukan berbagai kegiatan kebahasaan dan kesastraan seperti (1) pembakuan ejaan, tata bahasa, dan peristilahan; (2) penyusunan berbagai kamus bahasa Indonesia dan kamus bahasa daerah serta kamus istilah dalam berbagai bidang ilmu; (3) penyusunan buku-buku pedoman; (4) penerjemahan karya kebahasaan dan buku acuan serta karya sastra daerah dan karya sastra dunia ke dalam bahasa Indonesia; (5) penyuluhan bahasa Indonesia melalui berbagai media, antara lain melalui televisi dan radio; (6) pengembangan pusat informasi kebahasaan dan kesastraan melalui inventarisasi, penelitian, dokumentasi, dan pembinaan jaringan informasi kebahasaan, dan (7) pengembangan tenaga, bakat, dan prestasi dalam bidang bahasa dan sastra melalui penataran, sayembara mengarang, serta pemberian hadiah penghargaan.

Sebagai salah satu tindak lanjut kegiatan itu, dibentuklah oleh Pemerintah, dalam hal ini Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Bagian Proyek Pembinaan Bahasa dan Sastra Indonesia-Jakarta. Bagian proyek itu mempunyai tugas pokok melaksanakan kegiatan kebahasaan dan kesastraan yang bertujuan meningkatkan mutu pemakaian bahasa Indonesia yang baik dan benar, mendorong pertumbuhan sastra Indonesia, dan meningkatkan apresiasi masyarakat terhadap sastra Indonesia.

Dalam rangka penyediaan sarana kerja dan buku acuan bagi mahasiswa, dosen, guru, tenaga peneliti, dan masyarakat umum naskah yang berhubungan dengan masalah bahasa, sastra, dan perpustakaan diterbitkan oleh Bagian Proyek Pembinaan Bahasa dan Sastra Indonesia Jakarta.

Buku *Mekanika Klasik* merupakan salah satu hasil kegiatan penerjemahan. Buku yang dalam bahasa Jerman berjudul *Klasische Mechanik* berhasil diterjemahkan oleh Dr. Musaddiq Musbach. Untuk itu, kepada penerjemah saya sampaikan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya.

Akhirnya, kepada Pimpinan Bagian Proyek Pembinaan Bahasa dan Sastra Indonesia-Jakarta 1995/1996, Drs. A. Murad, dan seluruh staf saya ucapkan terima kasih atas pengelolaan dan penerbitan buku ini.

Jakarta, Januari 1996

Dr. Hasan Alwi

## Prakata

Puji Syukur kehadirat Allah swt. yang telah memberi rahmat dan hidayah-Nya sehingga kami dapat menyelesaikan naskah terjemahan buku ini. Tanpa bantuan, kesabaran dan pengorbanan istri penulis, mungkin buku ini tidak terselesaikan.

Buku acuan yang paling terkemuka dan terkenal untuk Fisika teori yang ditulis oleh L.D. Landau dan E. M. Lifschitz dikemas dalam 10 buku, yaitu:

- |                                |                                     |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| 1. Mekanika Klasik             | 6. Hidrodinamika,                   |
| 2. Teori Medan Klasik,         | 7. Teori Elastisitas,               |
| 3. Mekanika Kuantum,           | 8. Elektronidynamika Benda Kontinu, |
| 4. Elektrodinamika Kuantum     | 9. Fisika Statistik, Bagian II dan  |
| 5. Fisika Statistik, Bagian I, | 10. Fisika Kinetik.                 |

Seluruh buku acuan ini dikemas dalam prinsip-prinsip dasar paling penting dan berguna bagi mahasiswa tingkat lanjutan ( $S_1$ , khususnya  $S_2$ ) dan juga untuk para Fisikawan yang berkecimpung dalam bidang Fisika Teori.

Dalam buku ini, seluruh perlakuan Mekanika Klasik diungkap secara sistematis; pembahasan seluruh persoalan Mekanika Klasik yang digunakan menawarkan perlakuan modern untuk merumuskan semua persoalan. Di samping teori umum (formalisme Lagrange dan Hamiltonian) diberikan pula penggunaan konkret dan contoh-contoh modern (persoalan

Kepler, tumbuan dan hamburan partikel, hamburan Rutherford, getaran molekul, resonansi, dan gerak gasing). Semua persoalan dibahas bermuara pada hukum-hukum kekekalan. Seluruh rumusan dilengkapi dengan alasan fisis yang memadai. Hal yang berharga dalam buku ini adalah bahwa seluruh pembahasan dilengkapi dengan contoh dan penyelesaian.

Edisi asli buku ini berbahasa Rusia, diterjemahkan dan disempurnakan ke dalam bahasa Jerman. Kemudian, diterjemahkan dalam bahasa Indonesia tanpa mengalami perubahan.

Dalam kesempatan ini penerjemah mengucapkan terima kasih kepada Pusat Pembinaan dan Bahasa Pengembangan, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan yang telah menyediakan kesempatan bagi para fisikawan di Indonesia untuk turut serta memperkaya khasanah literatur Ilmu Pengetahuan Alam di Indonesia. Khususnya kepada bapak Dr. Edwar Djamaris sebagai Pemimpin Proyek Pembinaan Bahasa dan Sastra Indonesia periode 1994/1995 beserta staf. Dalam kesempatan ini pula, penerjemah mengucapkan terima kasih kepada Prof. Dr. Beni H. Hoed selaku Ketua Tim Pengelola/Penerjemahan Buku Bahasa Asing beserta staf, atas bantuan, bimbingan dan kemudahan dalam menyelesaikan terjemahan ini.

Bogor, 2 Februari 1995.

## Daftar Isi

Kata Pengantar .....	v
Prakata .....	vii
Daftar Isi .....	ix
<b>I. Persamaan Gerak</b> .....	1
1. Koordinat Diperumum .....	1
2. Prinsip Aksi Terkecil .....	2
3. Prinsip Relativitas Galilei .....	7
4. Fungsi Lagrange Sistem Titik Massa "Bebas" .....	10
5. Bentuk Umum Fungsi Lagrange Sistem Titik Massa ..	13
Contoh 1 sampai dengan 4 .....	
<b>II. Hukum-hukum Kekekalan</b> .....	23
6. Energi .....	23
7. Momentum .....	26
contoh 5 .....	
8. Titik Berat .....	29
Contoh 6 .....	
9. Momentum Angular .....	32
Contoh 7 sampai dengan 9 .....	
10. Kemiripan Mekanika .....	39

<b>III</b>	<b>Integrasi Persamaan Gerak</b> .....	44
	Contoh 10 sampai dengan 11	
	11.Gerak Satu Dimensi.....	44
	Contoh 12 sampai dengan 13	
	12.Penentuan Energi Potensial dari Periode Getaran .....	49
	13.Massa Reduksi .....	51
	Contoh-14	
	14.Gerak dalam Medan Sentral .....	53
	Contoh-15 sampai dengan 17	
	15.Problem Kepter .....	63
	Contoh-18 sampai dengan 20	
<b>IV</b>	<b>Tumbuhan Partikel</b> .....	73
	16."Peluruhan" Partikel .....	73
	Contoh 21 sampai dengan 23	
	17.Tumbukan Elastik .....	79
	Contoh 24	
	18.Hamburan Partikel .....	85
	Contoh 25 sampai dengan 31	
	19.Rumusan Rutherford .....	95
	Contoh 32 sampai dengan 33	
	20.Hamburan pada Sudut kecil .....	100
	Contoh 34 sampai dengan 35	
<b>V</b>	<b>Getaran Kecil</b> .....	104
	21.Getaran Bebas 1 Dimensi .....	104
	Contoh 36 sampai dengan 41	
	22.Getaran Dipaksakan .....	111
	Contoh 42 sampai dengan 46	
	23.Getaran: Beberapa Derajat Kebebasan .....	120
	Contoh 47 sampai dengan 49	
	24.Getaran pada Molekul .....	130
	Contoh 51 sampai dengan 53	
	25.Getaran Teredam .....	138
	26.Getaran Dipaksakan dengan Gaya Gesek .....	144
	Contoh 54	
	27.Resonansi Parametris .....	149

	Contoh 55 sampai dengan 57	
	28. Getaran Tidak Harmonik .....	157
	29. Resonansi pada Getaran Tidak Linier .....	162
	Contoh 58	
	30. Gerak dalam Medan Berosilasi Cepat .....	173
	Contoh 59 sampai dengan 60	
<b>VI</b>	<b>Gerak Benda Tegar</b> .....	179
	31. Kecepatan Sudut .....	179
	32. Tensor Kelembaman .....	183
	Contoh 61 sampai dengan 70	
	33. Momentum Angular Benda Tegar .....	201
	34. Persamaan Gerak Benda Tegar .....	204
	35. Sudut EULER .....	209
	Contoh 71 sampai dengan 72	
	36. Persamaan Euler .....	217
	37. Gasing Tidak Simetri .....	221
	Contoh 73 sampai dengan 74	
	38. Kotal Benda Tegar .....	241
	Contoh 75 sampai dengan 78	
	39. Gerak dalam Sistem Acuan Dipercepat .....	249
	Contoh 79 sampai dengan 81	
<b>VII</b>	<b>Persamaan Kanonik</b> .....	249
	40. Persamaan Hamilton .....	254
	Contoh 82 sampai dengan 84	
	41. Fungsi Routh .....	254
	Contoh 82 sampai dengan 84	
	Contoh 85	
	42. Tanda Kurung Poisson .....	257
	Contoh 86 sampai dengan 89	
	43. Aksi Sebagai Fungsi Koordinat .....	264
	44. Prinsip Mauertius .....	268
	Contoh 9	
	45. Transformasi Kanonik .....	273
	46. Teorema Lioiillf .....	279
	47. Persamaan Diferensial Hamilton-Jacobi .....	282
	48. Separasi Variabel .....	286

Contoh 91 sampai dengan 92	
49. Invarian Adiabatis .....	295
50. Variabel Kanonik .....	299
Contoh 93	
51. Ketelitian Kekekalan Invarian Adiabatik .....	303
Contoh 94	
52. Gerak Periodik Bersyarat .....	308
Contoh 95	
Indeks	

# Bab I

## Persamaan Gerak

Pengertian dasar mekanika dimulai dari pengertian *titik massa* atau disebut juga partikel.

### *Titik massa*

*didefinisikan* sebagai sebuah benda *bermassa* dengan ukurannya dapat diabaikan  $d$

alam mempersoalkan gerak. Pengabaian ini tentunya bergantung pada realitas persoalan yang akan dibahas. Misalnya, gerak planet mengelilingi matahari, planet tidak dapat dianggap sebagai titik masa jika ingin diamati gerak planet setiap harinya.

### *Koordinat*

mendefinisikan posisi titik massa, dinyatakan dalam vektor jari-jari  $r$  dengan komponen-komponen ditulis dalam koordinat cartesian

## 1. Koordinat Diperumum

Koordinat masing-masing partikel yang terdapat dalam sistem dinyatakan dalam sederetan  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ , dengan menyatakan jumlah derajat kebebasan sistem. Sistem koordinat ini disebut sebagai sistem koordinat diperumum. Dalam koordinat diperumum  $q_i$  menyatakan kecepatan diperumum, demikian pula halnya dengan percepatan diperumum ditulis  $\ddot{q}_i$ .

Penulisan dalam koordinat diperumum tidak menyatakan, "keadaan mekanistik" suatu sistem pada suatu saat, atau dengan perkataan lain tidak meramalkan suatu keadaan sistem, seperti posisi dan kecepatan, yang menyatakan keadaan sistem pada saat berikutnya. Pada harga koordinat yang diberikan sistem dapat mempunyai kecepatan sembarang, sesuai dengan urutan yang bersesuaian di mana sistem harus berada pada saat berikutnya atau dengan perkataan lain terdapat perbedaan kecepatan masing-masing elemen sistem untuk perbedaan waktu yang sangat kecil sebesar  $dt$ .

Suatu keadaan sistem secara lengkap biasanya diberikan dalam suatu fungsi yang mengandung posisi  $q_i$ , kecepatan  $q_i$  dan pada prinsipnya dapat meramalkan keadaan sistem di waktu yang akan datang. Dari pandangan matematis hal ini mempunyai arti bahwa jika koordinat  $q_i$  dan kecepatan  $q_i$  dari sistem diketahui atau dapat dinyatakan dalam fungsi keadaan, pada saat yang sama dan saat-saat berikutnya, dapat diramalkan pula percepatan sistem  $q''$

### **Persamaan gerak**

Hubungan percepatan dengan koordinat dan kecepatan dinyatakan dalam persamaan gerak.

Apabila diketahui  $q(t)$  secara eksplisit terhadap waktu, secara prinsip dapat diketahui lintasan partikel setiap saat.

## **2. Prinsip Aksi Terkecil**

Rumusan umum hukum-hukum mekanika secara matematis dinyatakan dalam *prinsip aksi terkecil* atau disebut pula sebagai *prinsip Hamiltonian*. Berdasarkan prinsip ini setiap sistem mekanis dikarakteristikan oleh fungsi tertentu:

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t).$$

atau ditulis lebih singkat sebagai  $L(q, \dot{q}, t)$  Gerak suatu sistem dapat dirumuskan sebagai berikut sistem pada saat  $t = t_1$  dan  $t = t_2$  berada

---

1) Untuk menyederhanakan penulisan pada pembahasan nantinya koordinat diperumum disingkat dengan  $q_1, q_2, \dots, q_s$  seringkali hanya disingkat dengan  $q$  ( dan untuk seluruh kecepatan diperumum disingkat dengan  $\dot{q}$ ).

pada posisi tertentu, masing-masing dikarakteristikan oleh koordinat  $q^{(1)}$  dan  $q^{(2)}$ . Jalannya gerak sistem dalam waktu  $t_1$  dan  $t_2$  tersebut dapat dianggap:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.1)$$

sebagai kemungkinan lintasan terkecil yang ditempuh sistem (disebut sebagai aksi)

### *Mengapa terkecil?*

Sebelumnya dikatakan bahwa sistem mekanis (untuk suatu waktu sangat kecil) secara prinsip selalu mengambil energi yang terkecil (minimum)<sup>2</sup>

*Apakah setiap keadaan dengan energi minimum selalu menghasilkan lintasan minimum?*

Hal ini patut diketahui bahwa prinsip aksi terkecil tidak berlaku untuk keseluruhan lintasan, tetapi hanya potongan kecil dari lintasan keseluruhan; untuk lintasan keseluruhan dapat dibuktikan bahwa integral pada pers [2.1],  $S$ , akan menunjukkan harga ekstrimum, bukan minimum. Fungsi  $L$  disebut sebagai fungsi Lagrange dan integral  $S$  disebut sebagai aksi.

Kenyataan fungsi Lagrange hanya mengandung  $q$  dan  $\dot{q}$ ; tetapi tidak mengandung turunan  $\ddot{q}$  ..... dan seterusnya adalah suatu fungsi yang menyatakan bahwa sistem mekanis secara sempurna dapat dinyatakan hanya sebagai fungsi koordinat dan kecepatan.

Selanjutnya akan ditilik lebih rinci penurunan persamaan diferensial yang nantinya dapat digunakan sebagai *media* untuk menyelesaikan <sup>2)</sup>

---

2) Patut pula dicatat bahwa prinsip aksi terkecil tidak selalu berlaku untuk seluruh lintasan, tetapi hanya untuk potongan kecil darinya; untuk ke seluruh lintasan, dapat pula ditunjukkan bahwa integral pada pers [2.1] akan mempunyai harga ekstrim, akan tetapi tidak harus selalu minimal. Keadaan ini adalah tidak begitu penting dalam penurunan persamaan gerak, karena hanya diperlukan syarat ekstrimal.

Patut pula dicatat bahwa prinsip aksi terkecil tidak selalu berkata untuk persoalan-persoalan mekanika, yaitu dengan cara mencari harga minimum dari pers. [2.1] Untuk memudahkan penurunan ini dianggap bahwa sistem hanya mempunyai satu derajat kebebasan sehingga hanya akan dicari harga  $q(t)$  semata.

Dianggap bahwa  $q = q(t)$  adalah sebagai fungsi yang menyebabkan  $S$  berharga minimum. Dengan perkataan lain  $S$  akan bertambah besar jika  $q(t)$  mempunyai bentuk sebagai fungsi sembarang seperti

$$q(t) + \delta q(t) \quad (2.2)$$

$\delta q(t)$  adalah suatu fungsi yang pada saat antara  $t_1$  dan  $t_2$  berharga sangat kecil (*variasi* dari fungsi  $a(t)$ : pada saat  $t = t_1$  dan  $t = t_2$  dianggap bahwa fungsi  $q(t)$  pada pers. [2.2] masing-masing mempunyai harga sebesar  $q^{(1)}$  dan  $q^{(2)}$  sehingga haruslah

$$\delta q_1(t) = \delta q_2(t) = 0. \quad (2.3)$$

Perubahan  $S$  (dalam interval waktu yang bersangkutan) dari  $q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t)$  dapat ditulis

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t).$$

Selanjutnya perbedaan kedua persamaan di atas dibuat dalam bentuk deret terhadap  $\delta q$  dan  $\delta \dot{q}$  (dalam integran) berawal dengan orde pertama dari turunan. Relevansi penderetan di atas adalah karena  $S$  mempunyai harga minimum<sup>3)</sup> sehingga harga turunan keseluruhan adalah sama dengan nol; turunan keseluruhan disebut *variasi orde pertama* (atau disebut variasi saja) dari integral. Dengan cara ini prinsip aksi terkecil dapat ditulis:

---

3) secara umum  $S$  mempunyai harga ekstrimum

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt = 0 \quad (2.4)$$

atau karena  $\delta S = 0$  dan menulisnya dalam variasi

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0$$

Jika diperhatikan bahwa  $\delta d = \frac{d}{dt} q$  dan suku kedua diintegrasikan secara parsial,

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0 \quad (2.5)$$

Dengan dasar pers [2.3], suku pertama akan berharga nol dan suku yang terdapat dalam tanda integral untuk  $\delta q$  tertentu haruslah berharga sama dengan nol pula; hal ini hanya mungkin jika integral berharga nol. Dengan kondisi demikian, pers. [2.5] menjadi:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Untuk  $s (> 1)$  kasus derajat kebebasan fungsi  $q_r(t)$  harus mengalami variasi saling tidak bergantung satu sama lain. Untuk kasus ini akan diperoleh  $s$  persamaan sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (2.6)$$

Persamaan ini adalah persamaan diferensial yang dicari dan disebut sebagai persamaan gerak mekanika dari Lagrange<sup>4)</sup>.

4) Dalam prinsip variasi persamaan ini disebut pula sebagai persamaan Euler. Prinsip variasi membahas cara-cara formal untuk menghitung dan menyelesaikan harga ekstrim dari integral pada pers. [2.1].

Jika persamaan Lagrange suatu sistem mekanis diketahui dari pers. [2.6] dapat dicari percepatan, kecepatan, dan koordinat setiap saat dari sistem berarti persamaan ini menggambarkan gerak sistem tersebut, disebut sebagai persamaan gerak.

Secara matematis pers. [2.6] akan membentuk  $s$  persamaan diferensial orde dua dengan fungsi  $q_j(t)$  yang harus dicari. Untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensi orde 2 haruslah diketahui  $2s$  konstanta yang menyatakan keadaan awal sistem.

Apabila dianggap suatu sistem mekanis mengandung dua bagian  $A$  dan  $B$ , fungsi Lagrange untuk masing-masing bagian dari sistem yang diamati secara terpisah adalah  $L_A$  dan  $L_B$ . Dalam kasus untuk suatu keadaan di mana bagian sistem berada saling berjauhan satu sama lain sehingga interaksi antara kedua bagian sistem dapat diabaikan, maka sistem keseluruhan akan mempunyai harga batas sebagai berikut

$$\lim L = L_A + L_B \quad (2.7)$$

Dalam hal ini fungsi Lagrange dapat saling ditambahkan. Interpretasi pernyataan ini adalah bahwa masing-masing bagian sistem tidak saling berinteraksi satu sama lain dan tidak mengandung besaran yang menyatakan adanya interaksi antara kedua bagian sistem.

Hal penting yang harus dikethaui adalah bahwa fungsi LAGRANGE dari suatu sistem mekanis tidak akan mempengaruhi persamaan gerak jika dikali suatu konstanta sembarang. Kelihatannya hal ini menmbulkan ketidakpastian. Suatu persamaan Lagrange suatu sistem mekanis terisolir haruslah dapat dikali dengan konstanta sembarang yang berbeda satu sama lainnya. (Pers.[2.7] yang mengandung penambahan fungsi Lagrange dapat menyangkal ketidakpastian ini. Dari persamaan ini disimpulkan bahwa fungsi Lagrange dapat dikalikan dengan konstanta yang sama. Mengalikan persamaan Lagrange dengan konstanta sembarang tidak lain mempunyai arti bahwa besaran-besaran yang bersangkutan dihitung dalam sistem satuan yang dapat dipilih secara sembarang (akan dibahas dalam §5).

Selanjutnya pandang beberapa catatan penting berikut ini. Pandang dua persamaan  $L'(q, \dot{q}, t)$  dan  $L(q, \dot{q}, t)$  yang dibedakan oleh turunan total terhadap waktu suatu fungsi sembarang  $f(q, t)$  dari koordinat.

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t). \quad (2.8)$$

Dengan pertolongan kedua fungsi ini ( $L'$  dan  $L$ ) dapat dicari integral pada pers. [2.1] melalui hubungan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt \\ &= S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1), \end{aligned}$$

berarti keduanya dibedakan oleh suku tambahan yang dalam variasi aksi terkecil akan sama dengan nol sehingga memenuhi syarat bahwa  $\delta S'' = 0$ , demikian pula sesuai dengan  $\delta S = 0$  dan bentuk persamaan gerak tidak mengalami perubahan. Dengan cara ini persamaan Lagrange dapat ditentukan sehingga suku tambahan tersebut, yaitu sebagai turunan total terhadap suatu fungsi sembarang dari koordinat dan waktu.

### 3. Prinsip Relativitas Galilei

Untuk menganalisis fenomena mekanis perlu dipilih suatu sistem koordinat tertentu. Dalam sistem koordinat persamaan gerak mempunyai bentuk yang berbeda pula. Sistem koordinat acuan hendaknya harus dipilih sehingga memudahkan penyelesaian persoalan, bukan mempersulit persoalan.

Di dalam berbagai sistem koordinat acuan, ruang dianggap tidak homogen atau isotrop. Hal ini mempunyai arti bahwa setiap posisi benda di dalam ruangan dan berbagai arah besaran-besaran mekanis adalah tidak ekuivalen, walaupun benda yang dipandang tidak mengalami interaksi dengan benda lainnya. Demikian pula halnya dengan waktu, tidak ekuivalen untuk berbagai waktu sesaat di dalam sistem koordinat yang berbeda. Dalam hal ini jelas akan terdapat komplikasi dari

pemilihan sifat ruang dan waktu dalam menganalisis fenomena mekanis. Misalnya, sebuah benda yang tidak mengalami pengaruh gaya luar tidak berada dalam keadaan diam dalam waktu tertentu; jika kecepatan benda dapat berharga nol pada saat tertentu, maka benda pada saat berikutnya akan "mulai" bergerak pada arah yang berbeda.

Dalam hal ini dapat pula ditunjukkan bahwa selalu mungkin untuk memilih sistem koordinat acuan, yaitu sistem koordinat yang mengandung gambaran ruang dan waktu homogen. Sistem koordinat demikian disebut sebagai *sistem koordinat inersial*. Dalam sistem ini sebuah benda pada saat berada dalam keadaan diam, pada saat-saat berikutnya benda dapat pula berada dalam keadaan diam.

Selanjutnya akan dibahas beberapa ramalan untuk fungsi Lagrange suatu sistem titik massa yang bebas bergerak di dalam sistem inersial. Adanya homogenitas ruang dan waktu memberikan arti bahwa fungsi Lagrange tidak bergantung secara eksplisit, baik sebagai fungsi vektor jari-jari  $r$  maupun waktu  $t$ , atau dengan perkataan lain  $L$  hanya bergantung pada kecepatan  $v$ , yaitu merupakan suatu fungsi yang mengandung harga absolut  $v^2 = v^2$  sebagai berikut

$$L = L(v^2). \quad (3.1)$$

Karena  $L$  tidak bergantung dari  $r$ , maka  $dL/dr = 0$  sehingga bentuk fungsi Lagrange menjadi <sup>5)</sup>:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = 0,$$

atau berlaku  $\partial L / \partial v = \text{konstan}$  karena  $L$  hanya sebagai fungsi koordinat.

$$v = \text{konstan}. \quad (3.2)$$

---

5) Dalam penurunan besaran skalar dari suatu vektor dapat dilakukan sebagai berikut: suatu vektor dengan komponen-komponennya merupakan turunan dari besaran tersebut adalah sesuai atau sama dengan komponen vektor yang bersangkutan

Dengan cara demikian, setiap gerak bebas suatu sistem benda yang berada di dalam sistem inersial akan mempunyai besar dan arah kecepatan konstan pula. Pengamatan seperti ini adalah kandungan dari apa yang disebut sebagai *hukum kelembaman*.

Jadi, sistem inersial yang disebutkan di atas terdapat pula sistem lain yang dibandingkan dengan sistem pertama bergerak lurus beraturan, maka semua kelakuan atau hukum-hukum yang berlaku pada sistem pertama untuk benda bergerak-bebas juga berlaku pada sistem yang baru. Gerak bebas dalam sistem koordinat yang aru akan mempunyai kecepatan konstan.

Pengalaman mengajarkan kita bahwa dalam sistem ini tidak hanya hukum-hukum gerak yang berlaku sama, tetapi juga mempunyai hubungan mekanis yang ekuivalen. Dengan perkataan lain dapat dikatakan bahwa tidak terdapat hanya satu sistem inersial, tetapi sejumlah sistem inersial yang satu sama lain bergerak lurus beraturan secara relatif.

Semua yang dijelaskan di atas mendefinisikan secara jelas apa yang dimaksud dengan sistem inersial. Dengan dasar ini pula sistem inersial digunakan untuk menganalisa fenomena mekanis. Pernyataan ini merupakan *prinsip relativitas Galilei*.

Patut pula dicatat bahwa karena adanya ekuivalen untuk semua sistem inersial yang banyak jumlahnya, tidak terdapat satupun sistem koordinat "absolut" sehingga dapat pula dikatakan bahwa masih mungkin terdapat sistem koordinat lain selain sistem koordinat inersial.

Suatu vektor  $r$  dan  $r'$  dari titik yang sama di dalam dua sistem koordinat  $K$  dan  $K'$ , di mana di dalam sistem koordinat kedua titik bergerak dengan kecepatan  $V$  relatif terhadap sistem koordinat pertama, maka kedua sistem koordinat tersebut dapat dihubungkan melalui persamaan

$$r = r' + Vt \quad (3.3)$$

Dalam hal ini waktu yang berlaku pada sistem koordinat pertama persis identik dengan waktu pada sistem kedua.

$$t = t' \quad (3.4)$$

Pengandaian waktu absolut demikian merupakan salah satu keuntungan dalam mekanika klasik<sup>6)</sup>.

Pers. [3.3] disebut sebagai transformasi Galilei. Prinsip relativitas Galilei juga diformulasikan sebagai: *Persamaan gerak mekanik harus invarian terhadap transformasi ini*<sup>7)</sup>.

#### 4. Fungsi Lagrange Sistem Titik Massa "Bebas"

Dicari bentuk fungsi Lagrange untuk kasus sederhana sebagai sebuah titik massa bergerak bebas dalam sistem inersial tertentu. Seperti telah disebutkan sebelumnya bahwa fungsi Lagrange bergantung pada kecepatan kuadrat dari titik massa yang bersangkutan. Untuk mengamati dengan seksama bentuk fungsi ini, akan lebih jelas jika digunakan prinsip relativitas Galilei. Apabila suatu sistem inersial  $K$  bergerak dengan kecepatan kecil, sistem inersial lain  $K'$  maka  $v' = v + \varepsilon$ . Dalam kasus ini persamaan gerak di dalam semua sistem inersial haruslah mempunyai bentuk yang sama, sehingga fungsi Lagrange ( $v^2$ ) untuk transformasi ini haruslah menjadi fungsi Lagrange  $L'$ , yaitu sama dengan fungsi  $L(v^2)$  ditambah dengan turunan total suatu fungsi koordinat dan waktu sebagai berikut

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2v\varepsilon + \varepsilon^2).$$

Jika persamaan di atas ditulis dalam deret terhadap  $\varepsilon$  dan abaikan semua suku yang mengandung harga  $\varepsilon$  berpangkat lebih tinggi dari 2, didapat

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{dL}{dv} 2v\varepsilon.$$

Suku kedua merupakan turunan total suatu fungsi yang bergantung

6) Dalam mekanika relativistik transformasi ini tidak lagi invarian.

7) Dengan demikian, bentuk persamaan gerak yang diubah dari satu sistem inersial ke sistem inersial lainnya adalah tetap, misalnya  $\ddot{r} = 0 \rightarrow \ddot{r}' = 0$ .

koordinat dan waktu. Jika fungsi tersebut bergantung pada kecepatan pada linier  $v$ . Dengan demikian, haruslah  $L/v$  berharga konstan, atau dengan perkataan lain fungsi Lagrange untuk kasus ini adalah berbanding langsung dengan kecepatan kuadrat.

$$L = \frac{m}{2} v^2. \quad (4.1)$$

Berdasarkan kenyataan bahwa fungsi Lagrange memenuhi transformasi infinitesimal prinsip relativitas Galilei, maka untuk kasus kecepatan tertentu  $V$  dari sebuah titik massa yang terdapat di dalam sistem inersial  $K$  adakah invarian terhadap sistem inersial  $K'$ . Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut.

*Pembuktian.*

Dari persamaan transformasi:

$$v' = v + V$$

didapat

$$L' = \frac{m}{2} v'^2 = \frac{m}{2} (v + V)^2 = \frac{m}{2} v^2 + m v V + \frac{m}{2} V^2$$

atau

$$L' = L + \frac{d}{dt} \left( m r V + \frac{m}{2} V^2 t \right).$$

Suku kedua merupakan turunan total suatu fungsi koordinat dan waktu dan dapat diabaikan (dalam hal ini tentu jika suku kedua tidak bergantung terhadap koordinat dan waktu secara eksplisit).

Besaran  $m$  disebut massa. Untuk sistem yang mengandung sejumlah partikel saling tidak berinteraksi sehingga fungsi Lagrange

---

8) Sebagai indeks yang memberikan numerasi partikel digunakan huruf pertama dalam abjad latin dan sebagai indeks untuk numerasi koordinat digunakan huruf  $i, k, l, \dots$

dapat ditulis dalam bentuk penambahan semua fungsi Lagrange untuk masing-masing partikel sebagai berikut:

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} \quad [4.2]$$

indeks  $a$  menyatakan jumlah untuk semua partikel ( $a = 1, 2, \dots$ ).

Harus pula dicatat bahwa definisi sifat penambahan ini mengandung pengertian real.

Seperti dibicarakan pada 2, fungsi Lagrange dapat dimultiplikasi dengan suatu faktor konstansa sebarang. Untuk fungsi pada pers. [4.2] yang mengandung partikel-partikel yang berbeda, akan mengandung pengertian fisis real yang sama dan tidak berubah terhadap transformasi ini tersebut.

Mudah dibuktikan bahwa massa tidak berharga negatif. Dengan menggunakan prinsip aksi terkecil untuk gerak real suatu titik massa dari titik 1 ke 2, maka integral.

$$S = \int_1^2 \frac{mv^2}{2} dt$$

Akan mempunyai harga minimum. Seandainya harga massa negatif maka integral aksi untuk suatu lintasan partikel dengan cepat bergerak dari titik 1 sehingga dengan cepat dapat mencapai titik 2, dengan mengambil harga negatif sebarang atau dengan perkataan lain tidak akan terdapat harga minimum<sup>9)</sup>.

Patutu dipandang bahwa berlaku

$$v^2 = \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 = \frac{dl^2}{dt^2} \quad (4.3)$$

9) Catatan pada § 2 tidak berlawanan dengan hasil perhitungan di atas, karena untuk  $m < 0$  integral untuk bagian lintasan yang tidak kecil dapat dianggap mempunyai harga minimum.

Dengan demikian, persamaan Lagrange dapat dinyatakan dalam panjang lintasan  $dl$  dalam sistem koordinat tertentu.

Dalam sistem koordinat *cartesian*, misalnya  $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  sehingga

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (4.4)$$

Dalam sistem koordinat *selinder*, misalnya  $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$  sehingga

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2). \quad (4.5)$$

Dalam sistem koordinat *bola* misalnya:  $dl^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \Theta d\varphi^2$  sehingga

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\Theta}^2 + r^2 \sin^2 \Theta \dot{\varphi}^2). \quad (4.6)$$

## 5. Bentuk Umum Fungsi Lagrange Sistem Titik Massa

Pandang sistem titik massa yang mengandung partikel-partikel bermassa dan sistem dianggap sebagai *sistem tertutup* berarti bahwa sistem tidak mengalami interaksi dengan sistem lain selain yang terdapat di dalam sistem ini. Untuk kasus terdapat interaksi antara partikel menyebabkan pers. [4.3] harus ditambahkan suku interaksi yang bergantung pada karakter interaksi<sup>10)</sup>, sebagai fungsi koordinat. Misalnya suku interaksi dinyatakan dalam fungsi  $U$  sehingga fungsi

---

10) Ramalan ini berlaku hanya untuk mekanika klasik, yaitu mekanika nonrelativistik yang dibahas di dalam buku ini.

Lagrange ditulis dalam bentuk.

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) \quad (5.1)$$

$\mathbf{r}_a$  adalah vektor jari-jari partikel ke  $a$ . Pers [5.1] adalah bentuk umum fungsi Lagrange dari sistem tertutup. Penjumlahan

$$T = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}$$

disebut sebagai *energi kinetik* dan  $U$  disebut sebagai *energi potensial*; arti dari hubungan ini akan dibicarakan lebih rinci dari §3.1. Ketergantungan energi potensial pada koordinat mempunyai pengertian bahwa perubahan jarak atau jari-jari suatu titik massa akan berpengaruh terhadap besarnya energi potensial; atau d.p.l dapat dikatakan bahwa energi potensial mengalami, "rambatan". Sifat interaksi ini dalam mekanika klasik tetap berhubungan dengan prinsip relativitas Galilei bahwa waktu adalah absolut. Jika interaksi untuk sementara merambat bergantung pada kecepatan maka kecepatan ini dalam sistem yang berbeda (untuk elemen sistem yang bergerak relatif satu sama lainnya) haruslah berbeda pula, dan pengandaian waktu adalah absolut dalam hal ini secara otomatis mempunyai arti bahwa prosedur masih tetapi berlaku penambahan vektor bisa. Apabila tidak demikian, semua persamaan gerak untuk sistem inersial yang berbeda akan mempunyai bentuk yang berbeda pula; hal ini bertentangan dengan prinsip relativitas Galilei.

Pada §3 dibicarakan hanya homogenitas waktu. Persamaan Lagrange pada pers. [5.1] menunjukkan bahwa waktu tidak saja homogen, tetapi juga isotropik. Berarti bahwa sifat waktu untuk kedua arah adalah sama. Hal ini dapat dibuktikan jika mensubstitusikan waktu  $t \rightarrow -t$ , akan diperoleh bahwa persamaan Lagrange tidak mengalami perubahan. Sebagai contoh adalah di dalam sistem dimungkinkan berlangsung suatu urutan kejadian yang akhirnya dapat dinyatakan dalam persamaan Lagrange, apabila dimungkinkan terjadi gerak kebalikan. Akan diperoleh persamaan gerak yang sama dan berarti pula bahwa urutan-urutan kejadian tetap seperti kejadian sebaliknya. Dalam sistem mekanika

klasik demikian semua gerak suatu sistem diktakan berlangsung secara *reversibel*. Jika diketahui fungsi Lagrange, dapat ditulis persamaan gerak sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_a} \right) = \frac{\partial L}{\partial r_a}. \quad (5.2)$$

Substitusikan ke pers. [5.1], didapat

$$m_a \cdot \frac{\partial v_a}{\partial t} = - \frac{\partial U}{\partial r_a}. \quad (5.3)$$

Persamaan ini tidak lain sama dengan persamaan gerak Newton dan diketahui sebagai pembentuk "bangunan mekanika" dari sistem partikel bermassa. Vektor

$$F_a = - \frac{\partial U}{\partial r_a}, \quad (5.4)$$

yang terletak pada ruas kanan pers. [5.3] dan diketahui tidak lain sebagai gaya yang bekerja pada partikel ke  $a$ . Gaya ini, seperti halnya dengan  $U$ , hanya bergantung pada koordinat dari sistem partikel yang bersangkutan. Akan tetapi, tidak bergantung pada kecepatan. Pers. [5.3] juga menunjukkan bahwa vektor percepatan partikel hanya bergantung pada koordinat partikel semata.

Energi potensial hanya didefinisikan hingga konstanta penambah tertentu; dengan menambahkan konstanta tidak akan mengubah persamaan gerak (hal ini berlaku sama seperti yang telah dibahas untuk fungsi Lagrange pada § 2). Konstanta yang secara alamiah dipilih dalam hal ini adalah yang dapat menyebabkan harga energi potensial menjadi nol atau dengan perkataan lain bertambahnya jarak antara partikel yang berinteraksi. Dalam merumuskan persamaan gerak tidak digunakan koordinat *Cartesian*, tetapi koordinat diperumum. Maka akan diperoleh fungsi Lagrange berdasarkan transformasi koordinat sebagai berikut.

$$x_a = f_a(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad \dot{x}_a = \sum_k \frac{f_a}{q_k} \dot{q}_k.$$

Masing-masing koordinat dan kecepatan disubstitusikan ke dalam fungsi Lagrange sebagai berikut (dalam koordinat *Cartesian*).

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U$$

maka persamaan Lagrange yang dicari adalah

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q), \quad (5.5)$$

dengan koefisien  $a_{ik}$  bergantung pada sistem koordinat. Energi kinetik dalam sistem koordinat diperumum juga sebagai fungsi kecepatan kuadrat, selain itu dapat bergantung pada koordinat.

*Bagaimana dengan sistem terbuka ?*

### Sistem terbuka

Hingga di sini dibahas sistem tertutup. Sekarang akan dibahas sistem terbuka  $A$  yang berinteraksi dengan sistem lain, yaitu  $B$  dan menyebabkan gerak. Dalam kasus ini dikatakan bahwa sistem  $A$  bergerak di dalam *medan* yang ditimbulkan oleh sistem  $B$ . Untuk menganalisa kasus ini secara kuantitatif harus diandaikan seolah telah diketahui koordinat untuk masing-masing partikel yang terdapat di dalam sistem  $A$  dan  $B$ , sehingga fungsi Lagrange sistem  $L_A$  dan dapat ditentukan pula fungsi Lagrange untuk kedua sistem  $A + B$   $L$ , serta koordinat  $q_B$  melalui pemberian fungsi terhadap waktu juga diketahui.

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B),$$

dengan  $T_A$  dan  $T_B$  adalah energi kinetik masing-masing sistem dan  $U$  adalah energi potensial (sebagai suku interaksi keduanya). Dengan mengandaikan  $q_B$  sebagai fungsi dari waktu dan mensubstitusikannya ke dalam  $T_B(q_B)$ ,  $q_B(t)$  dan hanya sebagai fungsi waktu (karenanya nantinya terdapat turunan suatu fungsi sembarang yang bergantung terhadap waktu), diperoleh bahwa

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(\dot{q}_A, q_B(t)).$$

Melalui cara demikian fungsi Lagrange untuk sistem yang berada di dalam medan luar dirumuskan dalam fungsi Lagrange biasa, hanya dengan perbedaan bahwa energi potensial bergantung pada eksplisit terhadap waktu.

Bentuk umum persamaan Lagrange sebuah partikel yang bergerak di dalam medan luar adalah.

$$L = \frac{m \dot{r}^2}{2} - U(\mathbf{r}, t), \quad (5.6)$$

dengan persamaan geraknya menjadi

$$m \dot{v} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}. \quad (5.7)$$

Suatu medan dikatakan *homogen* jika semua titik massa mengalami gaya  $\mathbf{F}$  yang sama. Sehingga energi potensial di dalam sistem demikian dapat ditulis menjadi:

$$U = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}. \quad (5.8)$$

Sebagai penutup akan dibahas penggunaan fungsi Lagrange dalam berbagai persoalan konkrit. Persamaan ini banyak berhubungan dengan persoalan-persoalan sistem mekanika, di mana interaksi antara benda digambarkan dalam apa yang disebut sebagai karakter *pengikat*, yaitu sebagai batasan atau konstrain, selalu digunakan koordinat. Pengikat tersebut kenyataannya dapat berupa tali, balok, kawat, dan lain sebagainya. Dalam hal-hal tersebut dapat beberapa isitilah, misalnya gerak benda

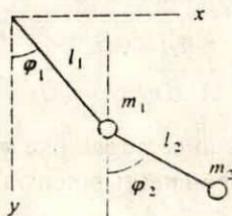
dengan gesekan pada titik-titik kontakannya sehingga persoalan dapat dibahas masih dalam batasan kerangka mekanika. Akan tetapi, di dalam banyak persoalan mekanika terdapat pengaruh gesekan yang amat kecil sehingga biasanya dapat diabaikan. Jika untuk suatu kasus jumlah dari pengikat diperkecil, sama artinya memperkecil derajat kebebasan  $s$  dari sistem (dibandingkan dengan jumlahnya yang sama dengan  $3N$ ). Untuk mencari persamaan gerak sistem, secara umum dapat digunakan pers. [5.5], dengan jumlah koordinat diperumum sesuai dengan banyak jumlah derajat kebebasan.

### Contoh-contoh

Cari fungsi Lagrange sistem berikut yang terdapat di dalam medan gaya berat (misalnya; percepatan gaya berat  $g$ ).

#### Contoh 1: Bandul ganda (lihat gbr. [1])

Pada bandul ganda masing-masing beban  $m_1$  dan  $m_2$  digantungkan pada tali dengan panjang  $l_1$  dan  $l_2$ . Cari fungsi Lagrange sistem  $m_1$  dan  $m_2$



Gambar 1:

### Penyelesaian

Sebagai koordinat pilih koordinat  $\varphi_1$  dan  $\varphi_2$  yaitu sebagai sudut yang dibentuk oleh tali  $l_1$  dan  $l_2$  terhadap garis vertikal. Koordinat dan kecepatan massa  $m_1$

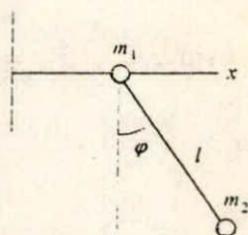
$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \varphi_1 & \dot{x}_1 &= l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \\ y_1 &= l_1 \cos \varphi_1 & \dot{y}_1 &= -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \end{aligned}$$

maka energi kinetik dan potensial  $m_1$  adalah

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2, \quad U_1 = -m_1 g l_1 \cos \varphi_1.$$

Untuk menentukan energi kinetik sistem massa  $m_2$ , maka koordinat Cartesian masa tersebut ( $x_2, y_2$ , koordinat titik awal terletak pada titik di mana tali digantungkan, sumbu-y diletakkan pada arah vertikal) dengan sudut  $\varphi_1$  dan  $\varphi_2$ :

$$x_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2, \quad y_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2.$$



Gambar 2:

Selanjutnya di dapat

$$T_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2} (l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2)$$

dan akhirnya di dapat

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g l_2 \cos \varphi_2.$$

**Contoh 2:** Bandul Bidang dengan massa  $m_2$ .

Dengan titik penggantung (mengandung massa  $m_1$ ) dapat bergerak horizontal menurutm garis lurus (lihat gbr [2]).

*Penyelesaian*

Dengan menganggap koordinat  $m_1$  adalah  $r$  dan sudut  $\varphi$  antara tali bandul dan garis vertikal, maka koordinat massa  $m_1$ ,

$$\begin{aligned}x_1 &= x & \dot{x}_1 &= \dot{x} \\y_1 &= 0 & \dot{y}_1 &= 0\end{aligned}$$

Energi Potensial  $m_1$

$$U_1 = 0$$

Koordinat massa  $m_2$

$$x_2 = x + l \sin \varphi, \quad \dot{x}_2 = \dot{x} + l \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$y_2 = l \cos \varphi, \quad \dot{y}_2 = -l \dot{\varphi} \sin \varphi$$

Energi potensial  $m_2$ :

$$U_2 = -mg l \cos \varphi.$$

Dengan demikian fungsi Lagrange sistem keseluruhan adalah

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi) + m_2 g l \cos \varphi.$$

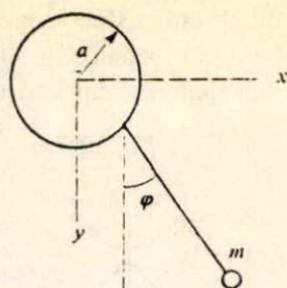
**Contoh 3:** Bandul Bidang dengan titik tangkap pada

- sepanjang kerucut vertikal bergerak dengan frekuensi konstan  $\gamma$  (lihat gambar [3]);
- bervibrasi secara horizontal berdasarkan persamaan  $a \cos \gamma t$ ; dan
- bervibrasi secara vertikal berdasarkan persamaan  $a \cos \gamma t$ .

*Penyelesaian*

(a) Koordinat titik-titik adalah (lihat gambar [3])

$$x = a \cos \gamma t + l \sin \varphi, \quad y = -a \sin \gamma t + l \cos \varphi,$$



Gambar 3:

sehingga diperoleh fungsi Lagrange sebagai berikut

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mla \gamma^2 \sin(\varphi - \gamma t) + mgl \cos \varphi$$

dalam hal ini suku-suku diabaikan, yaitu suku-suku yang mengandung turunan total terhadap waktu seperti  $mla \gamma \cos(\varphi - \gamma t)$ .

(b) Koordinat titik-titik adalah

$$x = a \cos \gamma t + l \sin \varphi, \quad y = l \cos \varphi,$$

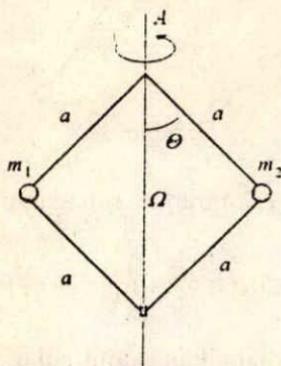
sehingga diperoleh fungsi Lagrange (dengan mengabaikan fungsi yang bergantung pada waktu) sebagai berikut

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mla \gamma^2 \cos \gamma t \sin \varphi + mgl \cos \varphi$$

(c) dengan koordinat titik-titik analog pada (b) diperoleh fungsi Lagrange (dengan mengabaikan fungsi yang bergantung pada waktu) sebagai berikut

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mla \gamma^2 \cos \gamma t \cos \varphi + mgl \cos \varphi$$

**Contoh 4:** Misalnya, diberikan sistem seperti yang tergambar pada gambar [4]. Massa  $m_2$  bergerak sepanjang sumbu vertikal dan seluruh sistem bergerak dengan kecepatan sudut konstan  $\Omega$  terhadap sumbu ini. Cari fungsi Lagrange !



Gambar 4:

### Penyelesaian

Misalnya sudut antara sisi adalah  $\Theta$  dan sudut putar seluruh sistem  $\gamma$  terhadap sumbu  $\gamma = \Omega$ . Untuk titik bermassa  $m_1$  berlaku pergeseran elemen sebesar  $dl = a^2 d\Theta^2 + a^2 \sin^2 \Theta d\varphi^2$ . Jarak massa  $m_2$  terhadap titik tangkap (titik gantung) adalah  $A2a \cos \Theta$  sehingga  $dl_2 = -2a \sin \Theta d\Theta$ . fungsi Lagrange dapat ditulis dalam

$$L = m_1 a^2 (\dot{\Theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \Theta \cdot \dot{\Theta}^2) + 2g a (m_1 + m_2) \cos \Theta$$

## Bab II

# Hukum-hukum Kekekalan

### 6. Energi

Pada gerak suatu sistem mekanik terdapat perubahan sebanyak  $2s$  besaran  $q_i$  dan  $\dot{q}_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) yang menentukan keadaan sistem. Setiap besaran ini mengandung fungsi tertentu, yang pada proses gerak yang bersangkutan akan mempunyai harga bergantung pada syarat awal. Fungsi ini disebut sebagai *integral gerak*.

Jumlah integral yang saling tidak bergantung satu sama lain, untuk satu sistem mekanika dengan derajat kebebasan  $2s$  adalah  $2s-1$  dan dapat ditentukan melalui analisa yang akan dibahas berikut ini. Penyelesaian persamaan gerak mengandung  $2s$  konstanta (lihat keterangan pada §2). Karena persamaan gerak sistem tertutup tidak bergantung pada waktu secara eksplisit, maka waktu awal dapat dipilih mempunyai harga sembarang sehingga konstanta yang muncul pada penyelesaian persamaan gerak selalu dapat dianggap sebagai penambahan konstanta waktu  $t_0$ . Dengan mengeliminasi  $t + t_0$  dari fungsi banyak  $2s$  didapat rumusan  $q_i$  dan  $\dot{q}_i$  dalam  $C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}$  sebagai berikut

$$q_i = q_i(t + t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1})$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t + t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1})$$

jika  $2s - 1$  konstanta  $C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}$  ditulis dalam variabel  $q$  dan  $\dot{q}$  akan diperoleh integral gerak yang dimaksud.

Dalam mekanika integral gerak mempunyai peran yang sama pentingnya. Akan tetapi, di dalamnya terkandung konstanta penyebab, yang timbul karena sifat dasar homogenitas dan isotropik ruang waktu. Besaran (berupa konstanta) yang dimaksud disebut sebagai besaran "kekekalan" dan mempunyai sifat penting, yaitu dapat saling ditambahkan. Harga besaran ini untuk suatu sistem yang terdiri dari beberapa bagian (subsistem), dengan mengabaikan interaksi antara sesama subsistem sama dengan penjumlahan masing-masing harga besaran tersebut untuk setiap sistem.

Justru karena sifat yang dapat ditambahkan tersebut, maka besaran ini dalam mekanika menjadi penting. Sebagai contoh, terdapat dua sistem yang dalam waktu tertentu saling berinteraksi. Dalam hal ini integral gerak, baik sebelum maupun setelah interaksi sama dengan jumlah integral gerak masing-masing benda sehingga berdasarkan hukum kekekalan besaran ini memberikan kemungkinan sederetan *kunci* tentang keadaan-keadaan sistem setelah terjadinya interaksi, yaitu jika diketahui keadaan kedua benda sebelum terjadinya interaksi.

Pembahasan akan dimulai dengan menilik *homogenitas waktu*. Adanya homogenitas waktu akan menghasilkan fungsi Lagrange suatu sistem tertutup yang tidak bergantung pada waktu secara eksplisit. Dengan dasar ini maka diferensial total fungsi Lagrange terhadap waktu dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{d}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

Seandainya  $L$  bergantung pada waktu secara eksplisit, maka pada ruas kanan akan muncul suku  $\partial L / \partial t$ . Dengan menggantikan turunan  $\partial L / \partial \dot{q}_i$  dari persamaan Lagrange dengan  $dL / dt \partial L / \partial \dot{q}_i$  diperoleh

$$\frac{d}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)$$

atau

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0$$

Dari persamaan ini diperoleh

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (6.1)$$

adalah konstan untuk gerak sistem tertutup, atau dengan perkataan lain pers. [6.1] menggambarkan integral gerak sistem. Besaran ini disebut sebagai *energi* sistem. Sifat dapat ditambahkan dari energi berasal dari sifat penambahan fungsi Lagrange, yang pada pers [6.1] dinyatakan secara persamaan linear. Hukum kekekalan energi tidak hanya berlaku untuk sistem tertutup, tetapi berlaku untuk sistem yang di dalamnya terdapat medan gaya yang konstan (yaitu jika medan tidak bergantung pada waktu); satu-satunya yang digunakan dalam menurunkan sifat fungsi Lagrange juga terdapat dalam kasus ini adalah ketergantungan terhadap waktu secara eksplisit dan disebut sebagai *konservatif*.

Seperti telah dibahas pada §5 bahwa fungsi Lagrange suatu sistem tertutup (atau suatu sistem yang terdapat di dalam medan gaya tidak bergantung pada waktu), dinyatakan dalam bentuk

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q)$$

Dalam hal ini  $T$  adalah fungsi kecepatan kuadrat. Jika digunakan teorema Euler untuk suatu fungsi homogen dikerjakan pada fungsi ini akan diperoleh:

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

Dengan mensubstitusikan persamaan ini ke pers. [6.1] didapat bahwa

$$E = T(q, \dot{q}) - U(q) \quad (6.2)$$

dan jika dinyatakan dalam koordinat *Cartesian*

$$\sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) \quad (6.3)$$

Dengan cara ini energi suatu sistem dapat ditulis mengandung dua suku yang berbeda yaitu *energi kinetik* yang bergantung pada kecepatan dan *energi potensial* yang bergantung pada koordinat partikel yang bersangkutan.

## 7. Momentum

Hukum kekekalan lain yang muncul dari *homogenitas ruang* adalah *momentum*.

*Apakah fungsi Lagrange berubah terhadap pergeseran ruang secara paralel?*

Dari homogenitas diperoleh bahwa suatu sistem tertutup pada suatu pergeseran ruang sembarang, yang terjadi secara paralel, keseluruhan sistem tidak mengalami perubahan. Sebagai contoh, terjadi pergeseran infinitesimal sebesar  $\epsilon$  dan akan dibuktikan bahwa fungsi Lagrange tidak mengalami perubahan. Jika sistem secara keseluruhan mengalami pergeseran ruang (koordinat), semua sistem yang terdapat di dalam akan mengalami pergeseran koordinat yang sama, yaitu jika vektor titik mula-mula adalah sama dengan  $\mathbf{r}_a$ , setelah mengalami pergeseran menjadi  $\mathbf{r}_a + \epsilon$ . Perubahan  $L$  pada transformasi koordinat ini secara infinitesimal, untuk kecepatan tetap yang sama adalah

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \delta \mathbf{r}_a = \epsilon \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}$$

Penambahan dilakukan terhadap seluruh titik massa yang terdapat di

dalam sistem. Karena  $\epsilon$  berharga sembarang, dapat dipilih  $\delta L = 0$  atau ekuivalen dengan

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0. \quad (7.1)$$

Dengan menggunakan persamaan Lagrange pers. [5.2] diperoleh

$$\sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = 0.$$

Dengan demikian, diperoleh hasil perhitungan untuk sistem mekanis tertutup suatu besaran vektor:

$$\mathbf{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \quad (7.2)$$

yang pada gerak adalah tetap. Vektor  $\mathbf{P}$  selanjutnya disebut sebagai *momentum linier* dari sistem. Dengan menurunkan fungsi Lagrange pada pers. [5.1] didapat bahwa momentum dapat dinyatakan dalam massa dan kecepatan partikel

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a \quad (7.3)$$

Dalam hal ini momentum juga mempunyai sifat dapat ditambahkan (penambahan vektor). Oleh karena itu, momentum sistem keseluruhan adalah kebalikan dari energi, sama dengan penambahan vektor semua momentum partikel yang terdapat di dalam sistem

$$\mathbf{P}_a = m_a \mathbf{v}_a.$$

yaitu tidak bergantung pada apakah interaksi antara partikel di dalam sistem diabaikan atau tidak.

Untuk ketiga komponen vektor momentum berlaku hukum kekekalan

medan gaya luar. Masing-masing komponen momentum dengan adanya medan gaya luar tetap mempunyai harga seperti semula. Jika energi potensial sistem tidak bergantung pada koordinat (misalnya *C artesian*). Pada peristiwa pergeseran terhadap sumbu koordinat tidak menjadi perubahan sifat-sifat sistem kemandis. Hal ini mempunyai arti bahwa proyeksi momentum pada sumbu koordinat merupakan besaran kekal. Di dalam medan homogen yang arahnya paralel terhadap sumbu-z, misalnya komponen-komponen  $r$  dan  $y$  adalah besaran kekal.

Pers. [7.1] sendiri mempunyai pengertian fisis tersendiri. Turunan  $\partial L / \partial r_a = \partial U / \partial r_a$  menggambarkan gaya yang bekerja pada partikel ke  $a$ . Dengan demikian, pers. [7.1] adalah jumlah seluruh gaya yang bekerja pada seluruh partikel dalam sistem tertutup sama dengan nol.

$$\sum_a F_a = 0 \quad (7.4)$$

Misalnya di dalam sistem terdapat dua titik massa, maka  $F_1 + F_2 = 0$ . Gaya yang bekerja pada partikel pertama karena partikel kedua mempunyai besaran yang sama, akan tetapi mempunyai arah berlawanan. Ramalan ini disebut sebagai prinsip kesamaan gaya aksi dan reaksi. Jika gerak ditulis dalam koordinat diperumum  $q_i$ , maka persamaan Lagrange dapat ditulis dalam kecepatan diperumum sebagai

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (7.5)$$

disebut sebagai *momentum diperumum* dan turunan koordinat diperumumnya

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (7.6)$$

disebut *gaya diperumum*. Dengan kedua hubungan ini maka persamaan Lagrange dalam bentuk

$$\dot{p} = F_i \quad (7.7)$$

Dalam koordinat *Cartesius* komponen-komponen vektor momentum  $p_a$  dapat dinyatakan sesuai dengan masing-masing sumbu yang bersangkutan. Dalam koordinat diperumum momentum  $p_i$  adalah suatu besaran yang bergantung pada linier kecepatan diperumum tidak dinyatakan dalam masa kali kecepatan lagi.

**Contoh 5:** Sebuah benda bersama  $m$  bergerak dengan kecepatan  $v_1$  dari suatu ruang dengan energi potensial konstan sebesar  $U_1$  ke ruang lain dengan energi tersebut konstan, tetapi sama dengan  $U_2$ .

Tentukan perubahan persamaan gerak partikel!

**Penyelesaian:** Karena energi potensial konstan, maka tidak bergantung pada koordinat sehingga sumbunya paralel terhadap permukaan batas kedua ruang. Oleh sebab itu, proyeksi momentum partikel pada permukaan ini merupakan besaran kekekalan; jika dimisalkan bahwa sudut  $\Theta_1$  dan  $\Theta_2$  masing-masing sudut kecepatan  $v_1$  dan  $v_2$  pada permukaan batas kedua ruang dari partikel untuk saat sebelum dan sesudah melewati permukaan tersebut, maka didapat bahwa  $v_1 \sin \Theta_1 = v_2 \sin \Theta_2$  sehingga perbandingan antara  $v_1$  dan  $v_2$  dapat diperoleh dari hukum kekekalan energi sebagai

$$\frac{\sin \Theta_1}{\sin \Theta_2} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv_1^2} (U_1 - U_2)}$$

## 8. Titik Berat

Momentum suatu sistem mekanis tertutup mempunyai harga yang berbeda pada sistem inersial yang berbeda. Jika sistem  $K'$  bergerak dengan kecepatan  $V$  relatif terhadap sistem inersial  $K$ , maka kecepatan partikel ke  $a$  pada masing-masing sistem mempunyai hubungan  $v'_a = v_a + V$ . Dengan demikian, akan diperoleh pula hubungan momentum  $P$  dan  $P'$  sebagai berikut

$$P = \sum_a m_a v_a = \sum_a m_a v'_a + V \sum_a m_a$$

atau

$$P = P' + V \sum_a m_a \quad (8.1)$$

Dalam sistem inersial  $K'$  terdapat suatu titik yang mempunyai momentum total sama dengan nol. Jika pada pers. [8.1] dibuat  $p' = 0$  maka diperoleh bahwa kecepatan sistem inersial ini adalah

$$V = \frac{P}{\sum_a m_a} = \frac{\sum_a m_a v_a}{\sum_a m_a} \quad (8.2)$$

Jika momentum total sistem mekanis sama dengan nol, dapat dikatakan bahwa sistem mekanis pada sistem inersial yang bersangkutan berada dalam keadaan *diam*. Pernyataan ini merupakan istilah *diam* secara umum alamiah untuk satu titik massa. Sehubungan dengan itu kecepatan  $V$  akan bertambah, sesuai dengan pernyataan pada pers. [8.2] sebagai arti dari kecepatan dari *gerak suatu sistem mekanis secara keseluruhan*, yang mempunyai momentum tidak berharga nol. Dengan demikian, dapat pula terlihat adanya hukum kekekalan momentum, yang secara alamiah istilah *diam* dan kecepatan suatu sistem mekanis didefinisikan secara keseluruhan.

Pers. [8.2] menunjukkan bahwa relasi antara  $P$  dan kecepatan  $V$  dari keseluruhan sistem adalah sama seperti momentum dan kecepatan masing-masing titik massa yang mempunyai massa  $\mu = \sum m_a$ , yaitu sama dengan penjumlahan massa seluruh titik yang terdapat di dalamnya.

Ruas kanan pers. [8.2] dapat ditulis sebagai turunan dari persamaan

$$R = \frac{\sum_a m_a r_a}{\sum_a m_a} \quad (8.3)$$

Kecepatan sistem keseluruhan adalah sama dengan kecepatan suatu titik yang bergerak di dalam ruang dan mempunyai vektor  $R$ . Titik ini disebut sebagai titik berat dari sistem. Maka dengan adanya rumusan

di atas, hukum kekekalan momentum suatu sistem mekanis tertutup dapat pula diformulasikan sebagai *Titik berat sistem bergerak lurus beraturan dan serbasama*. Bentuk formulasi ini merupakan pernyataan umum dari hukum kelembaman yang telah dibahas untuk satu titik massa pada § 2.3, yang mempunyai titik berat sama dengan titik yang bersangkutan.

Pada analisa sifat mekanis suatu sistem tertutup tentunya digunakan suatu sistem inersial tertentu, di mana titik berat berada dalam keadaan diam. Dengan cara ini semua gerak titik-titik yang tidak beraturan dan terdapat di dalam sistem tersebut dapat dieliminasi.

Energi suatu sistem yang berada dalam keadaan diam keseluruhan biasanya disebut sebagai *energi dalam*  $E_{dlm}$ . Energi ini mengandung energi kinetik dari gerak relatif partikel di dalam sistem dan energi potensial dari interaksi yang juga terdapat di dalam sistem yang bersangkutan. Energi total suatu sistem yang secara keseluruhan bergerak dengan kecepatan  $V$  dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{\mu V^2}{2} + E_{dlm}. \quad (8.4)$$

Walaupun kebenaran rumusan ini telah dijelaskan, perlu kiranya dibuat pembuktian untuk membuat persoalan ini semakin jelas.

Energi  $E$  dan  $E'$  dari suatu sistem mekanis masing-masing untuk sistem inersial  $K$  dan  $K'$  mempunyai hubungan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a^2 + U = \frac{1}{2} \sum_a m_a (v'_a + V)^2 + U \\ &= \frac{\mu V^2}{2} + V \sum_a m_a v'_a + \sum_a \frac{m_a v_a'^2}{2} + U \end{aligned}$$

atau

$$E = E' + V \cdot P' + \frac{\mu V^2}{2}. \quad (8.5)$$

Rumusan ini adalah rumusan transformasi energi untuk suatu sistem inersial ke sistem inersial lainnya.

**Contoh 6:** Tentukan rumusan transformasi aksi  $S$  dari suatu sistem inersial ke sistem inersial lainnya

**Penjelasan:** Fungsi Lagrange adalah sama dengan perbedaan energi kinetik dan potensial. Dengan mengamati kembali pers. [8.5] diperoleh

$$L = L' + \mathbf{V} \cdot \mathbf{P}' + \frac{1}{2} \mu V^2$$

Jika persamaan ini diintegrasikan terhadap waktu, akan diperoleh persamaan transformasi aksi  $S$  yang dicari

$$S = S' + \mu \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}' + \frac{1}{2} \mu V^2 t$$

dengan  $\mathbf{R}'$  adalah vektor jari-jari titik pusat massa di dalam sistem inersial  $K'$ .

## 9. Momentum Angular

Pembahasan tentang hukum kekekalan selanjutnya bersangkutan dengan akibat *isotropi ruang*.

Isotropi dalam hal ini mempunyai arti bahwa sifat suatu sistem mekanis tertutup yang seluruhnya dirotasikan di dalam ruang tidak akan mengalami perubahan. Untuk itu perhatikan rotasi yang sangat kecil tak berhingga suatu sistem dan akan dibuktikan setelah benda mengalami rotasi, fungsi Lagrange benda tidak mengalami perubahan. (Misalkan rotasi dilakukan dengan sudut sebesar  $\delta\phi$  searah jarum jam).

Selanjutnya akibat rotasi demikian terdapat penambahan vektor jari-jari suatu titik massa terhadap titik acuan. Pergeseran linier ujung vektor jari-jari dapat dinyatakan dalam relasi sebagai berikut  $|\delta\mathbf{r}| = r \sin \Theta \delta\phi$  (lihat gambar [5]). Vektor  $\delta\phi$  tetap terletak tegak lurus terhadap  $\mathbf{r}$  dan  $\delta\phi$   $x, y, z$ .

*Kecepatan*

didefinisikan

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

yaitu vektor perubahan posisi partikel setiap saat. Biasanya ditulis  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ .

*Percepatan*

didefinisikan

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

yaitu vektor perubahan kecepatan partikel setiap saat. Biasanya ditulis  $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$

Bagaimana menyatakan posisi sistem yang terdiri dari  $N$  titik massa ? Posisi masing-masing partikel mempunyai 3 komponen koordinat ( $x, y, z$ ). Maka dalam sistem yang mengandung  $N$  partikel akan terdapat  $3N$  komponen vektor posisi  $3N$  disebut *derajat kebebasan* sistem yaitu jumlah besaran sistem yang saling tidak bergantung pada besarnya bilangan menyatakan posisi masing-masing partikel pada arah sumbu koordinat.

Besaran ini tidak harus dinyatakan dalam koordinat cartesian; sistem koordinat dapat dipilih sesuai dengan persoalan yang dihadapi, agar persoalan lebih mudah diselesaikan membentuk luasan. Maka berlaku

$$\delta \mathbf{r} = [\delta \varphi \cdot \mathbf{r}]^1 \quad (9.1)$$

Dengan merotasikan sistem tidak hanya vektor jari-jari yang mengalami perubahan, tetapi juga kecepatan semua partikel; untuk itu harus dilakukan transformasi koordinat dengan cara seperti biasa. Dengan demikian, akan diperoleh pertambahan kecepatan dibanding dengan

kecepatan terhadap sistem koordinat acuan semula

$$\delta \mathbf{v} = [\delta \varphi \cdot \mathbf{v}] \quad (9.2)$$

Kemudian pernyataan di atas disubstitusikan ke dalam fungsi Lagrange dan menghasilkan perbedaan sebagai berikut

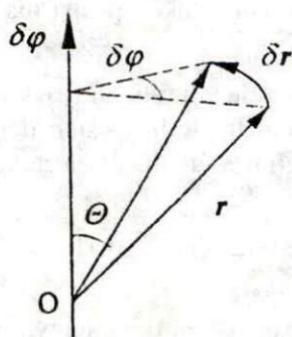
$$\delta L = \sum_a \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \delta \mathbf{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \delta \mathbf{v}_a \right) = 0$$

dan tuliskan  $\mathbf{v}_a$  dalam definisi  $\mathbf{p}_a$  dan turunan  $\partial L / \partial \mathbf{r}_a$  berdasarkan persamaan Lagrange ditulis sebagai  $\dot{\mathbf{p}}_a$  maka diperoleh

$$\sum_a (\dot{\mathbf{p}}_a [\delta \varphi \cdot \dot{\mathbf{p}}_a] + \mathbf{p}_a [\delta \varphi \cdot \mathbf{v}_a]) = 0$$

atau dengan menukarkan secara siklik faktor  $\delta \varphi$  yang terdapat di dalam tanda kurung

$$\delta \varphi \sum_a ([\mathbf{r}_a \dot{\mathbf{p}}_a] + [\mathbf{v}_a \mathbf{p}_a]) = \delta \varphi \frac{d}{dt} \left( \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] \right) = 0$$



Gambar 5:

- 1) tanda kurung [ ] berarti sebagai perkalian vektor, biasanya ditulis sebagai *cross product* dengan tanda x dan ditulis tanpa tanda kurung.

Dalam hal ini haruslah berlaku untuk sembarang  $\delta\phi$  sehingga

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_a [r_a p_a] \right) = 0$$

Dengan demikian, diperoleh hasil bahwa dalam suatu gerak sistem mekanis tertutup terdapat vektor

$$M = \sum_a [r_a p_a] \quad (9.3)$$

yang selalu tetap. Vektor ini selanjutnya disebut sebagai *momentum angular* dari sistem. Panambahan vektor ini tidak bergantung pada momentum linier antara sistem terdapat interaksi atau tidak.

Dengan demikian, semua integral gerak telah dibahas dengan tuntas berlaku untuk setiap sistem tertutup yang termasuk pada §3.2 secara keseluruhan energi, 3 komponen momentum linier dan momentum angular.

Definisi momentum angular berawal dari vektor jari-jari partikel, sehingga momentum angular akan bergantung pada pemilihan titik tangkap (titik acuan) vektor jari-jari. Antara jari-jari  $r_a$  dan  $r'_a$ , masing-masing berjarak  $a$  terhadap satu titik acuan yang sama, terdapat hubungan  $r_a = r'_a + a$ . Maka didapat

$$M = \sum_a [r_a p_a] = \sum_a [r'_a p_a] + [a \sum_a p'_a]$$

atau

$$M = M' + [a P]. \quad (9.4)$$

Dari rumusan ini dapat terlihat bahwa suatu sistem keseluruhan berada dalam keadaan diam ( $P = 0$ ) hanya jika momentum angular tidak bergantung pada pemilihan titik tangkap (titik acuan). Dari hukum kekekalan momentum angular keadaan yang tidak menentu demikian tentunya tidak akan ada karena momentum linier suatu sistem mekanis tertutup merupakan besaran kekal (integral gerak).

Selanjutnya akan diturunkan rumusan yang menghubungkan momentum angular yang berasal dari dua sistem inersial *dan K'*. Anggap bahwa sistem inersial kedua *K'* bergerak relatif terhadap *K* dengan kecepatan *V*. Misalnya, sistem inersial *K* dan *k'* dalam waktu pengamatan ini berada pada titik yang sama. Maka vektor jari-jari partikel dalam kedua sistem adalah sama dan kecepatannya berlaku hubungan  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$ . Dengan demikian, diperoleh

$$\mathbf{M} = \sum_a m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{v}_a] + \sum_a m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{V}]$$

Penjumlahan suku pertama pada ruas kanan merupakan  $\mathbf{M}'$  di sistem inersial *K'* jika penjumlahan suku kedua pada ruas kanan dari titik berat dengan memandang kembali pers. [8.3], maka didapat

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mu [\mathbf{R} \mathbf{V}] \quad (9.5)$$

Pers. [9.5] merupakan persamaan transformasi dari momentum angular yang berasal dari suatu sistem uniersial ke sistem inersial lainnya dan muncul dengan analogi momentum linier dan energi dari pers. [8.1] dan [8.5]. Jika pada sistem inersial *K'* sistem mekanis tertutup dalam keadaan diam, *V* haruslah merupakan kecepatan titik beratnya dan  $\mu \mathbf{V}$  adalah momentum angular totalnya *P* (dihitung dari sistem inersial *K*). didapat

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{R} \mathbf{P}] \quad (9.6)$$

Dengan perkataan lain, momentum angular  $\mathbf{M}$  merupakan momentum angular karakteristik atau sebagai momentum angular sistem dengan titik berat berada dalam keadaan diam bersama-sama dengan  $[\mathbf{R} \mathbf{P}]$ , yang dari gerak sistem keseluruhan berada dalam keadaan diam.

Untuk setiap 3 komponen momentum angular (terhadap titik acuan sembarang) hanya berlaku hukum kekekalan untuk sistem tertutup; pada sistem terbatas atau juga pada sistem yang berada di dalam medan gaya luar.

Penurunan di atas terlihat bahwa proyeksi momentum angular

pada sumbu simetri medan yang ada adalah tetap diperoleh, dalam hal ini sifat mekanis dari sistem yang mengalami rotasi sembarang tetap tidak berubah. Selain itu, momentum angular haruslah mempunyai satu titik tangkap (titik acuan atau titik awal koordinat) yang terletak pada sumbu tersebut.

Persoalan yang terpenting, yaitu momentum angular terdapat di dalam medan simetri bola, dengan energi potensial hanya bergantung pada jarak terhadap titik pusat. Rotasi yang terdapat di dalam medan demikian proyeksi momentum angular tetap berada pada sumbu sembarang yang melalui sumbu. Dengan perkataan lain, momentum angular  $M$  merupakan besaran kekal (konstanta gerak), jika didefinisikan melalui titik pusat dari medan. Akan tetapi, tidak merupakan konstanta gerak jika didefinisikan terhadap titik sebarang yang terdapat di dalam ruang.

Contoh lain, suatu medan homogen yang terdapat sepanjang sumbu  $z$ , padanya proyeksi momentum angular  $M_z$  merupakan konstanta gerak walaupun dipilih titik acuan secara sembarang.

Patut pula dicatat bahwa proyeksi momentum angular pada sembarang sumbu (misalnya dalam hal ini sumbu  $z$ ) dapat diketahui dengan menurunkan fungsi Lagrange dengan rumusan

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a} \quad (9.7)$$

dalam hal ini koordinat sudut putar  $\varphi$  terdapat di sekitar sumbu  $z$ . Hal ini diperoleh berdasarkan karakter momentum angular yang telah diturunkan di atas; tetapi tentunya dapat pula dibuktikan secara langsung. Dalam koordinat selinder  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  diperoleh dengan mensubstitusikan  $x_a = r_a \cos \varphi$ ,  $y_a = r_a \sin \varphi$  dan  $z = z$ :

$$M_z = \sum_a m_a (x_a \dot{y}_a - y_a \dot{x}_a) = \sum_a m_a r_a^2 \dot{\varphi}_a \quad (9.8)$$

Selain itu, diperoleh pula fungsi Lagrange dalam variable-variable tersebut.

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{r}_a^2 + r_a^2 \dot{\varphi}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U$$

Jika disubstitusikan ke pers. [9.7] akan diperoleh kembali pers [9.8]

**Contoh 7:** Tentukan momentum angular dalam sistem koordinat cartesian dan hitung harganya dalam koordinat selinder

**Penyelesaian:**

$$M_z = m \sin \varphi (r\dot{z} - z\dot{r}) - m r z \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$M_y = m \cos \varphi (z\dot{r} - r\dot{z}) - m r z \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$M_r = m r^2 \dot{\varphi}$$

$$M^2 = m^2 r^2 \dot{\varphi}^2 (r^2 + z^2) + m^2 (r\dot{z} - z\dot{r})^2$$

**Contoh 8:** Tentukan momentum angular dalam sistem koordinat cartesian dan hitung harganya dalam koordinat bola

**Penyelesaian:** Dengan cara yang sama diperoleh komponen momentum angular dalam koordinat bola

$$M_z = -m r^2 (\dot{\Theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \Theta \cos \Theta \cos \varphi)$$

$$M_y = m r^2 (\dot{\Theta} \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \Theta \cos \Theta \sin \varphi)$$

$$M_x = m r^2 \sin^2 \Theta \cdot \dot{\varphi}$$

$$M^2 = m^2 r^2 \dot{\varphi}^2 (\Theta^2 + \sin^2 \Theta \cdot \dot{\varphi}^2).$$

**Contoh 9:** Momentum  $P$  dan momentum angular  $M$  yang mana saja akan tetap pada gerak rotasi dalam medan gaya berikut

a) Medan di atas bidang datar homogen tak berhingga.

**Penyelesaian:**  $P_x$ ,  $P_y$  dan  $M_z$  (bidang tak berhingganya adalah bidang  $x - y$ )

b) Medan simetri selinder homogen.

**Penyelesaian:**  $M_z$ ,  $P_z$  (sumbu selinder dipilih sumbu  $z$ )

c) Medan berbentuk piramida homogen.

**Penyelesaian:**  $P_z$  (sisi pirisma paralel terhadap sumbu z).  
d) Medan dari dua titik

**Penyelesaian**

$M_z$  (titik terdapat pada sumbu z)  
e) Medan dalam kerucut homogen.

**Penyelesaian:**  $P_y$  (setengah permukaan tak berhingganya berada bidang z-y yang dibatasi oleh sumbu y)

f) Medan suatu cincin lingkaran homogen.

**Penyelesaian:**  $M_z$  (sumbunya sama dengan sumbu z).

g) Medan suatu spiral homogen tak berhinga.

**Penyelesaian** Fungsi Lagrange tidak mengalami perubahan karena rotasi dari garis spiral (sumbu z) dengan sudut  $\delta\varphi$  dengan pergeseran terjadi sepanjang sumbu ini dengan lintasan  $h/2\pi dj$  (h adalah tinggi garis spiral). Dengan demikian,

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L}{\partial \varphi} \delta \varphi = \left( \dot{P}_z \frac{h}{2\pi} + \dot{M}_z \right) \delta \varphi$$

kemudian didapat pula

$$M_z + \frac{h}{2\pi} P_z = \text{konstan}$$

## 10. Kemiripan Mekanika

Perkalian fungsi Lagrange dengan suatu konstanta sembarang tidak akan mengubah persamaan gerak. Sifat ini memberikan kemungkinan kunci-kunci penting untuk memperoleh sifat-sifat gerak tanpa menintegrasikan persamaan gerak secara eksplisit.

Dalam hal ini terdapat kasus-kasus khususnya untuk energi potensial yang merupakan fungsi homogen koordinat sehingga berlaku:

$$U(\alpha \mathbf{r}_1, \alpha \mathbf{r}_2, \dots, \alpha \mathbf{r}_n) = \alpha^k U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n). \quad (10.1)$$

$\alpha$  pada persamaan di atas adalah konstanta sembarang dan  $k$  adalah bilangan yang menyatakan derajat homogenitas fungsi.

Selanjutnya diperkenalkan suatu transformasi dengan mengalikan koordinat dengan konstanta  $\alpha$  dan waktu dengan konstanta  $\beta$  sekaligus

$$r_a \rightarrow \alpha r_a, \quad t \rightarrow \beta t.$$

Sehingga semua kecepatan  $v_a = dr_a/dt$  akan mengandung faktor  $\alpha/\beta$ , energi kinetik mengandung faktor  $\alpha^2/\beta^2$  dan energi potensial mempunyai faktor  $\alpha^k$ . Jika  $\alpha$  dan  $\beta$  ditentukan melalui syarat sebagai berikut

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k, \quad \text{dengan} \quad \beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}}$$

fungsi Lagrange setelah mengalami transformasi ini akan mengandung  $\alpha^k$ , atau berarti pula bahwa persamaan gerak tidak mengalami perubahan.

Mengalikan semua koordinat partikel dengan faktor konstanta yang sama, menyebabkan partikel akan berada pada lintasan baru, yang secara geometris adalah mirip dengan lintasan lamanya dan kedua lintasan tersebut mempunyai hubungan linier. Hal ini menyebabkan munculnya keuntungan tersendiri. Jika energi potensial suatu sistem merupakan fungsi homogen dari  $k$  derajat dari koordinat (misalnya koordinat cartesian), maka lintasan gerak sistem akan mempunyai kemiripan, dengan perbedaan waktu (antara titik-titik pada lintasan) mempunyai kelakuan sebagai berikut

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}} \quad (10.2)$$

dengan  $l'/l$  adalah perbandingan linier jarak antara dua lintasan. Juga perbandingan besaran mekanis lainnya, selain waktu, pada lintasan dan waktu yang sama akan mengandung pangkat tertentu dari perbandingan  $l'/l$ . Untuk besaran kecepatan, energi dan momentum angular, misalnya

$$\begin{aligned} \frac{v'}{v} &= \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}}, \\ \frac{E'}{E} &= \left(\frac{l'}{l}\right)^k, \\ \frac{M'}{M} &= \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+\frac{k}{2}} \end{aligned} \quad (10.3)$$

Untuk lebih jelas lihat beberapa contoh dibawah ini.

Seperti yang akan terlihat nantinya, energi potensial untuk kasus getaran kecil merupakan fungsi dari koordinat kuadrat ( $k = 2$ ). Dari pers. [10.2] diperoleh bahwa periode tidak bergantung pada amplitudo.

Kasus partikel yang bergerak di dalam medan gaya, energi potensial adalah fungsi linier dari koordinat (lihat pers. [5.8], atau,  $k = 1$ ). Dari pers. [10.2] diketahui

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{l'}{l}}$$

Dari hubungan ini dapat diketahui bahwa sebuah benda yang jatuh bebas kuadrat waktu jatuh, adalah sama dengan tinggi atau jarak yang ditempuh benda.

Interaksi tarik menarik Newton antara dua masa atau interaksi Coulomb antara dua muatan yang berbeda tanda, energi potensial adalah berbanding terhadap terbalik koordinat, atau dengan perkataan lain energi potensial sebagai fungsi homogen berderajat  $k = -1$  terhadap koordinat. Untuk kedua kasus ini maka

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{3}{2}}$$

dan dari rumusan ini dapat diramalkan bahwa kuadrat waktu lintasan partikel adalah sama dengan pangkat tiga jarak antara kedua partikel yang berinteraksi (hukum Kepler III).

Jika gerak suatu sistem mempunyai energi potensial dalam suatu daerah tertentu sebagai fungsi homogen koordinatnya, terdapat suatu hubungan sederhana antara energi kinetik dan potensial rata-rata terhadap waktu; hubungan atau relasi ini dikenal dengan nama *kaedah virial*.

Oleh karena itu, energi kinetik sebagai fungsi kecepatan kuadrat, berdasarkan teorema Euler berlaku

$$\sum_a \frac{\partial T}{\partial v_a} v_a = 2T$$

atau dinyatakan dalam momentum  $\partial T / \partial v_a = p_a$ :

$$2T = \sum_a p_a v_a = \frac{d}{dt} \left( \sum_a p_a r_a \right) - \sum_a r_a \dot{p}_a \quad (10.4)$$

Selanjutnya pers [10.4] dirata-ratakan terhadap waktu. Harga rata-rata terhadap suatu fungsi sembarang  $f(t)$  didefinisikan sebagai berikut

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt$$

Dengan sederhana dapat pula dilihat bahwa perata-rataan terhadap waktu fungsi  $f(t)$  akan sama dengan nol, jika fungsi ini merupakan suatu turunan terhadap waktu suatu fungsi  $F(t)$  (yaitu suatu fungsi yang tidak mempunyai harga tidak tak terhingga). Maka didapat

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dF}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0$$

Diasumsikan bahwa sistem bergerak di suatu daerah di dalam ruang (terbatas) dengan kecepatan yang tidak mempunyai harga tak berhingga. Maka hanya tinggal besaran  $\sum r_a p_a$ , harga rata-rata suku pertama pada ruas kanan pers [10.4] adalah sama dengan nol. Pada ruas kanan terdapat  $p_a$  yang menurut persamaan Newton dapat digantikan dengan  $-\partial U / \partial r_a$

$$2\bar{T} = \overline{\sum_a r_a \frac{\partial U}{\partial r_a}} \quad (10.5)$$

2) Pernyataan pada ruas kanan pers. [10.5] untuk sementara sebagai virial dari sistem

Jika energi potensial merupakan fungsi homogen dari  $r$ , berderajat  $k$ , pers. [10.5] dapat berdasarkan teorema Euler dapat diubah menjadi

$$2\bar{T} = k\bar{U} \quad (10.6)$$

Karena  $\bar{T} + \bar{U} = \bar{E} = E$ , relasi pada pers [10.6] dapat pula dinyatakan dalam pernyataan

$$\bar{U} = \frac{2}{k+2} E, \quad \bar{T} = \frac{k}{k+2} E, \quad (10.7)$$

yang menghubungkan  $\bar{T}$  dan  $\bar{U}$  dengan energi total  $E$ .

Untuk getaran kecil ( $9k = 2$ ), misalnya terdapat hubungan

$$\bar{T} = \bar{U}$$

berarti bahwa energi kinetik rata-rata adalah sama dengan energi potensial sistem. Untuk interaksi Newton atau interaksi gravitasi ( $k = -1$ ) berlaku:

$$2\bar{T} = -\bar{U}$$

sehingga untuk kasus ini  $E = -\bar{T}$ , sesuai dengan interaksi seperti ini hanya berlangsung di dalam ruang terbatas, yaitu energi berharga negatif (lihat §4.5).

**Contoh 10:** Bagaimana perbandingan waktu dari titik-titik yang bermassa berbeda sepanjang lintasan yang sama?

*Penjelasan*

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{m'}{m}}$$

**Contoh 10:** Dari soal di atas cari perubahan waktu terhadap energi potensial sepanjang lintasan yang sama!

*Penjelasan*

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{U}{U'}}$$

## Bab III

# Integrasi Persamaan Gerak

### 11 Gerak Satu Dimensi

Gerak sebuah partikel dengan satu derajat kebebasan disebut *gerak satu dimensi*. Bentuk umum fungsi Lagrange sistem seperti ini mempunyai kondisi luar satu-satunya adalah

$$L = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - U(q) \quad (11.1)$$

$a(q)$  adalah suatu fungsi koordinat diperumum  $q$ . Jika  $q$  merupakan koordinat cartesian (misalnya  $x$ ), berlaku

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \quad (11.2)$$

Persamaan gerak yang berhubungan dengan fungsi Lagrange di atas dapat dicari dengan mengintegrasikan. Untuk itu tidak perlu mencari persamaan gerak, tetapi dapat dicari integral pertamanya, yaitu mengintegrasikan persamaan yang dinyatakan dalam energi. Fungsi Lagrange pers. [11.2] dapat dinyatakan dalam energi sebagai berikut:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E$$

Persamaan ini tidak lain merupakan persamaan diferensi orde pertama, yang dapat diintegrasikan melalui separasi variabel. Selanjutnya integrasi dicari sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}$$

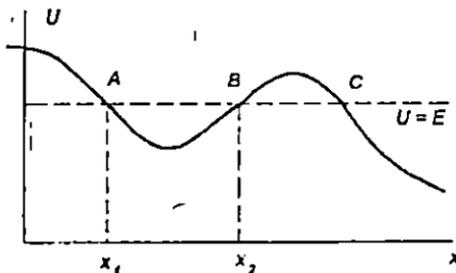
sehingga didapat

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + \text{konstanta} \quad (11.3)$$

Untuk menyelesaikan pers. [11.3] adalah  $E$  dan konstanta integrasi (konstanta) berperan penting.

Oleh karena itu, energi kinetik merupakan besaran yang secara definitif berharga positif, energi total sistem akan selalu lebih besar dari energi potensialnya, berarti pula bahwa gerak hanya berlangsung pada daerah tertentu di mana  $U(x) < E$ .

Misalnya, energi potensial  $U(x)$  mempunyai bentuk seperti digambarkan pada gambar [6]. Jika dibuat garis lurus horizontal pada kurva energi potensial, yang menyatakan energi total sistem  $E$ , gerak di dalam daerah tersebut langsung dapat terlihat. Pada gambar [4.1] terlihat bahwa lintasan gerak adalah  $AB$  dan daerah sebelah kanan dari  $C$ .



Gambar 6:

Titik energi potensial sama dengan energi total

$$U(x) = E \quad (11.4)$$

adalah menentukan batasan (*constrain*) dari gerak. *Titik balik* adalah titik arah kecepatan partikel berubah tanda. Apabila kedua sisi daerah gerak dibatasi oleh titik tersebut, partikel dikatakan bergerak dalam daerah terbatas; atau disebut juga *finite*. Jika daerah gerak tidak terbatas atau hanya terdapat satu titik batas, gerak disebut sebagai *ifinite*, partikel dikatakan bergerak ke tempat tak berhingga.

Gerak terbatas (*finite*) satu dimensi contohnya getaran, partikel mengalami gerak periodik antara dua titik batas (pada gambar [6] terlihat pada "lembah potensial"  $AB$  antara titik  $c_1$  dan  $c_2$ ). Dalam hal ini, berdasarkan sifat dapat balik (*reversibilitas*) waktu yang dibutuhkan untuk melintasi jarak dari  $x_1$  ke  $x_2$  adalah sama dengan waktu tempuh partikel dari  $x_2$  ke  $x_1$ . Kemudian partikel bergerak ke arah sebaliknya, sama dengan waktu untuk menempuh dua kali jarak dari  $x_1$  ke  $x_2$  berdasarkan pers. [11.3] diperoleh:

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (11.5)$$

Harga  $x_1$  dan  $x_2$  untuk batas integral di atas dapat dicari sebagai akar dari pers. [11.4] untuk harga energi  $E$  tertentu. Rumusan ini menghasilkan periode getaran suatu partikel sebagai fungsi energi.

**Contoh 12:** Hitunglah periode suatu getaran bandul matematis (sebuah titik massa  $m$  dikatakan di salah satu ujung tali yang panjang  $l$ , sedangkan ujung lainnya diikat pada titik tetap) sebagai fungsi amplitudo getaran!

**Penyelesaian:** Energi total bandul adalah

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - m g l \cos \varphi = -m g l \cos \varphi_0$$

dengan  $\varphi$  adalah simpangan sudut yang dibentuk oleh tali terhadap bidang vertikal dan  $\varphi_0$  dianggap sebagai harga simpangan sudut maksimum. Periode gerak ini adalah sama dengan empat kali waktu yang dicari dengan batas integral dari 0 hingga  $\varphi_0$ , maka didapat

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

Dengan mensubstitusikan

$$\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} = \sin \zeta$$

maka integral di atas menjadi:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K \left( \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \right)$$

sehingga

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}$$

yang tidak lain merupakan integral eliptik orde pertama. Pada  $\sin \varphi_0/2 \approx \varphi_0/2 \ll 1$  (getaran kecil), diperoleh fungsi  $K(k)$  sebagai deret

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2 + \dots \right)$$

Suku pertama ruas kanan persamaan di atas sesuai dengan rumusan mendasar dari persamaan ini.

**Contoh 13:** Hitunglah periode suatu getaran kecil yang tergantung energi untuk sebuah partikel bermassa  $m$  di dalam medan dengan energi potensial

$$a) U = A|x|^n$$

**Penyelesaian:**

$$T = 2\sqrt{2m} \int_0^{(E/A)^{1/n}} \frac{dx}{\sqrt{E - Ax^n}} = \frac{2\sqrt{2m} E^{1/n-1/2}}{A^{1/n}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^n}}$$

Dengan mensubstitusikan  $y^n = U$  maka integral dapat diubah menjadi fungsi beta dari Euler yang dinyatakan dalam fungsi  $T$ . Apabila hal ini dilakukan didapat

$$T = \frac{2\sqrt{2m} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n A^{1/n} \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)} E^{\frac{1}{n} - \frac{1}{2}}.$$

Ketergantungan  $T(E)$  sesuai dengan hukum kemiripan mekanis yang dinyatakan pada pers. [10.2], [10.3].

b)  $U = -U_0 / \cosh^2 \alpha x$  dengan  $-U_0 < E < 0$ .

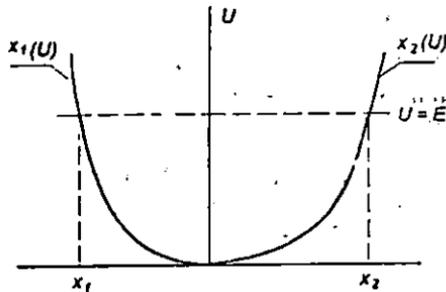
**Penyelesaian**

$$T = \frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{|E|}}.$$

c)  $U = U_0 \tan^2 \alpha x$ .

**Penyelesaian**

$$T = \frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{E + U_0}}.$$



Gambar 7:

## 12. Penentuan Energi Potensial dari Periode Getaran

Dalam pembahasan ini akan dibicarakan berapa jauh energi potensial  $U(x)$  suatu medan gaya partikel dianggap mengalami getaran dengan periode  $T$  dan energi  $E$  diketahui. Secara matematis mencari potensial berarti menyelesaikan persamaan diferensial pers [11.5], dengan menganggap  $U(x)$  sebagai besaran atau variabel yang dicari dan  $T(E)$  sebagai fungsi yang telah diketahui.

Untuk membahas persoalan ini dari awal besaran  $U(x)$  yang terdapat di dalam ruang tertentu mempunyai harga minimum dan untuk itu tidak perlu diperhatikan apakah persamaan diferensial mempunyai penyelesaian lain yang tidak memenuhi kondisi ini. Untuk menyederhanakan persoalan ini  $U(x)$  mempunyai harga minimum di titik acuan koordinat (titik nol) sehingga harga potensial di daerah minimum ini dapat digantikan dengan nol (lihat gambar [7]).

Integral pada pers. [11.5] direformulasikan, yaitu dengan memandang  $x$  sebagai fungsi  $U$ . Fungsi  $x(U)$  mempunyai arti ganda; setiap satu harga energi potensial mempunyai dua harga  $x$  berbeda. Untuk mereformulasikan pers. [11.5]  $dz$  digantikan dengan  $(dz/dU)dU$  dan ditulis dalam bentuk penjumlahan dua integral (satu harga potensial mempunyai dua harga  $x$ ) integral pertama berawal dari  $x = x_1$  hingga  $x = 0$  dan integral kedua mulai dari  $x = 0$  hingga  $x = x_2$ ; fungsi  $x(U)$  dalam daerah tersebut ditulis dalam bentuk  $x_1(U)$  dan  $x_2(U)$ .

Batas integrasi dilakukan mulai dari 0 dan  $E$  sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} T(E) &= \sqrt{2m} \int_0^E \frac{dx_2(U)}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}} + \sqrt{2m} \int_E^0 \frac{dx_1(U)}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}} \\ &= \sqrt{2m} \int_0^E \left( \frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU} \right) \frac{dU}{\sqrt{E-U}} \end{aligned}$$

Pembagian kedua sisi dalam persamaan di atas digantikan dengan  $\sqrt{\alpha - E}$ , dengan  $\alpha$  sebagai parameter dan integrasi terhadap  $E$  dari 0 ke  $\alpha$  menghasilkan

$$\int_0^{\alpha} \frac{T(E) dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \sqrt{2m} \int_0^{\alpha} \int_0^E \left( \frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU} \right) \frac{dE}{\sqrt{(\alpha - E)(E - U)}}$$

atau dengan menukar urutan integrasi

$$\int_0^{\alpha} \frac{T(E) dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \sqrt{2m} \int_0^{\alpha} \left( \frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU} \right) \int_0^E \frac{dE}{\sqrt{(\alpha - E)(E - U)}}$$

Integrasi terhadap  $E$  adalah elementer dan harganya sama dengan  $\pi$ .

Selanjutnya integrasi terhadap  $\alpha$  adalah tirival dan memberikan

$$\int_0^{\alpha} \frac{T(E) dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \sqrt{2m} \pi [x_2(\alpha) - x_1(\alpha)]$$

dalam hal ini dianggap bahwa  $x_2(0) = x_1(0) = 0$ . Apabila  $\alpha$  digantikan dengan  $U$ ,

$$[x_2(U) - x_1(U)] = \pi \sqrt{2m} \int_0^U \frac{T(E)}{\sqrt{U - E}} \quad (12.1)$$

Pers. [12.1] mempunyai arti jika  $T(E)$  diketahui, perbedaan  $x_2(U) - x_1(U)$  dapat dihitung. Fungsi  $x_2(U)$  dan  $x_1(U)$  tetap merupakan fungsi yang belum diketahui. Dengan perkataan lain persamaan ini tidak hanya mengandung satu solusi, tetapi terdapat kurva  $U = U(x)$  pada pemberian harga periode dan energi yang ada dan masing-masing dapat dibedakan melalui *deformasi* perbedaan harga  $x$  yang hanya mempunyai satu  $U$ .

Dengan anggapan demikian, maka fungsi  $U = U(x)$  haruslah dipilih sebagai fungsi yang mempunyai simetri di dalam dua daerah yang dipilih atau dengan perkataan lain.

$$x_2(U) = -x_1(U) \equiv x(U)$$

Maka pers. [12.1] dapat ditulis kembali

$$x(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{T(E_i) dE_i}{\sqrt{U-E}} \quad (12.2)$$

### 13. Masa Reduksi

Persoalan penting gerak suatu sistem adalah persoalan gerak dua titik massa saling berinteraksi satu sama lainnya (*persoalan dua benda*). Dalam pembahasan ini akan dicari cara penyelesaiannya.

Sebagai langkah awal untuk menyelesaikan persoalan, ini ditunjukkan bagaimana persoalan dapat dirumuskan lebih sederhana dengan jalan mentransformasikan gerak relatif ke dalam gerak titik pusat massa sistem.

Energi potensial interaksi dua partikel hanya bergantung pada jarak pisah antara keduanya, atau dengan perkataan lain bergantung pada selisih jari-hari vektor kedua posisi benda terhadap titik acuannya. Dengan demikian fungsi Lagrange sistem ini dapat ditulis.

$$L = \frac{m_1 \dot{r}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{r}_2^2}{2} - U(|r_1 - r_2|) \quad (13.1)$$

Misalnya jarak relatif antara kedua titik massa adalah

$$r = r_1 - r_2$$

dan tempatkan titik acuan semula ke titik pusat mass, sehingga diperoleh

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0$$

Dari dua persamaan terakhir didapat hubungan

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \quad r_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} r. \quad (13.2)$$

Substitusikan pers. [13.2] ke pers. [13.1] maka

$$L = \frac{m \dot{r}^2}{2} - U(r), \quad (13.3)$$

dengan

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (13.4)$$

disebut sebagai *massa reduksi*. Pers. [13.3] adalah analog dengan fungsi Lagrange untuk gerak sebuah partikel bermassa  $m$  di dalam medan dengan energi potensial  $U(r)$  yang mempunyai simetri bola terhadap titik acuan yang tetap.

Dengan cara ini gerak dua benda yang saling mengalami interaksi dapat dianalogikan dengan gerak sebuah partikel di dalam medan gaya dengan energi potensial  $U(r)$ . Dengan mencari penyelesaian  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  akan diperoleh kembali persamaan lintasan  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$  dan  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$ . Untuk masing-masing partikel  $m_1$  dan  $m_2$  (terhadap titik massa keduanya) dari pers. [12.2].

**Contoh 14:** Sebuah sistem bermassa  $M$  dan  $n$  partikel bermassa  $m$ . Eliminasi gerak menjadi gerak titik pusat massa dan cari persamaan gerak untuk masing-masing  $n$  partikel!

**Penyelesaian:** Misalnya,  $\mathbf{R}$  adalah vektor jari-jari partikel  $M$  dan  $\mathbf{R}_a$  ( $a = 1, 2, \dots, n$ ) adalah jari-jari partikel bermassa  $m$ . Jarak antara partikel bermassa  $m$  dan  $M$  adalah

$$r_a = R_a - R,$$

dan transformasikan titik awal koordinat ke titik massa sistem:

$$M \mathbf{R} + m \sum_a \mathbf{R}_a = 0$$

Dari persamaan di atas diperoleh:

$$R = -\frac{m}{\mu} \sum_a r_a \quad R_a = R + r_a, \quad \mu = M + n m$$

Kemudian substitusikan pernyataan terakhir ke dalam fungsi Lagrange

$$L = \frac{M\dot{R}^2}{2} + \frac{m}{2} \sum_a \dot{R}_a^2 - U$$

diperoleh

$$L = \frac{m}{2} \sum_a v_a^2 - \frac{m^2}{2\mu} \left( \sum_a v_a \right)^2 - U, \quad v_a = \dot{r}_a$$

Energi potensial hanya bergantung pada jarak antara partikel yang berinteraksi sehingga dalam kasus ini hanya sebagai fungsi  $r_a$ .

## 14. Gerak dalam Medan Sentral

Dalam pembahasan gerak dua partikel saling berinteraksi telah dijelaskan bahwa gerak tersebut dapat direpresentasikan dalam analogi gerak sebuah partikel di dalam medan gaya luar, dengan energi potensial yang hanya bergantung pada jarak  $r$  terhadap satu titik tertentu medan gaya seperti itu disebut sebagai *medan sentral*.

$$F = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} \frac{r}{r}$$

yang bekerja pada partikel dan medan juga hanya bergantung pada jarak  $r$ , arah setiap saatnya adalah sama dengan arah vektor jari-jari  $r$ . Seperti telah diketahui pada § 9, gerak di dalam medan sentral dengan momentum angular sistem terpusat pada satu titik pusat gerak merupakan konstanta gerak. Momentum angular tiap partikel adalah

$$M = [rp]$$

Dalam hal ini vektor  $M$  dan  $r$  terletak saling lurus satu sama lain pada gerak partikel vektor jari-jarinya tetap berada pada bidang datar yang terletak tegak lurus terhadap  $M$ .

Lintasan gerak partikel di dalam medan gaya sentral terletak pada bidang datar. Jika sistem koordinat partikel dipilih koordinat pola  $r$ ,  $\varphi$  dengan titik acuan berada di pusat medan gaya, akan diperoleh fungsi Lagrange dalam bentuk

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r) \quad (14.1)$$

Fungsi ini akan mengandung koordinat  $\varphi$  tidak dalam bentuk eksplisit. Setiap koordinat dipermumum  $q_i$  yang tidak keluar secara eksplisit dalam fungsi Lagrange disebut sebagai siklik. Untuk fungsi Lagrange yang mengandung koordinat siklik demikian, persamaan Lagrange dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

berarti bahwa momentum dipermumum  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$  juga merupakan konstanta atau integral gerak. Kenyataan ini, bahwa dengan adanya koordinat siklik, menyebabkan bentuk persamaan gerak menjadi sangat sederhana sehingga mudah diselesaikan.

Dalam kasus ini momentum dipermumum adalah

$$p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi}$$

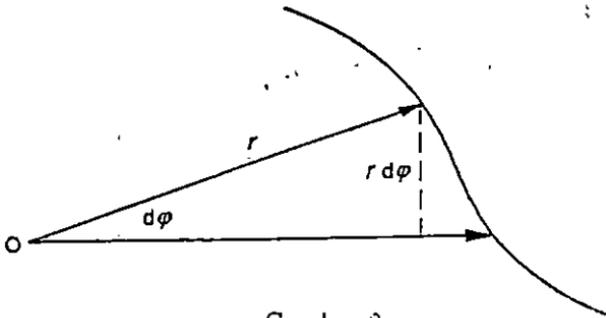
dengan momentum angular  $M_z = M$  (lihat pers (9.7) sehingga dikembalikan pada hukum kekekalan momentum diperoleh bahwa

$$M = m r^2 \dot{\varphi} = \text{konstan} \quad (14.2)$$

Diketahui bahwa gerak sebuah partikel di dalam medan gaya sentral dengan lintasan gerak berada pada bidang datar mempunyai pengertian geometris lebih sederhana. Pernyataan

$$\frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \, d\varphi$$

menggambarkan suatu luas sektor yang terletak antara dua jari-jari vektor yang menghubungkan elemen lintasan partikel dan berada sangat dekat satu sama lain dengan mengapit sudut  $d\phi$  (lihat gbr. [8]).



Gambar 8:

Elemen luas ini disimbolkan oleh  $dA$  dan jika disubstitusikan ke persamaan momentum angular diperoleh

$$m = 2mA \quad (14.3)$$

Turunan dari  $A$  disebut *kecepatan luas*. Hukum kekekalan momentum angular mempunyai arti pula bahwa kecepatan luas adalah konstan: Vektor jari-jari dari titik yang bergerak dalam waktu yang sama akan melintasi daerah perluasan yang sama (hukum Kepler II). Hukum kekekalan momentum angular untuk gerak dalam medan sentral disebut pula sebagai *kaedah* atau *hukum luas lintasan*.

Untuk menyelesaikan persoalan gerak sebuah benda di dalam medan sentral secara tuntas dengan mudah dapat ditempuh dengan menggunakan hukum kekekalan energi dan momentum angular, tanpa harus mencari persamaan gerak terlebih dahulu. Dengan menggantikan  $\phi$  dengan  $M$  pada pers. [4.2] dan mensubstitusikan ke persamaan energi, diperoleh

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + U(r) = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r). \quad (14.4)$$

Dengan demikian diperoleh, vektor kecepatan sebagai berikut

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}} \quad (14.5)$$

dan melalui integrasi dengan pemisahan variabel didapat persamaan

$$t = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + \text{konstanta.} \quad (14.6)$$

Jika pers. [14.2] ditulis dalam bentuk

$$d\varphi = \frac{M^2}{mr^2} dt$$

dan  $dt$  diperoleh dari pers. [14.5], dengan mensubstitusikan dan mengintegrasikan diperoleh

$$\varphi = \left( \frac{\frac{M^2}{r^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} \right) + \text{konstanta} \quad (14.7)$$

Rumus pada pers. [14.6] dan [14.7] adalah penyelesaian umum dari persoalan ini. Rumusan kedua menghubungkan  $r$  dan  $\varphi$ , atau dengan perkataan lain merupakan persamaan lintasan. Pers. [14.6] menentukan ketergantungan waktu secara eksplisit terhadap jarak  $r$  dari partikel yang bergerak terhadap titik pusat. Patut diketahui pula bahwa  $\varphi$  akan berubah secara monoton terhadap waktu; karena dari pers. [14.2] diketahui bahwa tanda  $\dot{\varphi}$  tidak akan pernah mengalami perubahan.

Pers. [14.4] menunjukkan bahwa suku (bagian) radial dari gerak 1 dimensi di dalam medan gaya energi potensial.

$$U_{\text{ef}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (14.8)$$

dapat diamati. Bersamaan  $M^2/2mr^2$  disebut sebagai gaya sentrifugal. Harga  $r$  padanya adalah

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E \quad (14.9)$$

menentukan batas daerah gerak. Jika pers. [14.9] dipenuhi, komponen kecepatan radial  $r = 0$ .

Hal ini tidak berarti bahwa partikel berada dalam keadaan diam

(seperti gerak partikel pada 1-dimensi) karena kecepatan sudut  $\dot{\phi}$  pada umumnya tidak sama dengan nol. Persamaan  $\dot{r} = 0$  menentukan titik balik lintasan, pada titik tersebut fungsi  $r(t)$  mempunyai harga minimum atau maksimum.

Jika daerah  $r$  yang diperbolehkan hanya memenuhi  $r \geq r_{\min}$ , gerak partikel dikatakan tak terbatas (*infinite*) lintasan "datang" dari tempat tak berhingga dan "lenyap" ketempat tak berhingga pula.

Sebaliknya apabila harga  $r$  yang diperbolehkan terletak antara dua harga batas  $r_{\min}$  dan  $r_{\max}$ , sehingga gerak adalah terbatas (*finite*) dan lintasan terletak dalam daerah berbentuk cincin yang terbentuk dari dua lingkaran  $r = r_{\max}$  dan  $r_{\min}$ . Hal ini tidak berarti bahwa lintasan adalah tertutup. Harga  $r$  berubah dari  $r_{\max}$  hingga ke  $r_{\min}$  dan kembali mencapai  $r_{\max}$  lagi, vektor jari-jari mengalami rotasi dalam sudut  $\Delta\phi$  dan berdasarkan pers. [14.7] didapat bahwa

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M^2}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E - U) - \frac{M^2}{r^2}}} \quad (14.10)$$

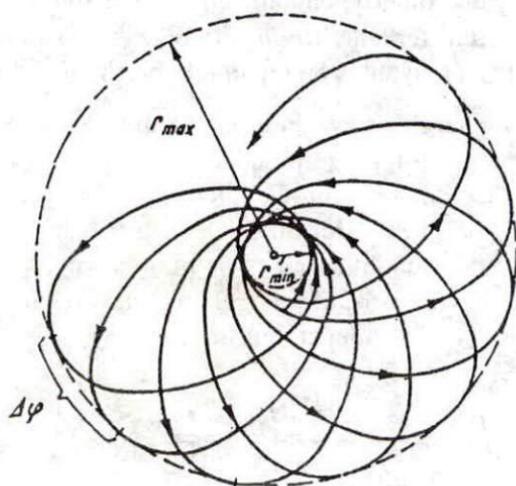
Lintasan hanya membentuk kurva tertutup, jika sudut ini sama dengan rasional dari  $2\pi$ , yaitu  $\Delta\phi = 2\pi(m/n)$ , dengan  $m$  dan  $n$  adalah bilangan bulat. Dengan pengulangan  $n$  kali dari periode gerak vektor jari-jari dari titik  $m$  akan mengelilingi lintasan seluruhnya dan akan bertemu dengan titik semula, atau dengan perkataan lain lintasan membentuk kurva tertutup secara lengkap.

Kejadian semacam ini tentunya adalah satu pengecualian, pada sembarang  $U(r)$  sudut  $\Delta\phi$  bukan merupakan bilangan rasional dari  $2\pi$ . Oleh karena itu, lintasan pada gerak berhingga (*finite*) umumnya tidak tertutup. Untuk kasus ini, misalnya dapat dilihat kurva yang dibentuk pada gbr. [9], permukaan cincin yang dibatasi oleh dua lingkaran akan terbentuk dalam waktu yang tak berhingga lama.

Hanya ada dua macam medan gaya sentral yang mempunyai lintasan gerak berhingga dan tertutup, yaitu medan yang mempunyai energi potensial sebanding dengan  $1/r$  atau  $r^2$ . Kasus pertama ( $U \sim 1/r$ )

dari keduanya akan dibahas pada paragraf selanjutnya, sedangkan kasus kedua ( $U \sim r^2$ ) akan dibicarakan nantinya pada pembahasan osilator harmonik ruang (lihat § 23)

Pada titik balik suku dalam tanda akar berubah tanda (pers. [14.5])



Gambar 9:

integral pada pers. [14.6] dan [14.7]. Jika arah vektor jari-jari suatu titik balik mempunyai harga  $\varphi = 0$ , titik yang mempunyai harga  $[r]$  yang sama, di mana titik balik ini berada dan membentuk potongan lintasan, akan dapat dibedakan apabila tanda  $\varphi$  berbeda, lintasan akan simetri terhadap arah semula. Jika lintasan ditelusuri, misalnya bermula dari  $r = r_{maks.}$  akan dijumpai titik balik selanjutnya pada  $r = r_{min.}$  selanjutnya diperoleh kurva simetris terhadap potongan lintasan pertama hingga ke titik balik selanjutnya pada  $r = r_{maks.}$  Kedua arah gerak akan dibentuk secara berulang-ulang dan terlihat bahwa kurva lintasan akan memenuhi suatu lintasan setengah tertutup (dari  $r_{min.}$  hingga ke  $r_{maks.}$  selanjutnya) untuk membentuk lintasan keseluruhan. Hal yang serupa juga berlaku untuk lintasan tak berhingga, yang mengandung dua cabang simetris yang bergerak dari  $r_{min.}$  ke jarak tak berhingga.

Energi sentrifugal (untuk gerak  $M \neq 0$ ) pada  $r \rightarrow 0$  akan berharga menuju tak berhingga sebanding dengan  $1/r^2$  sehingga dapat dikatakan gerak tidak akan pernah dapat mencapai titik pusat, juga tidak akan terjadi walaupun medan gaya mempunyai karakteristik tarik-menarik. Partikel hanya dapat "jatuh" ke titik pusat jika energi potensial untuk  $r \rightarrow 0$  menurun dengan kecepatan mendekati harga  $-\infty$ .

Dari ketidaksamaan

$$\frac{m \dot{r}^2}{2} = E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} > 0$$

atau

$$r^2 U(r)|_{r \rightarrow 0} + \frac{M^2}{2m} < E r^2$$

diperoleh bahwa  $r$  hanya akan berharga nol jika kondisi

$$r^2 U(r)|_{r \rightarrow 0} < -\frac{M^2}{2m} \quad (14.11)$$

dipenuhi, atau dengan perkataan lain  $U(r)$  harus berharga  $-\alpha/r^2$  dengan  $\alpha = M^2$  menuju  $-\infty$  atau  $-1/r^n$  dengan  $n > 2$ .

**Contoh 15:** Integrasikan persamaan gerak dari bandul sferis (massa  $m$  digantungkan pada seutas tali yang panjangnya  $l$ , massa bergerak pada bidang horizontal membentuk lingkaran atau dengan perkataan lalu lintasan tali di dalam ruang akan membentuk kerucut).

**Penyelesaian:** Dalam koordinat bola dengan titik acuan adalah titik pusat bola dan sumbu polar tegak lurus ke arah bawah, maka fungsi Lagrange sistem bandul ini adalah

$$L = \frac{m l^2}{2} (\dot{\Theta}^2 + \sin^2 \Theta \cdot \dot{\varphi}^2) + mgl \cos \Theta$$

Koordinat  $\varphi$  adalah siklik sehingga momentum diperumum  $p_\varphi$  yang sejajar dengan momentum angular pada sumbu  $z$  adalah konstanta gerak

$$m l^2 \sin^2 \Theta \cdot \dot{\varphi} = M_z = \text{konstan} \quad (1)$$

Untuk energi berlaku:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m l^2}{2} (\dot{\Theta} + \sin^2 \Theta \cdot \dot{\varphi}^2) - m g l \cos \Theta \\ &= \frac{m l^2 \dot{\Theta}^2}{2 m l^2 \sin^2 \Theta} - m g l \cos \Theta \end{aligned} \quad (2)$$

Dalam hal ini dapat ditentukan  $\Theta$  dan dengan separasi variabel diperoleh

$$t = \int \frac{d\Theta}{\sqrt{\frac{2}{m l^2} [E - U_{\text{ef}}(\Theta)]}} \quad (3)$$

Energi potensial efektif dalam hal ini adalah

$$U_{\text{ef}}(\Theta) = \frac{M_z^2}{2 m l^2 \sin^2 \Theta} - m g l \cos \Theta$$

Untuk sudut  $\varphi$  dapat diperoleh berdasarkan pers. [1] sebagai berikut

$$\varphi = \frac{M_z^2}{l \sqrt{2m}} \int \frac{d\Theta}{\sqrt{\frac{2}{m l^2} [E - U_{\text{ef}}(\Theta)]}} \quad (4)$$

Integral pada pers. [3] dan [4] merupakan persamaan integrál eliptik, orde pertama dan tiga.

Daerah variasi sudut  $\Theta$  dapat ditentukan berdasarkan kondisi  $E > U_{\text{ef}}$  dan batasnya dapat diambil dari  $E = U_{\text{ef}}$ . Persamaan yang akan diperoleh merupakan persamaan pangkat tiga dari  $\cos \Theta$ , dan mempunyai dua harga akar  $-1$  dan  $+1$  yang menentukan posisi dua lingkaran yang saling paralel yang terdapat pada bola dan antara keduanya terdapat lintasan bandul.

**Contoh 16:** Integrasikan persamaan gerak dari sebuah titik massa yang berada dalam pengaruh gaya berat di dalam sebuah kerucut (sudut puncak kerucut  $2\alpha$ , sumbu vertikal dan puncaknya berada di bawah).

**Penyelesaian:** Dalam koordinat bola dengan titik acuan diambil berada pada titik puncak kerucut dengan sumbu polar berada tegak lurus ke atas, maka fungsi Lagrange sistem adalah

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \cdot \dot{\varphi}^2) + mgr \cos \alpha$$

Koordinat  $\varphi$  adalah siklik sehingga diperoleh

$$M_z = mr^2 \sin^2 \alpha \cdot \dot{\varphi}$$

akan selalu konstan. Untuk energi berlaku

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M_z^2}{2mr^2 \sin^2 \alpha} + mgr \cos \alpha$$

Dengan cara yang sama seperti pada contoh 15 diperoleh:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{\text{ef}}(r)]}}$$

$$\varphi = \frac{M_z^2}{\sin^2 \alpha \sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{[E - U_{\text{ef}}(r)]}}$$

$$U_{\text{ef}}(r) = \frac{M_z^2}{2mr^2 \sin^2 \alpha} + mgr \cos \alpha$$

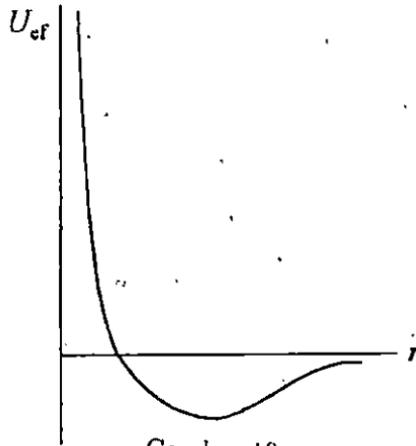
Dari kondisi  $E = \text{const}$  (untuk  $M_z \neq 0$ ) akan diperoleh persamaan pangkat tiga dari  $r$  yang mempunyai dua akar berharga positif; yang menentukan posisi dua lingkaran horizontal pada permukaan kerucut dan antara kedua lingkaran tersebut lintasan benda membentuk lintasan tertutup.

**Contoh 17 :** Integrasikan persamaan gerak dari sebuah bandul permukaan dengan "titik gantungnya" (dengan massa  $m_1$ ) dapat bergerak ke arah horizontal:

**Penyelesaian**

Contoh 2 pada § 5 fungsi Lagrange untuk sistem ini mempunyai koordinat  $x$  siklik. Oleh karena itu, momentum dipertumum  $P_x$  yang dengan komponen horizontal dari momentum total saling paralel adalah konstanta gerak.

$$P_x = (m_1 + m_2) \dot{x} = \text{konstanta} \quad (1)$$



Gambar 10:

Dalam hal ini dapat dianggap bahwa sistem berada dalam keadaan diam sehingga konstanta = 0, integrasi pers. [1] diperoleh relasi

$$(m_1 \neq m_2) \quad r = m_2 l \sin \varphi \quad (2)$$

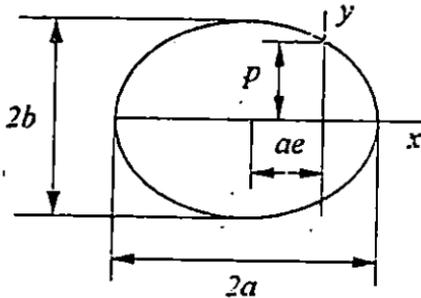
Relasi pada pers. [2] mempunyai arti bahwa titik pusat massa sistem tidak mengalami gerak pada arah horizontal. Dari pers. [1] diperoleh hubungan energi dalam bentuk

$$E = \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{2} + \left( 1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos \varphi \right) - mgl \cos \varphi$$

Dari hubungan ini didapat bahwa

$$t = l \sqrt{\frac{m_2}{2(m_1 + m_2)}} \int \sqrt{\frac{m_1 + m_2 \sin^2 \varphi}{E + m_2 g l \cos \varphi}} d\varphi$$

Jika koordinat massa  $m_2$  adalah  $x_2 = x + l \sin \varphi$  dan  $y_2 = l \cos \varphi$ , dengan pertolongan pers.[2] dinyatakan dalam  $j$ , akan diperoleh bahwa lintasan massa  $m_2$  adalah bagian dari elips yang mempunyai sumbu panjang  $lm/(m_1 + m_2)$  dan sumbu pendek pada arah vertikal



Gambar 11:

adalah  $l$ . Untuk  $m_1 \rightarrow \infty$  akan diperoleh persamaan matematik yang analog dengan bandul sederhana yang bergerak dengan lintasan berbentuk lingkaran.

## 15. Problem Kepler

Persoalan medan sentral yang penting adalah medan sentral berenergi potensial sebanding dengan kebalikan jarak  $r$  dan gaya yang mengakibatkan interaksi tersebut sebanding dengan kebalikan  $r^2$ . Medan gaya seperti ini, misalnya adalah medan gaya berat yang dikemukakan oleh Newton dalam teori gravitasi dan medan yang elektrostatik Coulomb; gaya pertama diketahui mempunyai karakteristik tarik menarik, sementara gaya kedua dapat tarik menarik atau tolak menolak.

Selanjutnya perhatikan medan gaya tarik menarik dengan energi potensial

$$U = -\frac{\alpha}{r} \quad (15.1)$$

dengan  $\alpha$  adalah konstanta berharga positif. Kurva energi potensial efektif dapat dinyatakan dalam hubungan

$$U_{ef} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2m r^2} \quad (15.2)$$

dan diilustrasikan pada gbr. [10]. Untuk  $r \rightarrow 0$ , energi potensial ini akan mendekati harga  $+\infty$ , sementara untuk  $r \rightarrow \infty$  energi potensial akan mempunyai harga negatif terhadap nol; para  $r = M^2/\alpha m$  energi ini mempunyai harga minimum yaitu

$$(U_{ef})_{\min} = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2} \quad (15.3)$$

Dari kurva pada gbr. [10] segera diketahui bahwa gerak partikel pada  $E > 0$  adalah tak berhingga, sedangkan pada  $E < 0$  adalah berhingga.

Bentuk lintasan gerak dapat diperoleh dengan pertolongan pers. [14.7]. Jika harga potensial  $U = -\alpha/r$  disubstitusikan ke persamaan tersebut dan diintegrasikan diperoleh

$$\varphi = \arccos \left( \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} \right) + \text{konstanta}$$

Arah acuan untuk sudut  $\varphi$  dipilih sedemikian bahwa konstanta = 0

Dengan huruf

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2E M^2}{m\alpha^2}} \quad (15.4)$$

diperoleh kurva lintasan dalam bentuk

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi \quad (15.5)$$

Pers. [15.5] tidak lain merupakan persamaan potongan kerucut dengan titik fokus pada titik acuan;  $p$  disebut sebagai *parameter*,  $e$  adalah *eksentrisitas* dari lintasan. Pemilihan arah acuan dari  $\varphi$  mempunyai arti, seperti dapat terlihat dari pers. [15.5] bahwa suatu titik dengan  $\varphi = 0$  adalah titik yang terdapat di dekat titik acuan (disebut sebagai periferi lintasan).

Dalam persoalan ekuivalen untuk dua benda yang mengalami interaksi satu sama lain, berdasarkan pers. [15.1], lintasan setiap partikel akan membentuk potongan kerucut, yaitu dengan titik fokus pada titik pusat massa keduanya.

Dari pers. [15.4] dapat dilihat bahwa pada  $e < 0$  eksentrisitas akan berharga  $e < 1$ , maka lintasan akan berbentuk elips (lihat gbr. [12]) dan lintasan terbatas, seperti halnya telah disebutkan pada paragraf pertama. Rumus yang secara geometris telah diketahui menghasilkan sumbu panjang dan pendek elips sebagai berikut

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}} \quad (15.6)$$

Harga energi  $E$  terkecil yang memenuhi adalah sesuai dengan yang diberikan pada pers. [15.3]; dalam hal ini  $e = 0$ , atau berarti pula bahwa lintasan elips akan berubah menjadi lingkaran. Di samping itu diketahui pula bahwa sumbu panjang elips hanya bergantung pada energi, tidak bergantung pada momentum angular. Untuk jarak terkecil dan terbesar dari pusat gaya (titik fokus elips) berlaku

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + e} = a(1 - e), \quad r_{\max} = \frac{p}{1 - e} = a(1 + e) \quad (15.7)$$

Pernyataan di atas (dengan  $a$  dan  $e$  dari pers. [15.6] dan [15.4]) dapat pula diperoleh sebagai akar dari persamaan  $U_{\text{eff}} = E$ . Waktu yang diperlukan untuk menempuh satu lintasan berbentuk elips, atau periode  $T$  dari gerak, dapat dihitung dengan pertolongan hukum kekekalan momentum angular dari pers. [14.3] (kecepatan luas lintasan konstan). Dengan mengintegrasikan persamaan tersebut dari  $t = 0$  hingga  $t =$  diperoleh

$$2m A = T M$$

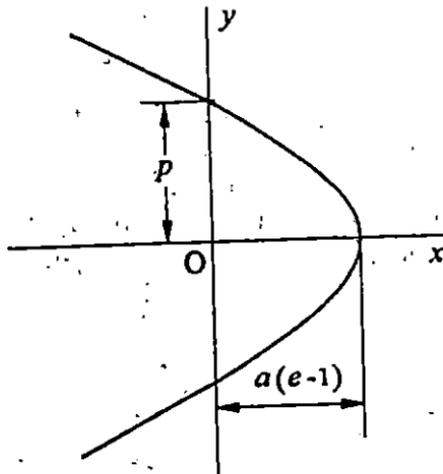
dengan  $A$  adalah luas yang dibentuk oleh lintasan tertutup. Untuk elips berlaku harga  $A = \pi ab$  dan dengan menggunakan pers. [15.6] diperoleh

$$T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{\alpha}} = \pi \alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \quad (15.8)$$

Kenyataan bahwa kuadrat periode adalah harus sebanding dengan ukuran lintasan pangkat tiga telah disebutkan pada § 10. Harus pula diingat bahwa periode hanya bergantung pada energi partikel.

$E \geq 0$  menyebabkan gerak adalah tak terbatas. Untuk  $E > 0$  akan diperoleh aharga  $e > 1$ , yaitu lintasan akan berbentuk hiperbola yang melingkupi titik pusat medan (titik fokus), seperti ditunjukkan pada gbr.[12]. Jarak periferi didapat

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} = a(1-e) \quad (15.9)$$



Gambar 12:

dengan

$$a = \frac{p}{e^2 - 1} = \frac{\alpha}{2E}$$

sama dengan sumbu hiperbola.

Untuk kasus  $E = 0$  eksentrisitas  $e = 1$ , partikel bergerak dengan lintasan parabola dengan jarak periferi  $r_{\min} = p/2$ . Kasus ini dapat direalisasikan jika gerak partikel bermula dengan kecepatan nol ke titik tak berhingga.

Ketergantungan koordinat partikel terhadap waktu sepanjang lintasan geraknya dapat diperoleh dengan pertolongan pers. [14.6]. Secara sederhana dapat dinyatakan dalam parameter seperti di atas.

Selanjutnya perhatikan gerak benda dengan lintasan elips. Dengan mengetahui  $a$  dan menurut pers. [15.4] dan [15.6], integral pada pers. [14.6] dapat ditulis menjadi

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{\alpha}{|E|} r - \frac{M^2}{2m|E|}}} = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int \frac{r dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2}}$$

Dengan mensubstitusikan

$$r - a = -a \cos \xi$$

maka integral dapat ditulis kembali dalam bentuk:

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} \int (1 - \cos \xi) d\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - e \sin \xi) + \text{konstanta}$$

Waktu dapat dipilih sehingga konstanta dapat dipilih sama dengan nol, selanjutnya dalam penulisan parameter  $r(t)$  diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$r = a(1 - e \cos \xi), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - e \sin \xi) \quad (15.10)$$

(untuk waktu  $t = 0$  partikel terdapat pada periferi). Dengan parameter yang sama koordinat partikel dapat pula dinyatakan dalam koordinat cartesian  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  (sumbu  $x$  dan  $y$  adalah sesuai dengan arah masing-masing sumbu panjang dan pendek dari elips). Dengan pers. [15.5] dan [15.10] diperoleh

$$e x = p - r = a(1 - e^2) - a(1 - e \cos \xi) = a e (\cos \xi - e),$$

dan  $y$  dapat diperoleh dari persamaan  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ . Dengan demikian akan diperoleh

$$x = a(\cos \xi - e), \quad y = a \sqrt{1 - e^2} \sin \xi \quad (15.11)$$

Pada keadaan lintasan penuh berbentuk elips parameter  $\xi$  akan berubah dari 0 hingga  $2\pi$ . Perhitungan analog dapat pula dilakukan untuk lintasan berbentuk hiperbola yang menghasilkan:

$$\begin{aligned} r &= a(e \cos \xi - 1), & t &= \frac{ma^3}{\alpha} (e \sin \xi - \xi) \\ x &= a(e - \cos \xi), & y &= a \sqrt{e^2 - 1} \sin \xi. \end{aligned} \quad (15.12)$$

Parameter  $\xi$  dalam hal ini mempunyai harga  $-\infty < \xi < +\infty$

Sebagai contoh, misalnya gerak dalam medan sentral tolak menolak dengan potensial

$$U = \frac{\alpha}{r} \quad (15.13)$$

dengan  $\alpha > 0$ . Untuk kasus ini energi potensial efektif adalah

$$U_{\text{ef}} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

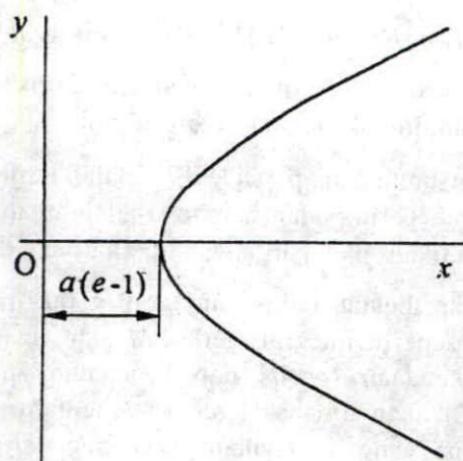
secara monoton berpengaruh dari  $+\infty$  hingga 0 jika  $r$  berubah dari 0 ke  $+\infty$ . Jika energi partikel hanya dapat berharga positif, gerak menjadi gerak berhingga. Perhitungan selengkapnya untuk kasus seperti ini adalah analog dengan cara yang telah dilakukan di atas. Lintasan akan berbentuk hiperbola

$$\frac{p}{r} = -1 + e \cos \varphi \quad (15.14)$$

( $p$  dan  $e$  adalah parameter yang didefinisikan pada pers. [15.14]). Gerak ini akan mendekati titik pusat gaya, seperti terlihat pada gbr. [13].

Untuk jarak periferi berlaku

$$r_{\text{min}} = \frac{p}{e - 1} = a(e + 1). \quad (15.15)$$



Gambar 13:

Ketergantungan terhadap waktu dalam representasi parameter menghasilkan rumusan

$$\left. \begin{aligned} r &= a(e \cos \xi + 1), & t &= \frac{ma^3}{\alpha} (e \sin \xi + \xi) \\ x &= a(\cos \xi + e), & y &= a\sqrt{e^2 - 1} \sin \xi. \end{aligned} \right\} \quad (15.16)$$

Sebagai akhir paragraf ini patut pula dicatat bahwa untuk gerak di dalam medan sentral berpotensial  $U = \alpha/r$  (dengan tanda  $\alpha$  sembarang) terdapat integral gerak spesifik. Dengan menghitung secara langsung dapat dengan mudah dibuktikan bahwa

$$[v \dot{M}] + \frac{\alpha r}{r} = \text{konstanta} \quad (15.17)$$

Kenyataan turunan total terhadap waktu dari besaran ini diperoleh

$$[\dot{v} M] + \frac{\alpha v}{r} - \frac{\alpha r(rv)}{r}$$

atau dengan mensubstitusikan  $M = m [rv]$ ,

$$m r (v\dot{v} + \frac{\alpha v}{r} - \frac{\alpha r(rv)}{r});$$

**Pembuktian bahwa besaran  $[vM]$  adalah integral gerak**

Jika dalam hal ini disubstitusikan persamaan gerak  $mv = arr^3$ , terlihat bahwa pernyataan ini akan sama dengan nol

Vektor konstanta pada pers.[15.17] adalah terdapat sepanjang dari titik fokus ke arah periferi dan harganya adalah sama dengan  $e\alpha$ . Hal ini mudah dibuktikan jika harganya diperhatikan di periferi.

Harus pula dicatat bahwa integral gerak pada pers [15.17], demikian pula seperti integral gerak  $M$  dan  $E$  merupakan fungsi langsung dari keadaan (posisi dan kecepatan) partikel. Pada bab selanjutnya (§50) akan dibahas lebih rinci tentang hubungan integral gerak dengan apa yang dinamakan gerak *degenerasi*.

**Contoh 18**

Hitung ketergantungan waktu dari koordinat partikel dari gerak di dalam medan sentral dengan potensial  $U = -a/r$  dengan energi  $E = 0$  (lintasan berbentuk parabla) !

**Penyelesaian**

Pada integral

$$t = \int \frac{r dr}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m}r - \frac{M^2}{m^2}}}$$

dan buat substitusi:

$$r = \frac{M^2}{2m\alpha} (1 + \eta^2) = \frac{p}{2} (1 + \eta)$$

dan diperoleh representasi parameter yang dicari sebagai berikut

$$r = \frac{p}{2} (1 + \eta^2), \quad t = \sqrt{\frac{m p^3}{\alpha}} \frac{\eta}{2} \left( 1 + \frac{\eta^2}{3} \right)$$

$$x = \frac{p}{2} (1 - \eta^2), \quad y = p\eta.$$

Parameter  $h$  berharga dari  $-\infty$  hingga  $+\infty$ .

**Contoh 19**

Integrasi persamaan gerak sebuah titik massa di dalam medan sentral dengan potensial  $U = -a/r^2$  (dengan  $\alpha > 0$ )

**Penyelesaian**

Dari pers. [14.6] dan [14.7] dengan pemilihan tertentu titik nol (acuan) dari  $\varphi$  dan  $t$  diperoleh

$$\text{a) Untuk } E > 0, \frac{M^2}{2m} > \alpha \quad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{M^2 - 2m\alpha}} \cos \left[ \varphi \sqrt{1 - \frac{2m\alpha}{M^2}} \right],$$

$$\text{b) Untuk } E > 0, \frac{M^2}{2m} < \alpha \quad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{2m\alpha - M^2}} \sinh \left[ \varphi \sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2} - 1} \right],$$

$$\text{c) Untuk } E < 0, \frac{M^2}{2m} < \alpha \quad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha - M^2}} \cosh \left[ \varphi \sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2} - 1} \right].$$

Untuk ketiga kasus ini berlaku

$$t = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{E r^2 - \frac{M^2}{2m} + \alpha}.$$

Untuk kasus b) dan c) partikel akan membentuk lintasan spiral di pusat gaya dan akan mencapai  $\varphi = +\infty$ . Bermula dari jarak  $r$ , untuk itu diperlukan waktu terbatas sebesar

$$\frac{1}{E} \sqrt{\frac{m}{2}} \left\{ \sqrt{\alpha - \frac{M^2}{2m} + E r^2} - \sqrt{\alpha - \frac{M^2}{2m}} \right\}$$

**Contoh 20**

Suatu perubahan energi potensial  $U = a/r$  sebesar  $\partial U(r)$  infinitesimal menyebabkan bahwa lintasan gerak partikel untuk gerak terbatas tidak lagi berbentuk kurva tertutup dan pada daerah periferi lintasan tersebut akan mengalami deviasi sudut sebesar  $\delta\varphi$ . Hitunglah untuk  $\delta\varphi$  untuk potensial a)  $U = \beta/r^2$ , b)  $\delta U = \gamma/r^3$

### Penyelesaian

Jika  $r$  mempunyai harga antara  $r_{\min}$  dan  $r_{\max}$  dan kurvanya kembali ke  $r_{\min}$  sudut  $\varphi$  akan berubah sesuai pers. [14.10] sebagai berikut

$$\Delta\varphi = -2 \frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m(E-U) - \frac{M^2}{r^2}} dr$$

dalam hal ini dilakukan perubahan integrasi dari  $dr$  menjadi  $d\varphi$  sepanjang lintasan dari gerak "tidak terganggu". Substitusikan  $U = -\alpha/r + \delta U$  dan integrand dibuat dalam deret  $\delta U$ ; integral suku orde ke nol deret akan menghasilkan  $2\pi$  dan suku deret orde pertama akan menghasilkan integral pergeseran yang dicari

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{2m \delta U \cdot dr}{\sqrt{2m(E + \frac{\alpha}{r}) - \frac{M^2}{r^2}}} = \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{2m}{M} \int_0^\pi r^2 \delta U d\varphi \right); \quad (1)$$

a) Untuk kasus ini integrasi persamaan di atas adalah trivial dan diperoleh

$$\delta\varphi = -\frac{2\pi\beta m}{M^2} = -\frac{2\pi\beta}{\alpha p}$$

$p$  ada parameter dari elips yang tidak mengalami gangguan, diperoleh dari pers. [15.4]

b) Untuk kasus ini diketahui bahwa  $r'dU = g/r$  dan dengan  $1/r$  dari pers. [15.5] diperoleh

$$\delta\varphi = -\frac{6\pi\alpha\gamma m^2}{M^4} = -\frac{2\pi\gamma}{\alpha p^2}$$

## Bab IV

# Tumbukan Partikel

### 16. "Peluruhan" Partikel

Hukum kekekalan momentum dan energi merupakan kunci penting untuk mengungkap berbagai kelakuan fisis proses mekanika. Hal penting yang harus diperhatikan dalam hal ini adalah tentang sifat-sifat dari macam interaksi yang turut serta dalam proses dan tidak bergantung pada partikel.

Pembahasan akan dimulai pada proses *spontan* (yaitu proses tanpa gangguan gaya luar) "meluruhnya" (atau lebih tepat digunakan istilah terpecah) sebuah partikel menjadi dua partikel baru dan keduanya akan bergerak saling tidak bergantung pada satu sama lain setelah tumbukan terjadi.

Proses ini lebih sederhana dapat digambarkan dalam sistem acuan di mana partikel (sebuah terpecah) berada dalam keadaan diam.

Berdasarkan hukum kekekalan momentum diketahui bahwa jumlah momentum kedua partikel yang terbentuk karena terpecahnya partikel tunggal adalah sama dengan nol, atau berarti bahwa partikel akan bergerak dengan kecepatan yang sama, tetapi mempunyai arah yang berlawanan. Jumlah harga momentumnya (misalnya, momentum setelah tumbukan adalah  $p_0$ ) dapat diperoleh berdasarkan hukum kekekalan energi sebagai berikut

$$E_i = E_{1i} + \frac{p_o^2}{2m_1} + E_{2i} + \frac{p_o^2}{2m_2};$$

$m_1$  dan  $m_2$ , masing-masing adalah partikel 1 dan 2,  $E_{1i}$  adalah energi dalam dari partikel awal (partikel tunggal). Misalnya  $\varepsilon$  adalah energi peluruhan, yaitu merupakan perbedaan

$$\varepsilon = E_f - E_{1i} - E_{2i} \quad (16.1)$$

(besaran ini haruslah berharga positif sehingga proses peluruhan atau terpecahnya partikel dimungkinkan terjadi). Maka diperoleh

$$\varepsilon = \frac{p_o^2}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{p_o^2}{2\mu} \quad (16.2)$$

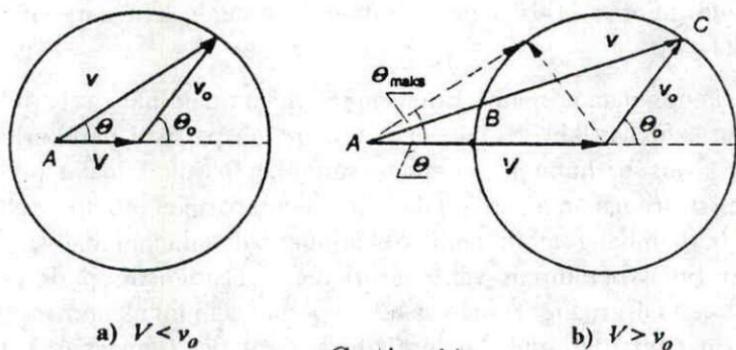
sehingga  $p_o$  dapat ditentukan ( $\mu$  adalah masa reduksi kedua partikel); kecepatan partikel 1 dan 2 masing-masing adalah  $n_{1o}/m_1$  dan  $n_{2o} = p_o/m_2$ .

Bagaimana seandainya sistem acuan partikel awal bergerak dengan kecepatan  $V$ ? Sistem acuan koordinat seperti ini biasanya lebih populer disebut sebagai *sistem acuan koordinat laboratorium* atau sistem  $L$ , sebaliknya seperti pembahasan di atas sistem acuan disebut sebagai sistem acuan koordinat pusat massa atau sistem  $S$  di mana kecepatan sistem sama dengan nol. Misalnya, kecepatan sebuah partikel setelah terjadi peluruhan adalah  $n$  dan  $n_o$ , masing-masing untuk sistem  $S$  dan  $L$ . Dari persamaan  $v = V + v_o$  atau  $v - V = v_o$ , dengan  $n = |v|$ ,  $V = |V|$  dan  $n_o = |v_o|$ , diperoleh

$$v^2 + V^2 - 2vV \cos \Theta = v_o^2, \quad (16.3)$$

$\Theta$  adalah sudut di mana partikel bergerak dengan kecepatan  $v$  terhadap kecepatan  $V$ . Dari persamaan ini diperoleh hubungan antara kecepatan dan arah partikel dalam sistem  $L$ . Hubungan ini dapat digambarkan secara grafis (gambar [14]). Misalnya, digambarkan lingkaran dengan jari-jari  $n_o$  maka vektor kecepatan  $v$  dapat diperoleh dengan menggambarkan sebagian vektor yang melalui titik A, berada sejauh  $V$  dari titik pusat

lingkaran dan menuju ke sembarang titik di sisi lingkaran<sup>1)</sup>. Untuk kasus  $V < v_0$  dan  $V > v_0$  masing-masing digambarkan pada gambar [14a] dan [14 b]. Untuk kasus pertama partikel dapat dipantulkan pada sudut  $\Theta$  sembarang. Untuk kasus kedua partikel hanya dapat dipantulkan pada arah ke depan dengan sudut  $\Theta_{\text{maks}}$ , tidak dapat melebihi harga sudut ini. Harga sudut maksimum



Gambar 14:

ini diperoleh dari hubungan

$$\sin \Theta = \frac{v_0}{V} \quad (16.4)$$

diberikan melalui garis tangensial lingkaran melalui titik A.

Untuk relasi antara  $\Theta$  dan  $\Theta_0$  dalam sistem  $L$  dan  $S$  dapat pula diperoleh dari diagram yang sama, yaitu

$$\tan \Theta = \frac{v_0 \sin \Theta_0}{v_0 \cos \Theta_0 + V} \quad (16.5)$$

Dengan menyelesaikan persamaan ini, dinyatakan melalui  $\cos \Theta_0$ , didapat formulasi elementer sebagai berikut

$$\cos \Theta_0 = -\frac{V}{v_0} \sin \Theta \pm \cos \Theta \left( \sqrt{1 - \frac{V}{v_0} \sin \Theta} \right) \quad (16.6)$$

1) Lebih jelas lagi pada suatu titik sembarang dari permukaan bola dengan kecepatan  $v_0$  dengan penampang lintang bola diberikan gbr. [4] sebagai lingkaran

Pada  $v_0 < U$  hubungan  $\Theta_0$  dan  $\Theta$  menjadi lebih jelas seperti dapat dilihat pada gambar [14a]. Pada pers. [16.6] tanda positif (+) di depan tanda akar dapat dipilih untuk  $\Theta = 0$  atau juga untuk  $\Theta = \pi$ . Untuk  $v_0 < V$  sebaliknya hubungan  $\Theta_0$  dan  $\Theta$  adalah tidak jelas, setiap harga  $\Theta$  mempunyai dua harga  $\Theta_0$ , keduanya menyusun vektor  $v_0$ , masing-masing ditunjukkan oleh garis dari titik pusat lingkaran ke titik B dan C (pada gambar [14b] hanya ditunjukkan salah satu dari vektor ini); pers. [16.6].

Penggunaan umum rumusan di atas tidak hanya berhubungan dengan satu partikel, tetapi dengan sejumlah partikel berukuran sama; untuk kasus berhubungan dengan sejumlah partikel maka pertanyaan tentang distribusi arah partikel dan energi dari partikel produk "peluruhan" akan berkembang lebih jauh. Selanjutnya diandaikan bahwa partikel primer tidak beraturan, yaitu terorientasi secara isotrop di pusat (di tengah-tengah) ruang. Dalam sistem S pertanyaan ini akan menghasilkan jawaban trivial. Produk "peluruhan" seluruhnya (jenis partikel sama) mempunyai energi sama dan mempunyai distribusi arah isotrop. Harapan terakhir muncul dari pengandaian tentang orientasi arah partikel primer yang tidak beraturan. Hal ini mempunyai arti bahwa bagian dari produk "peluruhan" yang terdapat di dalam elemen sudut ruang  $d\Omega_0$  adalah sebanding dengan besarnya elemen sudut ini, atau sama dengan  $d\Omega_0 / 4\pi$ . Dari sini akan diperoleh distribusi sudut  $\Theta_0$  dengan mensubstitusikan  $d\Omega_0 = 2\pi \sin \Theta_0 d\Theta_0$ :

$$\frac{1}{2} \sin \Theta_0 d\Theta_0 \quad (16.7)$$

Distribusi di dalam sistem L dapat diperoleh melalui transformasi pernyataan di atas. Sebagai contoh akan ditransformasikan distribusi energi kinetik dalam sistem L. Dengan mengintegrasikan persamaan  $v = v_0 + V$  didapat

$$v^2 = v_0^2 + V^2 + 2v_0 V \cos \Theta_0$$

dan dapat diketahui pula bahwa

$$d \cos \Theta_0 = \left( \frac{d(v^2)}{2v_0 V} \right)$$

Denan energi kinetik  $T = mv^2$  ( $m$  adalah sama untuk  $m_1$  dan  $m_2$ , tergantung partikel mana yang dipandang) dan substitusikan ke pers. [16.1] sehingga diperoleh distribusi energi kinetik yang dicari, yaitu

$$\frac{dT}{2mv_0V} \quad (16.8)$$

Energi kinetik dapat mempunyai harga dari minimalnya, yaitu  $T_{\min} = \frac{1}{2}m(n_0 - V)^2$  hingga harga maksimumnya  $T_{\max} = m(n_0 + V)$ . Dalam interval distribusi energi ini, berdasarkan pers. [16.8] energi partikel akan didistribusi secara homogen.

Untuk peristiwa "peluruhan" partikel yang terpecah menjadi lebih dari dua partikel baru, hukum kekekalan momentum dan energi tentunya akan mempunyai "dimensi ruang" yang lebih besar untuk kecepatan dan energi partikel hasil peluruhan, dibandingkan dengan dua partikel baru. Hingga energi partikel yang baru, misalnya dalam sistem  $S$ , tidak mungkin mempunyai harga tentu. Dalam hal ini hanya dapat diperlihatkan harga batas atas (maksimum) untuk energi kinetik yang dapat mempunyai partikel hasil peluruhan.

Untuk menentukan harga batas energi tersebut, dapat diandaikan semua partikel hasil peluruhan, selain partikel bermassa  $m_1$ , dipandang sebagai satu sistem; energi dalamnya disimbolkan sebagai  $E'_i$ . Energi kinetik partikel bermassa  $m_1$ , berdasarkan pers. [16.1] dan [16.2] adalah

$$T_{10} = \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{M - m_1}{M} (E_i - E_{1i} - E'_i)$$

( $M$  adalah massa partikel awal atau partikel primer). Dari pernyataan di atas terlihat bahwa  $T_{10}$  mempunyai kemungkinan memiliki harga maksimum jika  $E'_i$  sekecil mungkin. Agar kondisi tersebut terpenuhi, anggaplah seluruh partikel hasil peluruhan, kecuali partikel bermassa  $m_1$ , bergerak dengan kecepatan yang sama. Oleh karena itu,  $E'_i$  dengan asumsi sederhana, merupakan penjumlahan seluruh energi dalam partikel yang ada (selain  $m_1$ ), akan diperoleh selisih  $E_i - E_{1i} - E'_i$  selisih energi hasil peluruhan (*energi peluruhan*) dikali dengan faktor massa

$$(T_{10})_{\text{maks}} = \frac{M - m_1}{M} \varepsilon. \quad (16.9)$$

**Contoh 21:** Cari hubungan antara sudut  $\Theta_1$  dan  $\Theta_2$  (dalam sistem  $L$ ), yaitu masing-masing sudut yang dibentuk oleh partikel sebagai hasil peluruhan dua partikel!

**Penyelesaian:** Dalam sistem  $S$  di mana pada sistem ini partikel di hancurkan dapat dinyatakan melalui relasi:  $\Theta_{10} = \pi - \Theta_{20}$ . Dengan demikian secara sederhana dapat dinyatakan sebagai  $\Theta_0$  dan pers [16.5] dapat digunakan untuk masing-masing kedua partikel sebagai berikut

$$V + v_{10} \cos \Theta_0 = v_{10} \sin \Theta_0 \cot \Theta_1,$$

$$V - v_{20} \cos \Theta_0 = v_{20} \sin \Theta_0 \cot \Theta_2.$$

Dari kedua persamaan sudut  $\Theta_0$  harus dieliminasi. Untuk mendapatkannya dari persamaan ini ditentukan  $\cos \Theta_0$  dan  $\sin \Theta_0$  dan bentuk  $\sin^2 \Theta_0 + \cos^2 \Theta_0 = 1$ . Dengan membuat perbandingan  $v_{10}/v_{20} = m_1/m_2$  dan menggunakan pers. [16.2] maka diperoleh hasil sebagai berikut

$$\frac{m_1}{m_2} \sin^2 \Theta_2 + \frac{m_1}{m_2} \sin^2 \Theta_1 - 2 \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2) = \frac{2\varepsilon}{(m_1 + m_2)V^2} \sin^2(\Theta_1 + \Theta_2).$$

**Contoh 22:** Cari distribusi sudut dari partikel hasil peluruhan dalam sistem  $L$ !

### Penyelesaian

Untuk  $v_0 > V$  substitusikan pers. [16.6] dengan tanda positif pada tanda akar pada pers. [16.7] dan akan diperoleh distribusi sudut dalam bentuk

$$\frac{\sin \Theta d\Theta}{2} \left[ 2 \frac{V}{v_0} \cos \Theta + \frac{1 + \left(\frac{V}{v_0}\right)^2 \cos 2\Theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{v_0}\right)^2 \sin^2 \Theta}} \right] \text{ dengan } 0 \leq \Theta \leq \pi$$

Untuk  $v < V$  kedua kemungkinan hubungan antara  $\Theta_0$  dan  $\Theta$  harus diamati. Dengan bertambahnya  $\Theta$  yang merupakan salah satu harga dari  $\Theta_0$  menyebabkan  $\Theta$  lainnya mengalami penurunan sehingga perbedaan (bukan penjumlahan) dapat dibentuk dari pernyataan  $\cos \Theta_0$  dengan kedua tanda di depan tanda akar pada pers. [16.6]. Hasil perhitungan ini adalah

$$\sin \Theta \, d\Theta \left[ \frac{1 + \left(\frac{V}{v_0}\right)^2 \cos 2\Theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{v_0}\right)^2 \sin^2 \Theta}} \right] \text{ dengan } 0 \leq \Theta \leq \Theta_{\text{maks}}$$

**Contoh 23:** Cari dari variasi sudut  $Q$ , yaitu sudut antara arah dua artikel hasil peluruhan !

**Penyelesaian:** Sudut  $Q$  adalah penjumlahan dari  $Q_1 + Q_2$  yang diberikan pada pers. [16.5] (bandingkan dengan contoh 22); cara sederhana untuk menentukannya adalah dengan mencari tangen sudut-sudut ini. Perhitungan untuk mencari harga ekstrim dari pernyataan yang dicari menghasilkan kemungkinan daerah variasi dari sudut  $Q$  yang bergantung pada besaran relatif dari  $V$  dan  $n_{10}, n_{20}$  (untuk lebih las, misalnya selain  $n_{20} > n_{10}$ )

$$0 < \Theta < \pi \text{ jika } v_{10} < V < v_{20},$$

$$\pi - \Theta_0 < \Theta < \pi \text{ jika } V < v_{10},$$

$$0 < \Theta < \Theta_0 \text{ jika } V > v_{20},$$

harga dari  $\Theta_0$  dapat diperoleh dari persamaan berikut:

$$\sin \Theta_0 = \frac{V(v_{10} + v_{20})}{V^2 + v_{10}v_{20}}.$$

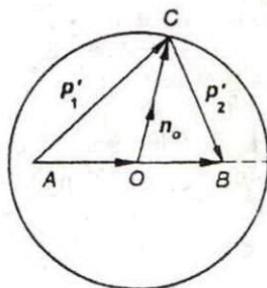
## • Tumbukan Elastik

Tumbukan antara dua partikel disebut *elastik* jika tidak terdapat perubahan keadaan di dalam benda. Dalam hal ini penggunaan hukum kekekalan energi diperlukan untuk mengamati perubahan energi dalam benda.

Rumusan tumbukan khususnya mempunyai bentuk lebih sederhana dalam suatu sistem acuan, seperti telah dijelaskan pada bab sebelumnya bahwa harga besaran dalam sistem ini dinyatakan dengan indeks 0. Kecepatan partikel sebelum tumbukan dalam sistem  $S$  dapat dihubungkan dengan kecepatan  $v_1$  dan  $v_2$  sistem  $L$  melalui hubungan

$$v_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v; \quad v_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v,$$

$v$  di sini adalah  $v_{12}$  (lihat pers. [13.2]). Berdasarkan hukum kekekalan energi, momentum kedua partikel setelah tumbukan mempunyai harga yang sama, tetapi mempunyai arah berlawanan dan berdasarkan hukum kekekalan energi diketahui pula bahwa energi sistem adalah tetap.



Gambar 15:

Dengan demikian, akan diperoleh kecepatan partikel dalam sistem  $L$  dengan jalan rotasi vektor kecepatan kedua partikel, di mana kecepatan mempunyai arah berlawanan dan harganya akan selalu sama. Jika aral kecepatan massa  $m_1$  ditulis dalam vektor satuan  $n_o$  sebagai aral kecepatan setelah tumbukan, kecepatan kedua partikel setelah tumbukan (ditulis dengan tanda aksien) adalah

$$v'_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v n_o; \quad v'_{20} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v n_o \quad (17.1)$$

Untuk menyatakan kedua kecepatan dalam sistem  $L$  maka harga kecepatan pada pers. [17.1] harus ditambahkan kecepatan pusat mass  $V$ . Maka kecepatan kedua partikel setelah tumbukan di dalam sistem  $L$  dapat ditulis menjadi

$$v'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v n_o + \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (17.2)$$

$$v'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v n_o + \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Dengan demikian, ramalan tentang kecepatan partikel setelah tumbukan, yang dicari berdasarkan hukum kekekalan momentum dan energi, telah terselesaikan. Arah vektor  $n_o$  bergantung pada kaedah interaksi yang terdapat antara kedua partikel dan posisi relatif masing-masing partikel pada saat keduanya mengalami tumbukan.

Hasil yang diperoleh dapat diinterpretasikan secara geometris. Untuk ini adalah penting jika kecepatan partikel diubah ke dalam momentumnya. Setelah mengalikan pers. [17.2] dengan  $m_1$  dan  $m_2$  diperoleh

$$\overline{OC} = \mu v, \quad \overline{OA} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (p_1 + p_2), \quad (17.3)$$

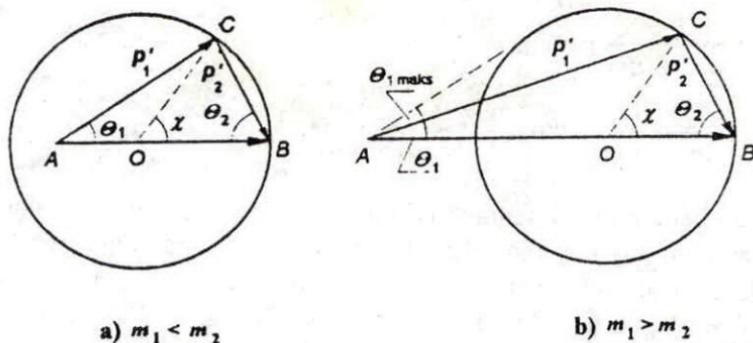
$$\overline{OB} = \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) (p_1 + p_2),$$

$$p'_1 = \mu v n_o + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (p_1 + p_2)$$

$$p'_2 = -\mu v n_o + \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) (p_1 + p_2)$$

dengan  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  adalah massa reduksi. Selanjutnya digambarkan sebuah lingkaran dengan jari-jari  $\mu v$  dan perhatikan gambaran yang terbentuk pada gambar [15]. Jika vektor satuan  $n_o$  terdapat sepanjang  $\overline{OC}$ , vektor  $\overline{AC}$  dan  $\overline{CB}$  merupakan momentum  $p'_1$  dan  $p'_2$ . Apabila momentum  $p_1$  dan  $p_2$  diketahui, lingkaran titik A dan B akan tetap; titik C dapat terletak disembarang tempat dilingkaran.

Pandang untuk kasus di mana sebelum tumbukan partikel primer berada dalam keadaan diam. Dalam hal ini panjang  $OB = m_2 / (m_1 + m_2) p_1 = mn$  sama dengan jari-jari, berarti bahwa titik B terletak pada

a)  $m_1 < m_2$ b)  $m_1 > m_2$ 

$$\overline{AB} = P_1 : AO/OB = m_1/m_2$$

Gambar 16:

lingkaran. Vektor  $AB$  menggambarkan momentum  $P_1$  dari partikel pertama sebelum dihamburkan; titik A terletak di dalam (jika  $m_1 < m_2$ ) dan di luar (jika  $m_1 > m_2$ ) lingkaran. Diagram yang mengilustrasikan gambaran ini diberikan pada gambar [16a] dan [16b]. Sudut  $\Theta_1$  dan  $\Theta_2$  menggambarkan sudut pembelokan masing-masing partikel setelah tumbukan terhadap arah tumbukan (sama dengan arah  $P_1$ ). "Sudut pusat"  $\chi$  (yang memberikan arah vektor  $n_o$ ) berarti sebagai sudut pembelokan partikel pertama di dalam sistem pusat massa  $S$ . Dari gambar [16a] dan [16b] dapat diperoleh sudut  $\Theta_1$  dan  $\Theta_2$  yang dinyatakan dalam  $\chi$  sebagai berikut

$$\tan \Theta_1 = \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi}, \quad \Theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2} \quad (17.4)$$

Harga kecepatan kedua partikel setelah tumbukan yang ditulis dalam sudut  $\chi$  adalah

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 \cos \chi}}{m_1 + m_2} v, \quad v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \sin \frac{\chi}{2} \quad (17.5)$$

Jumlah sudut  $\Theta_1 + \Theta_2$  adalah sudut antara kedua partikel setelah tumbukan  $\Theta_1 + \Theta_2 > \pi/2$  jika  $m_1 < m_2$  dan  $\Theta_1 + \Theta_2 < \pi/2$  jika  $m_1 < m_2$ .

Kasus kedua partikel setelah tumbukan mempunyai lintasan garis lurus<sup>2)</sup> karena tumbukan sentral. Apabila  $c = \pi/2$ , yaitu titik  $C$  terletak pada garis tengah lingkaran atau antara titik  $A$  dan  $O$  (lihat gambar [16b];  $p'_1$  dan  $p'_2$  searah).

Dalam hal ini, kecepatan kedua partikel setelah tumbukan adalah

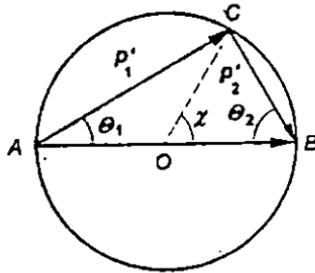
$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v, \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v \quad (17.6)$$

Harga  $v'_2$  akan mempunyai kemungkinan harga terbesar dan tentunya akan mempunyai energi terbesar pula yang selanjutnya pada tumbukan dapat "ditransfer" ke partikel diam, yaitu

$$E_{1\text{maks}}' = \frac{\sqrt{m_2 v_{2\text{maks}}'^2}}{2} = \frac{4m_1 m_2}{m_2 + m_1} E_1, \quad (17.7)$$

dengan  $E_1 = m_1 v_1^2 / 2$  yaitu sama dengan energi awal partikel yang menumbuk

Untuk  $m_1 < m_2$  kecepatan partikel setelah tumbukan dapat mempunyai arah sembarang, sedangkan untuk  $m_1 > m_2$  sebaliknya, sudut



Gambar 17:

hambur dari partikel yang menumbuk tidak akan melebihi harga maksimumnya; pada gambar [16b] terlihat bahwa titik  $C$  akan menyinggung

2) Dalam sistem laboratorium; dalam sistem  $S$  kedua partikel tentunya akan tetap mempunyai lintasan garis lurus.

garis  $AC$  di sisi lingkaran. Dalam hal ini berlaku  $\sin \Theta_{\text{maks}} = OC/OA$  atau

$$\sin \Theta_{1\text{maks}} = \frac{m_1}{m_2} \quad (17.8)$$

Tumbukan akan menjadi lebih sederhana apabila partikel-partikel mempunyai massa yang sama. Untuk kasus ini tidak hanya titik  $B$ , tetapi juga titik  $A$  terletak di sisi lingkaran (gambar [17]) dan berlaku;

$$\Theta_1 = \frac{\chi}{2}, \quad \Theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}, \quad (17.9)$$

dan

$$v'_1 = v \cos \frac{\chi}{2}, \quad v'_2 = v \sin \frac{\chi}{2}. \quad (17.10)$$

Harus pula dicatat bahwa setelah mengalami tumbukan partikel akan bergerak dengan sudut lancip satu sama lain. Untuk tumbukan sentral ( $c = \pi$ ) berlaku  $n'_1 = 0n'_2 = n$  dan  $Q_2 = 0$  atau berarti pula bahwa partikel pertama (yang pada mulanya bergerak) akan berada dalam keadaan diam, sementara partikel kedua, yang pada awalnya diam, akan bergerak dengan kecepatan dan arah seperti partikel pertama.

**Contoh 24:** Sebuah partikel bermassa  $m_1$  menumbuk partikel bermassa  $m_2$  yang berada dalam keadaan diam. Nyatakan kecepatan kedua partikel setelah tumbukan dalam sistem koordinat laboratorium (dalam sudut hamburnya).

**Penyelesaian:** Dari gambar [16] diperoleh  $p'_1 = 2 \cdot OB \cdot \cos Q_2$  atau

$$v'_2 = 2v \frac{m}{m_2} \cos \Theta_2$$

Untuk momentum  $p'_1 = AC$  berlaku persamaan

$$OC^2 = OA^2 + p'^2_1 - 2OA \cdot p'_1 \cdot \cos \Theta_1$$

atau

$$\left(\frac{v'_1}{v_1}\right)^2 - \frac{2m_1 v_1 v'_1}{m_2 v} \cos \Theta_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\frac{v_1'}{v_1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cos \Theta_1 \pm \frac{1}{m_1 + m_2} \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \Theta_1}$$

untuk  $m_1 > m_2$  kedua tanda di depan tanda akar berlaku, sedangkan untuk  $m_2 < m_1$  hanya tanda positif yang berlaku.

## 18. Hamburan Partikel

Dalam pembahasan yang lalu telah disebutkan bahwa untuk mencari secara lengkap hasil tumbukan dua partikel (perhitungan sudut  $\chi$ ) persamaan gerak dalam pengamatan interaksi konkrit antara partikel dapat terselesaikan.

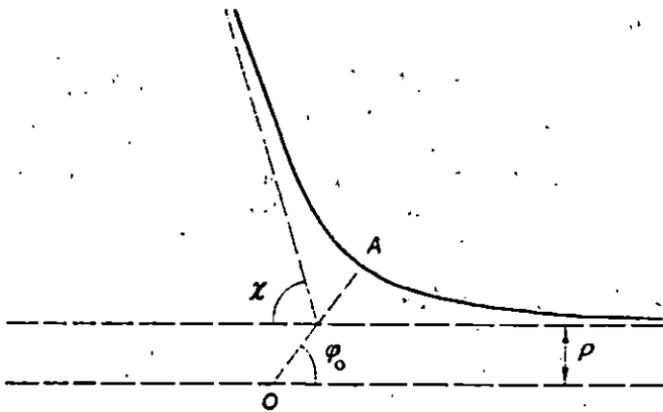
Selanjutnya, seperti biasanya, akan diamati suatu persoalan ekuivalen pembelokan partikel (yang terletak di dalam sistem  $S$ ). Dalam pembahasan gerak dalam medan sentral telah ditunjukkan bahwa lintasan suatu partikel di dalam medan sentral adalah simetri terhadap garis lurus yang menghubungkan pusat gaya dan kurva lintasannya (pada gambar [18] adalah garis  $AO$ ). Dalam hal ini, lintasan asimtotik akan dipotong menjadi dua bagian oleh garis  $OA$  dengan sudut yang sama. Jika sudut tersebut disimbolkan dengan  $\varphi_0$ , untuk sudut  $\chi$  menggambarkan sudut yang dibentuk partikel ketika mendekati pusat tumbukan, yaitu

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0| \quad (18.1)$$

seperti halnya dapat dilihat pada gambar [18]. Sudut  $\varphi_0$  dapat dihitung dengan menggunakan pers. [14.7] dari integral.

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M^2}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U_1(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} \quad (18.2)$$

dengan mengintegrasikan dari titik pusat dan dibelkan ( $r_{\min}$ ) membentuk lintasan ke tempat tak berhingga ( $r_{\max}$ ). Dalam hal ini, harus diingat bahwa harga  $r_{\min}$  pada pers. [18.2] adalah dalam radian.



Gambar 18.

Pada gerak *finite* yang akan dibahas di sini, selain terdapat konstanta gerak seperti  $E$  dan  $M$ , terdapat pula kecepatan tak berhingga  $v_{\infty}$  dari partikel dan apa yang disebut sebagai *parameter tumbukan*. Parameter tumbukan menggambarkan jarak tegak lurus terhadap partikel yang menjadi pasangan partikel yang menumbuk, yaitu jarak dari pusat tumbukan pada arah  $v_{\infty}$ , atau jarak paling dekat di mana partikel mendekati pusat tumbukan, seandainya tidak terdapat gaya (lihat gambar [18]). Energi dan momentum angular dapat dinyatakan dalam besaran ini, yaitu

$$E = \frac{m v_{\infty}^2}{2}, \quad M = m \rho v_{\infty}, \quad (18.3)$$

dan pers. [18.2] dapat ditulis kembali dalam bentuk:

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{e^2}{r^2} - \frac{2U}{m v_{\infty}^2}}} \quad (18.4)$$

Dengan rumusan pada pers. [18.4] ini akan didapat hubungan langsung dari  $\chi$  dan  $e$ .

Dalam penggunaan fisis umumnya tidak dibicarakan pembelikan dari satu partikel, tetapi seperti dikatakan, berhubungan dengan *hamburan* partikel berukuran sama yang dihamburkan dengan kecepatan sama  $v_{\infty}$ .

dari pusat hamburan. Berkas partikel yang berbeda mempunyai parameter tumbukan yang berbeda pula dan sehubungan dengan itu akan dihamburkan melalui sudut  $\chi$  yang berbeda pula. Dalam hal ini jumlah partikel yang dihamburkan setiap saat, terletak pada interval sudut  $x + dx$ , dinyatakan sebagai  $dN$ . Bilangan ini sebenarnya jika dipakai sebagai parameter tumbukan adalah tidak praktis karena besaran bergantung pada kerapatan partikel yang dihamburkan (proporsional). Atas dasar ini didefinisikan suatu besaran dengan  $n$  adalah jumlah partikel yang melewati suatu luas penampang lintang (dalam hal ini tentunya dianggap bahwa berkas yang melewati

$$d\sigma = \frac{dN}{n} \quad (18.5)$$

luas tersebut homogen). Dimensi  $d\sigma$  adalah luas dan disebut sebagai *panampang lintang hamburan*. Besaran ini dapat ditentukan dengan baik melalui medan hamburan dan merupakan besaran penting yang menggambarkan proses hamburan.

Dianggap bahwa hubungan antara  $\chi$  dan  $\varrho$  adalah jelas akan meningkat jika sudut hambur menurun menurut fungsi monoton dari parameter tumbukan. Dalam kasus ini tiap partikel yang dihamburkan akan terletak dalam interval sudut  $\chi + d\chi$  dan akan mempunyai parameter tumbukan dalam interval tertentu antara  $\varrho(\chi)$  dan  $\varrho(\chi) + d\varrho(\chi)$ . Jumlah partikel ini adalah sama dengan perkalian antara  $n$  dan luas cincin antara lingkaran berjari-jari  $\chi$  dan  $\chi + d\chi$ , atau dengan perkataan lain berlaku  $dN = 2\pi \varrho d\varrho n$ . Maka penampang lintang hamburan dapat ditulis dalam bentuk

$$d\sigma = 2\pi \varrho d\varrho \quad (18.6)$$

Untuk mencari ketergantungan penampang lintang hamburan terhadap sudut hambur cukuplah dinyatakan dalam

$$d\sigma = 2\pi \varrho(\chi) \left| \frac{d\varrho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi \quad (18.7)$$

Dalam persamaan ini masih terdapat harga absolut  $d\varrho(\chi)$ , karena dapat berharga negatif (kasus ini bahkan sering ditemukan)<sup>3)</sup>. Seringkali

$d\sigma$  tidak dihubungkan dengan elemen  $d\varrho$  untuk sudut bidang datar, tetapi dalam sudut ruang  $d\Omega$ . Sudut ruang antara dua kerucut yang mempunyai sudut sisi  $\chi$  dan  $\chi + d\chi$  adalah  $d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi$ . Dengan demikian, dari pers. [18.7] diperoleh relasi:

$$d\sigma = \frac{\varrho(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{d\varrho(x)}{d\chi} \right| d\Omega \quad (18.8)$$

Kembali pada situasi fenomena ini secara nyata, yaitu berkas partikel tidak berada dalam medan gaya kuat, tetapi dalam medan gaya lain, yaitu medan yang menyebabkan partikel yang mula-mula diam dihamburkan. Rumusan pada pers. [18.7] untuk kasus ini dapat pula digunakan; persamaan ini menyatakan penampang lintang yang bergantung pada sudut hambur dalam sistem  $S$ . Untuk mencari penampang lintang yang bergantung pada sudut hambur  $\Theta$  dalam sistem  $L$ , sudut  $\chi$  pada pers. [18.7] harus digantikan dengan  $\Theta$  dengan menggunakan pers. [17.4]. Maka akan diperoleh pernyataan penampang lintang, baik dalam sudut datang berkas partikel ( $\chi$  yang diganti dengan  $\Theta_1$ ), maupun terhadap partikel diam ( $\chi$  yang diganti dengan  $\Theta_2$ ).

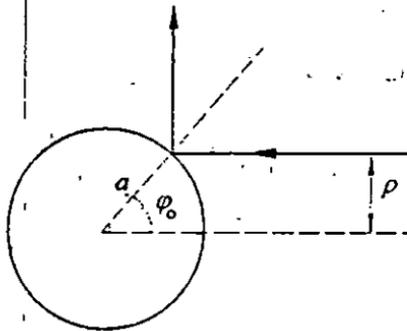
**Contoh 25:** Hitung penampang lintang partikel di dalam sebuah bola pejal berjari-jari  $a$  (dalam hal ini interaksi  $U = \infty$  pada  $r < a$  dan  $U = 0$  untuk  $r > a$ ).

**Penyelesaian:** Karena partikel di luar bola bergerak bebas, tetapi tidak dapat menembus bola, lintasan partikel terdiri dari dua garis lurus simetris terhadap jari-jari bola pada titik di mana partikel menyentuh permukaan bola (gambar [19]). Dari gambar [19], diperoleh

$$\varrho = a \sin \varphi_0 = a \sin \frac{\pi - \chi}{2} = a \cos \frac{\chi}{2}$$

---

3) Jika  $Q(c)$  adalah jenis diketahui, harus dilakukan penjumlahan pernyataan ini untuk tiap cabang fungsi tersebut.



Gambar 19:

Substitusikan pers. [18.7] dan [18.8] didapat

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2} \sin \chi d\chi = \frac{a^2}{4} d\Omega, \quad (1)$$

berarti bahwa hamburan di dalam sistem  $S$  adalah isotrop. Integrasi  $d\delta$  terhadap sudut akan memberikan harga total penampang lintang sebesar  $s = \pi a^2$ , "sesuai permukaan target" yang harus dikenai partikel agar partikel dapat dihamburkan sama dengan penampang lintang bola sendiri.

Untuk mengubah penampang lintang dalam sistem  $L$  sudut  $\chi$  harus diubah dalam  $\Theta_1$  sesuai pers. [17.4]. Perhitungan dapat dilihat pada contoh 19 pada §16 pada pembahasan problem Kepler karena perhitungan pada pers. [17.4] adalah analog dengan pers. [16.5]. Untuk  $m_1 < m_2$  ( $m_1 \equiv$  massa partikel dan  $m_2 \equiv$  massa bola) diperoleh

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{4} \left[ 2 \frac{m_1}{m_2} \cos \Theta_1 + \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\Theta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \Theta_1}} \right] d\Omega_1$$

( $d\Omega_1 = 2\pi \sin \Theta_1 d\Theta_1$ ) Untuk  $m_1 > m_2$  berlaku

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{2} \left[ \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\Theta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \Theta_1}} \right] d\Omega_1$$

Untuk  $m_1 = m_2$  diperoleh

$$d\sigma_1 = a^2 |\cos \Theta_1| d\Omega_1,$$

Dengan demikian, dari pers [1] dapat disimpulkan bahwa  $\chi = 2\Theta_1$  (menurut pers. [17.9]). Selanjutnya untuk bola berada dalam keadaan diam tetap akan diperoleh bahwa  $\chi = \pi - 2\Theta_2$  dan melalui substitusi pada pers. [1] diperoleh

$$d\sigma_2 = a^2 |\cos \Theta_2| d\Omega_2$$

**Contoh 26:** Hitung penampang lintang untuk contoh 25 yang dinyatakan dalam energi  $\varepsilon$  yang hilang dari partikel.

**Penyelesaian:** Energi tersebut adalah energi yang hilang dari partikel bermassa  $m_1$  dan "diambil" oleh partikel  $m_2$ . Menurut pers. [17.5] dan [17.7].

$$\varepsilon = E'_2 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_\infty^2 \sin^2 \frac{\chi}{2} = \varepsilon_{\text{maks}} \sin^2 \frac{\chi}{2},$$

maka didapat

$$d\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon_{\text{maks}} \sin \chi d\chi,$$

dengan menggunakan pers. [1] pada contoh 25 diperoleh

$$d\sigma = \pi a^2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{\text{maks}}}$$

Distribusi harga  $\varepsilon$  dari partikel yang dihamburkan adalah homogen dalam interval total  $\varepsilon$  dari nol hingga  $\varepsilon_{\text{maks}}$ .

**Contoh 27:** Bagaimana ketergantungan penampang lintang tumbukan terhadap  $v_\infty$  dari partikel yang dihamburkan di dalam medan

$$U \sim r^{-n} ?$$

**Penyelesaian:** Jika energi potensial adalah suatu fungsi homogen dari

$\nabla k = -n$ , berlaku pers. [10.3] untuk lintasan yang mirip  
 $\varrho \propto v^{-2/n}$  atau

$$\varrho = v_{\infty}^{-2/n} f(\chi)$$

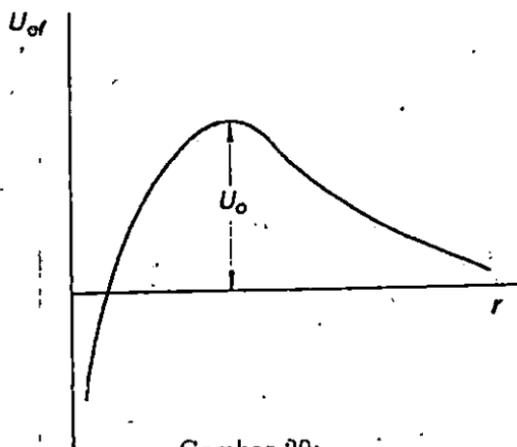
(sudut pembelokan partikel  $\chi$  untuk lintasan yang mirip adalah sama).  
 Dengan menggunakan pers. [18.6] didapat:

$$d\sigma = v_{\infty}^{-4/n} d\Omega$$

**Contoh 28:** Hitung penampang lintang tumbukan untuk partikel yang  
 "jatuh" di pusat medan potensial  $U = -ar^{-2}$  !

**Penyelesaian :** Setiap partikel yang "jatuh" di pusat medan gaya yang  
 memenuhi kondisi  $2a > m \varrho^2 v_{\infty}^2$  (lihat pers. [14.11]), atau jika parameter  
 tumbukan tidak melebihi harga

$$\varrho_{\text{maks}} = \sqrt{\frac{m \varrho^2 v_{\infty}^2}{2r^2}}$$



Gambar 20:

Maka diperoleh penampang lintang tumbukan sebesar

$$\sigma = \pi \varrho_{\text{maks}}^2 = \frac{2\pi\alpha}{mv_{\infty}^2}$$

**Contoh 29:** Hitung penampang lintang tumbukan untuk partikel yang "jatuh" di pusat medan potensial  $U = -ar^{-n}$  ( $n > 2$ ,  $a > 0$ ) !

**Penyelesaian:** Ketergantungan energi potensial efektif terhadap jarak  $r$

$$U_{ef} = \frac{m_0^2 v_\infty^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r^n}$$

diilustrasikan pada gambar [20] dengan harga maksimum

$$(U_{ef})_{maks} = U_0 = \frac{(n-2)\alpha}{2} \left( \frac{m_0^2 v_\infty^2}{\alpha n} \right)^{\frac{n}{n-2}}$$

Di pusat gaya akan "jatuh" partikel untuk  $U_0 < E$ . Dalam hal ini  $\varrho_{maks}$  ditentukan dari kondisi  $U_0 = E$  sehingga didapat

$$\sigma = U_0 = \pi n(n-2) \left( \frac{\alpha}{m v_\infty^2} \right)^{\frac{2}{n}}$$

**Contoh 30:** Hitung penampang lintang tumbukan bahwa partikel bermassa  $m_1$  jatuh pada permukaan sebuah bola bermassa  $m_2$  dan berjari-jari  $R$  yang dicari berdasarkan hukum Newton!

**Penyelesaian:** Kondisi bahwa partikel jatuh pada permukaan bola yang memenuhi ketidaksamaan  $r_{min} < R$  dengan  $r_{min}$  adalah jarak lintasan terdekat terhadap titik pusat bola. Harga yang dibolehkan dari  $\varrho$  dapat diperoleh dari  $r_{min} = R$  yang akan menyelesaikan persamaan  $U_{ef} = E$  atau

$$\frac{m_1 v_\infty^2 \varrho_{maks}}{2R^2} - \frac{\alpha}{R} = \frac{m_1 v_\infty^2}{2}$$

dengan  $a = Vgm_1 m_2$  ( $V$  melambangkan konstanta gravitasi) dan apabila disubstitusikan untuk  $m \approx m_1$  mengandaikan bahwa  $m_2 \gg m_1$  dengan menggantikan  $\varrho_{maks}$  maka didapat

$$\sigma = \pi R^2 \left( 1 + \frac{2\gamma m_2}{R v_\infty^2} \right)$$

Pada  $v_{\infty} \rightarrow \infty$  maka harga penampang lintang tumbukan akan menjadi penampang lintang bola sendiri.

### Contoh 31

Buatlah rekonstruksi bentuk medan gaya  $U(r)$  jika ketergantungan penampang lintang tumbukan dari sudut hambur pada energi  $E$  diketahui; dianggap bahwa  $U(r)$  adalah fungsi monoton menurun terhadap  $r$  (medan gaya tolak menolak) dan dengan  $U(0) > E$ ,  $U(\infty) = 0$  (dari O.B. Firsov, 1953).

### Penyelesaian

Integrasi  $d\sigma$  terhadap sudut hambur dapat dicari dari persamaan sebagai berikut

$$\int_x^{\pi} \frac{d\sigma}{d\chi} d\chi = \pi \varrho^2 \quad (1)$$

Bergantung pada kuadrat parameter tumbukan, sehingga fungsi  $g(\chi)$  dan  $\chi(\varrho)$  dianggap telah diketahui. Selanjutnya lihat hubungan:

$$s = \frac{1}{r}, \quad x = \frac{1}{\varrho^2}, \quad w = \sqrt{1 - \frac{U}{E}} \quad (2)$$

Maka pers. [18.2] dan [18.1] dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\frac{\pi - \chi(x)}{2} = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{x w^2 - s^2}}, \quad (3)$$

dengan  $s_0(x)$  adalah suatu penyelesaian fungsi  $xw^2(S_0) - S_0^2 = 0$ .

Pers. [3] adalah persamaan integral untuk fungsi  $w(s)$ ; persamaan integral ini dapat diselesaikan dengan metode yang analog dengan §12. Ruas kiri dan kanan pers. [3], dibagi dengan  $\sqrt{\alpha - x}$  dan mengintegrasikannya dari 0 hingga  $\alpha$  sehingga diperoleh

$$\int_0^{\alpha} \frac{\pi - \chi(x)}{2} \frac{dx}{\sqrt{\alpha - x}} = \int_0^{\alpha} \int_0^{s_0} \frac{ds dx}{\sqrt{(xw^2 - s^2)(\alpha - x)}} \\ = \int_0^{s_0(\alpha)} \int_{x(s_0)}^{\alpha} \frac{ds dx}{\sqrt{(xw^2 - s^2)(\alpha - x)}} = \int_0^{s_0(\alpha)} \frac{ds}{w}$$

atau dengan integrasi parsial pada ruas kiri persamaan didapat

$$\pi \sqrt{\pi} - \int_0^{\alpha} \sqrt{\alpha - x} \frac{d\chi}{dx} = \int_0^{s_0(\alpha)} \frac{ds}{w}$$

Relasi ini kemudian diturunkan terhadap  $\alpha$  dan substitusikan  $S_0(\alpha)$  pada  $s$  dan  $\alpha$  menggantikan  $s^2/w^2$ . Dengan diferensiasi tersebut kemudian didapat

$$-\pi d\left(\frac{s}{w}\right) - \frac{1}{2} d\left(\frac{s^2}{w^2}\right) \int_0^{s^2/w^2} \frac{\chi' dx}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2} - x}} = \frac{\pi}{w} ds$$

atau

$$-\pi d \ln w = d\left(\frac{s}{w}\right) \int_0^{s^2/w^2} \frac{\chi' dx}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2} - x}}$$

Persamaan ini dapat diintegrasikan secara langsung, dengan integrasi terhadap  $x$  dan  $s/w$  pada ruas kanan dapat saling dipertukarkan. Jika diamati bahwa  $s = 0$  (atau  $r \rightarrow \infty$ ),  $w = 1$  (berarti  $U = 0$ ) dan mensubstitusikan kembali variabel  $r$  dan  $\varrho$ , hasil akhir perhitungan di atas akan diperoleh dua bentuk yang ekuivalen sebagai berikut

$$w = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{rw}^{\infty} \operatorname{arc} \cosh \frac{\varrho}{rw} \frac{d\chi}{d\varrho} d\varrho \right\} =$$

$$\exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{r_w}^{\infty} \frac{\chi(\varrho)}{\sqrt{\varrho^2 - r^2 u^2}} \right\}. \quad (4)$$

Persamaan ini secara implisit menentukan fungsi  $w(r)$  akan diperoleh  $U(r)$  untuk semua  $r > r_{\min}$ . atau berarti pula sebagai posisi partikel yang dihamburkan dalam interval  $r$  dengan harga energi yang diketahui sebesar  $E$ .

## 19. Rumusan Rutherford

Suatu penggunaan penting rumusan yang telah diberikan di atas adalah hamburan partikel bermuatan dalam medan Coloumb.

Jika potensial  $U = \alpha r^{-1}$  disubstitusikan pada pers. [18.4] dan mengintegrasikan persamaan tersebut, diperoleh

$$\varphi_0 = \arccos \left[ \frac{\frac{\alpha}{m v_{\infty}^2 \varrho}}{\sqrt{1 + \left( \frac{\alpha}{m v_{\infty}^2 \varrho} \right)^2}} \right],$$

dan diperoleh pula

$$\varrho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_{\infty}^4} \tan^2 \varphi_0$$

atau dengan menggantikan  $\varphi_0 = (\pi - \chi)/2$  menurut pers.[18.1] didapat

$$\varrho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_{\infty}^4} \cot^2 \frac{\chi}{2}. \quad (19.1)$$

Kemudian turunkan pers.[19.1] terhadap  $\chi$  dan substitusikan ke pers. [18.7] atau [18.8], maka

$$d\sigma = \pi \left( \frac{\alpha}{m v_{\infty}^2} \right)^2 \frac{\cos \chi/2}{\sin^3 \chi/2} d\chi \quad (19.2)$$

atau

$$d\sigma = \pi \left( \frac{\alpha}{m v_{\infty}^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \chi/2}. \quad (19.3)$$

Rumusan ini disebut pula sebagai rumusan Rutherford. Harus pula diketahui bahwa penampang lintang tumbukan  $\sigma$  tidak bergantung pada tanda  $\alpha$  sehingga persamaan ini berlaku pula baik untuk gaya tolak menolak dan tarik menarik Coulomb.

Pers. [19.3] menggambarkan penampang lintang dalam sistem acuan di mana pusat massa sistem kedua partikel berada dalam keadaan diam. Transformasi persamaan ini untuk sistem  $L$  dapat dicari dengan menggunakan pers. [17.4]. Untuk partikel yang berada dalam keadaan diam dapat dilakukan substitusi  $\chi = \pi - 2\Theta_2$  pada pers. [19.2] sehingga didapat

$$d\sigma_2 = 2\pi \left( \frac{\alpha}{m v_{\infty}^2} \right)^2 \frac{\sin \Theta_2}{\cos^2 \Theta_2} d\Theta_2 = \left( \frac{\alpha}{m v_{\infty}^2} \right)^2 \frac{d\Omega_2}{\cos^2 \Theta_2}. \quad (19.4)$$

Untuk partikel datang secara umum melalui transformasi ini diperoleh rumusan yang tidak praktis sehingga dalam persoalan ini akan dipandang hanya dua kasus.

Jika massa partikel penghambur  $m_2$  besar dibanding massa partikel yang dihamburkan  $m_1$ ,  $\chi \approx \pi - 2\Theta_1$  dan  $m \approx m_1$  sehingga

$$d\sigma_1 = \left( \frac{\alpha}{E_1} \right)^2 \frac{d\Omega_1}{\sin^4 \frac{\Theta_1}{2}} \quad (19.5)$$

dengan  $E_1 = m_1 v_{\infty}^2/2$ , yaitu energi partikel datang.

Jika massa kedua partikel sama ( $m_1 = m_2$ ), dari pers. [17.9].  $\chi = 2\Theta_1$ , dan disubstitusikan ke pers. [19.2] didapat

$$d\sigma_1 = 2\pi \left( \frac{\alpha}{E_1} \right)^2 \frac{\cos \Theta_1}{\sin^3 \Theta_1} d\Theta_1 = \left( \frac{\alpha}{E_1} \right)^2 \frac{\cos \Theta_1}{\sin^4 \Theta_1} d\Omega_1. \quad (19.6)$$

Jika tidak hanya massa kedua partikel sama, kedua partikel khususnya identik, tidak akan ada maknanya untuk membedakan antara partikel yang diam dan yang dihamburkan setelah terjadi tumbukan. Penampang lintang tumbukan total untuk semua partikel didapat dari penjumlahan  $d\sigma_1$  dan  $d\sigma_2$  dan dengan mensubstitusikan  $\Theta_1$  dan  $\Theta_2$  melalui sudut bersama, yaitu  $\Theta$ , diperoleh

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4 \Theta} + \frac{1}{\cos^4 \Theta}\right) \cos \Theta d\Omega. \quad (19.7)$$

Kembali ke persamaan umum, pers. [19.2] dan dengan pertolongannya akan dihitung distribusi partikel yang dihamburkan terhadap energi yang digunakan dalam tumbukan. Pada perbandingan sembarang antara massa partikel dari partikel yang dihamburkan ( $m_1$ ) dan partikel yang menghamburkan ( $m_2$ ) berlaku kecepatan yang diperoleh pada akhir proses sebagai fungsi dari sudut hambur di dalam sistem  $S$  pada pers. [17.5], yaitu :

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_\infty \sin \frac{\chi}{2}.$$

Oleh karena itu, diperoleh pula untuk energi partikel  $m_2$  atau energi yang hilang dari partikel  $m_1$  sebesar:

$$\varepsilon = \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{2\mu^2}{m_2} v_\infty^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}.$$

Jika  $\sin \chi/2$  dinyatakan dalam  $\varepsilon$  dan disubstitusikan ke pers. (19.2), diperoleh

$$d\sigma = 2\pi \frac{\alpha^2}{m_2 v_\infty^2} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2}. \quad (19.8)$$

Rumusan ini menjawab pertanyaan menentukan penampang lintang tumbukan sebagai fungsi dari energi yang hilang; energi ini akan mempunyai harga dari nol hingga  $\varepsilon_{\text{maks.}} = 2m^2 v_\infty^2 / m_2$ .

**Contoh 32**

Hitunglah penampang lintang tumbukan untuk hamburan di dalam medan potensial sebesar  $U = ar^{-2}$ , ( $a > 0$ ).

**Penyelesaian**

Sudut hambur adalah

$$\chi = \pi \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha}{m v_{\infty}^2}}} \right],$$

dan penampang lintang tumbukan adalah

$$d\sigma = \frac{2\pi^2 \alpha}{m v_{\infty}^2} \frac{\pi - \chi}{\chi^2 (2\pi - \chi)^2} \frac{d\Omega}{\sin \chi}$$

**Contoh 33**

Hitung penampang lintang tumbukan untuk hamburan di dalam medan potensial sumur bola berjari-jari  $a$  dan kedalaman  $U_0$  (berarti pada medan  $U = 0$  untuk  $r > a$  dan  $U = -U_0$  untuk  $r < a$ ).

**Penyelesaian**

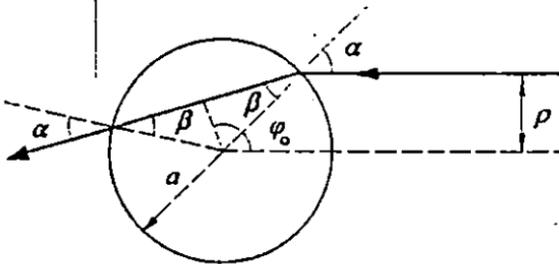
Lintasan berbentuk garis lurus dari partikel pada saat memasuki medan potensial, demikian pula pada saat meninggalkan daerah medan akan mengalami pembelikan. Berdasarkan contoh pada pembahasan momentum sudut datang  $\alpha$  dan sudut pembelikan  $\beta$  (gambar [21]), keduanya mempunyai relasi sebagai berikut

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \quad n = \sqrt{1 + \frac{2U_0}{m v_{\infty}^2}}$$

dan penampang lintang tumbukan adalah

$$\frac{\sin(\alpha - \chi/2)}{\sin \alpha} = \cos \frac{\chi}{2} - \cot \alpha \sin \frac{\chi}{2} = \frac{1}{n}$$

$\alpha$  dapat ditentukan dari hubungan ini dan terlihat dari gambar [20]



Gambar 21:

relasi

$$a \sin \alpha = \rho$$

dapat dieliminasi sehingga diperoleh hubungan  $\chi$  dan  $\rho$  sebagai berikut

$$\rho^2 = a^2 \frac{n^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}}{n^2 + 1 - 2n \cos \frac{\chi}{2}}$$

Dengan menurunkan persamaan di atas akan diperoleh penampang lintang tumbukan

$$d\sigma = \frac{a^2 n^2}{4 \cos \frac{\chi}{2}} \frac{(n \cos \frac{\chi}{2} - 1)(n - \cos \frac{\chi}{2})}{(1 + n^2 - 2n \cos \frac{\chi}{2})^2} d\Omega$$

Sudut  $\chi$  akan mempunyai harga dari nol (untuk  $\rho = 0$ ) hingga  $\chi_{\text{maks}}$  (untuk  $\rho = a$ ) yang diperoleh dari persamaan:

$$\cos \frac{\chi_{\text{maks}}}{2} = \frac{1}{n}$$

Penampang lintang total yang diperoleh melalui integrasi  $d\sigma$  terhadap seluruh sudut yang termasuk di dalam kerucut  $\chi < \chi_{\text{maks}}$ , adalah akan sama dengan luas penampang lintang bola  $\pi a^2$ .

## 20. Hamburan pada Sudut Kecil.

Perhitungan penampang lintang akan lebih mudah jika tumbukan yang terjadi mempunyai parameter tumbukan yang besar, di mana medan potensial  $U$  lemah sehingga mempunyai sudut pembelokan yang kecil. Dalam kasus ini perhitungan dapat dilakukan secara langsung pada sistem  $L$ , tanpa harus memandang kejadian di dalam sistem  $S$  terlebih dahulu.

Sebagai sumbu  $x$  dipilih arah jatuhnya partikel (bermassa  $m_1$ ), bidang  $x - y$  dianggap merupakan bidang hamburan. Jika momentum partikel setelah tumbukan disimbolkan dengan  $\mathbf{p}'_1$ , diperoleh relasi sebagai berikut

$$\sin \Theta_1 = \frac{p'_{1y}}{p'_1}.$$

Untuk sudut pembelokan yang kecil dengan pendekatan  $\sin \Theta_1 \approx \Theta_1$  dan penyebut  $p'_1$  pada persamaan di atas dapat digantikan dengan momentum awal  $p_1 = mv_\infty$ . Kemudian didapat:

$$\Theta_1 \approx \frac{p'_{1y}}{m v_\infty} \quad (20.1)$$

Karena  $p'_1 = F_y$ , penambahan komponen momentum pada arah sumbu  $y$  adalah sama dengan

$$p'_{1y} = \int_{-\infty}^{+\infty} F_y dt. \quad (20.2)$$

Dalam hal ini gaya

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{y}{r}.$$

Integral pada pers. [20.2] berlaku untuk harga  $U$  yang kecil sehingga dalam perhitungan dapat dilakukan dengan cara yang sama, partikel tidak akan dibelokkan melalui lintasan awalnya, yaitu dengan lintasan

garis lurus (sepanjang garis lurus  $y = \varrho$ ) dan beraturan (dengan kecepatan  $v_\infty$ ). Dengan mensubstitusikan ke pers. [20.2]

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\varrho}{r}, \quad dt = \frac{dx}{v_\infty}$$

dan diperoleh

$$p'_{1y} = -\frac{\varrho}{v_\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{dx}{r}$$

Akhirnya harus dilakukan perubahan dari integrasi terhadap  $dx$  digantikan dengan integrasi terhadap  $dr$ . Untuk lintasan berbentuk garis lurus diketahui bahwa  $r^2 = x^2 + y^2 + \varrho^2$ , maka harga  $r$ , dengan berubahnya harga  $x$  dari  $-\infty$  ke  $+\infty$ , akan berubah pula dari  $\infty$  ke  $\varrho$  dan kembali lagi ke  $\infty$ . Dengan demikian, integral terhadap  $dx$  dapat dikalikan dengan 2 dan berubah menjadi integral untuk  $dr$  dari  $\varrho$  ke  $\infty$ , dengan  $dx$  dinyatakan sebagai

$$dx = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \varrho^2}}$$

Untuk sudut pembelokan pada pers. [20.1] akhirnya diperoleh <sup>4)</sup>

$$\Theta_1 = -\frac{2\varrho}{m_1 v_\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \varrho^2}}, \quad (20.3)$$

yang menyatakan ketergantungan  $\Theta_1$  terhadap  $\varrho$  pada sudut pembelokan yang kecil. Penampang lintang hamburan (dalam sistem  $L$ ) diperoleh dari pers. [18.8] dalam  $\Theta_1$ , selain dalam  $x$  dan  $\sin \Theta_1$  dapat digantikan dengan  $\Theta_1$

$$d\sigma = \left| \frac{d\varrho}{d\Theta_1} \right| \frac{\varrho(\Theta_1)}{\Theta_1} d\Omega. \quad (20.4)$$

4) Jika penurunan yang sama dilakukan di dalam sistem  $S$  maka akan diperoleh pernyataan yang sama untuk  $\chi$ , yaitu dengan  $m_1$  digantikan oleh  $m_2$ ; diketahui bahwa berdasarkan pers. [17.4]  $\Theta_1$  dan  $\chi$  saling berhubungan dalam relasi.

$$\Theta_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \chi$$

**Contoh 34**

Hitung pers. [20.3] dari pers. [18.4] !

**Penyelesaian**

Untuk menghindari hasil integrasi divergen, pers. [18.4] dapat ditulis dalam bentuk

$$\varphi_0 = -\frac{\partial}{\partial \varrho} \int_{r_{\min}}^R \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2}} dr.$$

Sebagai batas integral diambil  $R$  yang mempunyai harga tak berhingga. Karena  $U$  mempunyai harga yang kecil, suku dalam tanda akar dapat ditulis dalam bentuk deret  $U$ ; secara pendekatan  $r_{\min}$  diganti dengan  $\varrho$ , maka

$$\varphi_0 = \int_{\varrho}^{\infty} \frac{\varrho dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{r^2}}} + \frac{\partial}{\partial \varrho} \int_{\varrho}^{\infty} \frac{U(r) dr}{mv_\infty^2 \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{r^2}}}.$$

Pada harga batas untuk  $R \rightarrow \infty$  integral pada suku pertama akan memberikan harga  $\pi/2$ ., sedangkan integral suku kedua dapat diselesaikan secara persial dan diperoleh

$$\begin{aligned} \chi = \pi - 2\varphi_0 &= 2 \frac{\partial}{\partial \varrho} \int_{\varrho}^{\infty} \frac{\sqrt{r^2 - \varrho^2}}{mv_\infty^2} \frac{dU}{dr} dr = \\ &= \frac{2m}{mv_\infty^2} \int_{\varrho}^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \varrho^2}}, \end{aligned}$$

Yang ekuivalen dengan rumusan pada pers. [20.3].

**Contoh 35**

Hitung penampang lintang untuk hamburan dalam medan  $U = \alpha/r^n$  ( $n > 0$ ).

**Penyelesaian**

Dari pers. [20.3] berlaku

$$\Theta_1 = \frac{2 \varrho \alpha n}{m v_\infty^2} \int_{\varrho}^{\infty} \frac{dr}{r^{n+1} \sqrt{r^2 - \varrho^2}}.$$

Dengan mensubstitusikan  $\varrho^2/r^2 = u$  integral akan menjadi integral Euler (fungsi  $B$ ). Jika penyelesaiannya dinyatakan dalam fungsi  $\Gamma$ .

$$\Theta_1 = \frac{2 \varrho \alpha \sqrt{\pi}}{m v_\infty^2 \varrho^n} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Jika pada pers. [20.1]  $\varrho$  dapat dinyatakan dalam  $\Theta_1$ , diperoleh:

$$d\sigma = \frac{1}{n} \left[ \frac{2\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\alpha}{m v_\infty^2} \right]^{\frac{2}{n}} \Theta_1^{-2\left(1+\frac{1}{n}\right)} d\Omega.$$

## Bab V

# Getaran Kecil

### 21 Getaran Bebas 1 Dimensi

Suatu ciri gerak yang sangat banyak terdapat di dalam sistem mekanis adalah getaran kecil (*small oscillation*), yaitu gerak yang terjadi di sekitar titik kesetimbangan sistem. Pembahasan sistem demikian secara sederhana dapat dimulai dengan memandang sistem yang mempunyai satu *derajat kebebasan*.

Dalam keadaan setimbang, sistem berada dalam energi potensial  $U(q)$  minimum, suatu simpangan terhadap titik setimbang menyebabkan adanya gaya sebesar  $-dU/dq$  yang cenderung mempengaruhi sistem untuk kembali kekeadaan seimbang. Misalnya, bahwa simpangan yang berhubungan dengan potensial minimum dalam koordinat diperumum adalah  $q$  dan  $q_0$ . Apabila sistem mengalami simpangan yang kecil terhadap titik setimbangnya, akan terdapat perbedaan potensial sebesar  $uq - U(q_0)$  yang dapat ditulis dalam bentuk deret terhadap  $q - q_0$ . Karena simpangan yang kecil, pendekatan dapat dianggap hanya suku pertama yang berperan penting. Suku tersebut mengandung koordinat pangkat dua sebagai berikut

$$U(q) - U(q_0) \cong \frac{k}{2} (q - q_0)^2,$$

$k$  merupakan koefisien positif (adalah sama dengan turunan kedua  $U''(q)$  pada posisi  $q = q_0$ ). Apabila energi potensial dinormalisir dengan mengganggap  $U(q_0) = 0$ , terdapat hubungan

$$x = q - q_0 \quad (21.1)$$

yaitu sebagai simpangan terhadap posisi setimbang. Dengan demikian, energi potensial sebagai fungsi  $x$  dapat ditulis kembali dalam bentuk.

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2. \quad (21.2)$$

Energi kinetik sistem yang mempunyai satu derajat kebebasan secara umum dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 = \frac{1}{2} a(q) \dot{x}^2.$$

Dalam pendekatan yang dibuat fungsi  $a(q)$  dapat diambil dari harganya pada posisi  $q = q_0$ . Untuk singkatnya, jika diambil<sup>1)</sup>

$$a(q_0) = m$$

maka diperoleh fungsi Lagrange suatu sistem getaran kecil satu dimensi<sup>2)</sup>

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2. \quad (21.3)$$

Dari persamaan ini diperoleh persamaan gerak sebagai berikut

$$m \ddot{x} + k x = 0 \quad (21.4)$$

atau

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (21.5)$$

dengan

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (21.6)$$

1) Patut dicatat bahwa besaran  $m$  hanya berhubungan dengan massa jika  $x$  adalah dalam koordinat Cartesian.

2) Sistem ini biasanya sering disebut sebagai *osilator*.

Persamaan diferensial pada pers. [21.5] mempunyai dua penyelesaian homogen  $\cos \omega t$  dan  $\sin \omega t$  sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (21.7)$$

atau jika ditulis dalam bentuk lebih sederhana

$$x = a \cos(\omega t + \alpha). \quad (21.8)$$

Karena  $\cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha$ , dan dibandingkan dengan pers. [21.7] maka semua konstanta ( $c_1$ ,  $c_2$ , dan  $\alpha$ ) pada persamaan tersebut mempunyai hubungan sebagai berikut

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \text{dan} \quad \tan \alpha = -\frac{c_2}{c_1}. \quad (21.9)$$

Penyelesaian persamaan gerak dari getaran kecil ini dapat diartikan sebagai persamaan getaran harmonik terhadap titik kesetimbangannya. Konstanta  $a$  di depan faktor periode pada pers. [21.8] disebut *amplitudo getaran* dan argumennya disebut sebagai *fase getaran*,  $\alpha$  dianggap sebagai fase awal, harganya bergantung pada pemilihan titik awal. Besaran  $\omega$  disebut sebagai *frekuensi sudut getaran*; dalam fisika teori biasanya disebut sebagai frekuensi saja.

Frekuensi merupakan karakteristik dasar dari getaran; harganya tidak bergantung pada keadaan awal, tetapi hanya dari sifat-sifat mekanis sistem (lihat pers. [21.6],  $\omega$  hanya bergantung pada  $k$  dan  $m$  yang melambangkan sifat mekanis sistem). Patut pula dicatat bahwa sifat dari frekuensi demikian hanya berhubungan dengan getaran (kecil) yang beramplitudo kecil, dan untuk pendekatan lebih jauh (untuk getaran beramplitudo besar, hubungan ini tidak lagi berlaku). Secara matematis sifat seperti ini berhubungan erat dengan ketergantungan energi potensial terhadap koordinat<sup>3)</sup>

Energi suatu sistem yang bergetar menurut getaran kecil adalah:

---

3) Dalam kasus ini hubungan frekuensi pada pers. [21.6] tidak lagi berlaku, yaitu jika fungsi  $u(x)$  pada posisi  $x = 0$  mempunyai harga minimum berderajat tinggi, yaitu  $\sim x^n$ ;  $n > 2$  (lihat contoh 13 pada § 11).

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$$

atau dengan mensubstitusikan dari pers. [21.8]

$$E = \frac{1}{2} m \omega a^2, \quad (21.10)$$

yaitu sebanding dengan amplitudo getaran kuadrat.

Untuk kepentingan perhitungan seringkali berguna bahwa persamaan getaran ditulis sebagai suku real dari fungsi yang bergantung pada waktu yang ditulis sebagai

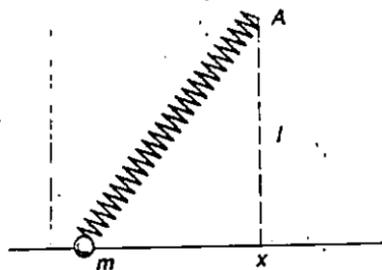
$$x = \text{Re} \{ A e^{i\omega t} \}, \quad (21.11)$$

dengan  $A$  merupakan konstanta kompleks. jika ditulis dalam bentuk

$$A = a e^{i\alpha}, \quad (21.12)$$

digabungkan dengan pers. [21.11] akan diperoleh kembali pers. [21.8]. Konstanta  $A$  disebut sebagai *amplitudo kompleks* dan argumennya sama dengan fase awal.

Penulisan persamaan getaran dalam bentuk eksponensial secara matematis lebih mudah dibanding jika ditulis dalam faktor trigonometri karena dengan diferensiasi bentuknya tidak mengalami perubahan. Selama hanya dilakukan perhitungan linier (penambahan, perkalian dengan konstanta koefisien, diferensiasi dan integrasi), tanda suku Real



Gambar 22:

(Re) dapat dihilangkan dan dapat dikembalikan ke bentuk semula setelah selesai dilakukan perhitungan<sup>4)</sup>.

**Contoh 36:** Nyatakan amplitudo dan fase awal getaran dari harga awal koordinat  $x_0$  dan kecepatan  $v_0$ .

**Penyelesaian**

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad \tan \alpha = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

**Contoh 37:** Cari perbandingan dari  $\omega$  dan  $\omega'$  dari getaran molekul diatomik yang mengandung atom-atom isotop berbeda; massa masing-masing atom adalah  $m_1, m_2$  dan  $m'_1, m'_2$ .

**Penyelesaian:** Apabila interaksi antara atom-atom isotop sama, berlaku  $k = k'$ . Sebagai koefisien  $m$  dalam energi kinetik molekul adalah sama dengan massa reduksi. Dari pers. [21.6] diperoleh

$$\frac{\omega}{\omega'} = \sqrt{\frac{m_1 m_2 (m'_1 + m'_2)}{m'_1 m'_2 (m_1 + m_2)}}$$

**Contoh 38:** Tentukan frekuensi getaran suatu titik dengan massa  $m$  yang dapat bergerak sepanjang garis lurus dan tergantung kepada sebuah pegas dengan titik ujung lainnya terikat erat pada pegas di titik A (gambar [22]); titik A berada pada jarak  $l$  dari garis lurus. jika panjang pegas adalah  $l$ , akan timbul gaya  $F$  pada pegas.

**Penyelesaian:** Energi potensial pegas (hingga orde yang cukup kecil) adalah sama dengan hasil kali dari gaya dan perubahan  $\delta$  panjang di dari pegas. Untuk  $x \ll l$  berlaku

$$\delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l \approx \frac{x^2}{2l}$$

4) Pada operasi nonlinier, misalnya dalam hal membuat kuadrat, tidak berlaku bahwa bilangan kompleks  $A$  secara umum sama dengan  $\text{Re}A^2 \neq (\text{Re}A)^2$

sehingga diperoleh bahwa  $U = F x^{3/2}$ . Karena energi kinetik sama dengan  $mx^2/2$ , didapat pula bahwa

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{ml}}$$

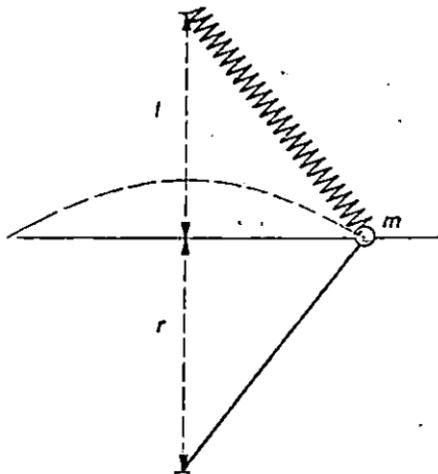
**Contoh 39:** Seperti pada contoh 38 titik bermassa  $m$  bergerak dengan lintasan lingkaran (gambar [23]).

**Penyelesaian:** Dalam kasus ini perubahan panjang pegas untuk  $j \ll 1^5$ .

$$\delta l = \sqrt{r^2 + (l+r)^2 - 2r(r+l) \cos \varphi} - l \approx \frac{r(r+l)}{2l} \varphi^2,$$

dan untuk energi kinetik berlaku  $T = m r_j^2/2$ . Dengan demikian, diperoleh frekuensi getaran sebagai berikut

$$\omega = \sqrt{\frac{F(r+l)}{r l m}}$$



Gambar 23:

5) Pusat dari  $\varphi$  terletak pada titik tengah lingkaran.

**Contoh 40:** Tentukan frekuensi getaran pada bandul yang terdapat pada gambar [2] dengan titik yang tergantung (massanya adalah  $m_1$ ) dapat bergerak pada arah horizontal.

**Penyelesaian:** Untuk  $\varphi \ll l$  dapat diperoleh dari contoh 17 pada pembahasan gerak dalam medan sentral (§14) diperoleh persamaan

$$T = \frac{m_1 m_2 l^2}{2(m_1 + m_2)} \dot{\varphi}^2 \quad U = \frac{m_2 g l}{2} \varphi^2,$$

Dengan demikian, diperoleh frekuensi getaran sebagai

$$\omega = \sqrt{\frac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l}}.$$

**Contoh 41:** Bagaimana bentuk kurva gerak dalam medan gaya berat sehingga periode getaran tidak bergantung pada amplitudo ?

**Penyelesaian:** Kurva yang memenuhi pertanyaan di atas dipastikan jika energi potensial partikel memenuhi  $U = k s^2/2$ , dengan  $s$  merupakan simpangan terhadap posisi setimbang, yaitu sebagai tali busur yang dibentuk oleh partikel; dalam hal ini energi kinetik adalah sama dengan  $T = ms^2/2$  ( $m$  adalah massa partikel) dan frekuensi getaran sama dengan  $w = \sqrt{k/m}$ , tidak akan bergantung pada harga awal dari  $s$ . Dalam medan gaya berat berlaku  $U = mgy$ , dengan  $y$  adalah koordinat sumbu vertikal. Untuk itu  $k s^2 / 2 = mgy$  atau

$$y = \frac{\omega^2}{2g} s^2.$$

Selain itu,  $ds^2 = dx^2 + dy^2$  atau dengan perkataan lain diperoleh

$$x = \sqrt{\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 - 1} dy.$$

Integrasi persamaan di atas dapat dilakukan dengan mensubstitusikan

$$y = \frac{g}{4\omega^2} (1 - \cos \xi),$$

sehingga diperoleh

$$x = \frac{g}{4\omega^2} (\xi + \sin \xi).$$

Kedua rumusan terakhir merupakan persamaan parameter dari kurva yang dicari; kurva akan berbentuk *sikloida*.

## 2.2 Getaran Dipaksakan

Lihat suatu getaran dalam pengaruh gaya luar yang berubah-ubah. Getaran seperti ini disebut *getaran dipaksakan*, untuk membedakannya dari *getaran bebas* yang telah dibahas pada bab sebelumnya. Apabila dianggap bahwa simpangan getaran sangat kecil, seharusnya gaya yang berubah-ubah ini cukup kecil sehingga tidak menyebabkan terjadi simpangan yang terlalu besar.

Untuk kasus ini, disamping sistem mempunyai energi potensial  $kx^2$ , terdapat pula energi potensial lain sebesar  $U_e(x, t)$  yang disebabkan oleh adanya gaya luar. Jika energi potensial ini dideretkan terhadap gaya  $x$  yang kecil, diperoleh

$$U_e(x, t) \simeq U(0, t) + x \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0}$$

Suku pertama hanya bergantung pada waktu sehingga dalam fungsi Lagrange dapat diabaikan (sebagai turunan total dari suatu fungsi lain yang bergantung pada waktu). Pada suku kedua  $-\partial U/\partial x$  berasal dari gaya luar yang bekerja pada posisi setimbang sistem dan merupakan fungsi terhadap waktu yang telah diketahui; misalnya fungsi tersebut adalah  $F(t)$ . Dengan demikian pada energi potensial akan muncul suku  $-xF(t)$  sehingga fungsi Lagrange sistem dapat ditulis menjadi

$$L = \frac{m \dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xF(t). \quad (22.1)$$

Persamaan gerak yang berhubungan dengan fungsi Lagrange di atas adalah

$$\ddot{x} + kx = F(t)$$

atau

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t), \quad (22.2)$$

dengan  $\omega$  adalah frekuensi dari getaran bebas.

Penyelesaian persamaan diferensial homogen umumnya dapat dicari dengan mudah, yaitu mengandung konstanta sebagai koefisien dari penjumlahan dua suku  $x = x_0 + x_1$ ; dengan  $x_0$  sebagai penyelesaian umum persamaan homogen dan  $x_1$  adalah penyelesaian partikular (khusus) dari persamaan diferensial inhomogen. Dalam kasus ini  $x_0$  adalah sama seperti penyelesaian untuk getaran bebas (harmonik) yang telah dibahas pada bab sebelumnya.

Pembahasan selanjutnya akan dipandang gaya luar yang periodik, sebagai fungsi waktu dengan frekuensi  $\gamma$

$$F(t) = f \cos(\gamma t + \beta) \quad (22.3)$$

Akan dicari penyelesaian partikular dari pers. [22.2] dalam bentuk  $x_1 = b \cos(\gamma t + \alpha)$ , yaitu dengan faktor periodik yang sama. Jika persamaan ini disubstitusikan ke pers. [22.2], diperoleh bahwa  $b = f/m(\omega^2 - \gamma^2)$ ; dengan menambahkan penyelesaian homogen, akan didapat penyelesaian umum persamaan diferensial [22.2]

$$x = a \cos(\gamma t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t + \beta). \quad (22.4)$$

Konstanta sembarang  $\alpha$  dan  $\beta$  dapat ditentukan dari syarat awal getaran.

Hal ini, berarti bahwa sistem dalam pengaruh gaya luar yang periodik menyebabkan terjadinya gerak, yang sekaligus mengandung dua getaran sekaligus, yaitu getaran sistem dengan frekuensi eigen  $\omega$  dan getaran lain akibat gaya luar dengan frekuensi  $\gamma$ .

Penyelesaian pada pers. [22.4] tidak berlaku apabila dalam getaran terdapat peristiwa *resonansi*, yaitu jika frekuensi gaya luar sama dengan frekuensi eigen sistem. Untuk memperoleh penyelesaian umum persamaan diferensial dalam kasus ini, pers. [22.4] dapat ditulis kembali dalam memisalkan konstanta baru dalam bentuk

$$x = a \cos(\gamma t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} [\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)].$$

Untuk  $\gamma \rightarrow \omega$ , suku kedua akan mempunyai harga tidak tentu karena 0/0 dan dengan menggunakan aturan l'Hospitale diperoleh

$$x = a \cos(\gamma t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} t \sin(\omega t + \beta). \quad (22.5)$$

Hal ini, berarti bahwa dalam kasus resonansi amplitudo getaran akan bertambah secara linier terhadap waktu (selama pertambahan amplitudo tidak terlalu besar, semua teori yang diberikan tidak akan dapat digunakan).

Selanjutnya akan diperhatikan pula bagaimana kelanjutan getaran di dekat daerah resonansi, yaitu jika  $\gamma = \omega + \varepsilon$  ( $\varepsilon$  berharga sangat kecil). Dalam penulisan kompleks, penyelesaian persamaan getaran dapat ditulis dalam bentuk

$$x = A e^{i\omega t} + B e^{i(\omega + \varepsilon)t} = (A + B e^{i\varepsilon t}) e^{i\omega t}. \quad (22.6)$$

Besaran  $A + B e^{i\varepsilon t}$  pada saat periode sama dengan  $2\pi/\omega$ , faktor  $e^{i\omega t}$  tidak banyak mengalami perubahan sehingga pada daerah di dekat resonansi getaran dapat dipandang sebagai getaran lemah dengan amplitudo berubah-ubah<sup>6)</sup>.

Jika amplitudo tersebut dinyatakan sebagai  $C$ , didapat

$$C = iA + B e^{i\varepsilon t}$$

$A$  dan  $B$  masing-masing terdiri dari  $a e^{i\alpha}$  dan  $b e^{i\beta}$  dan diperoleh pula bahwa

6) Demikian pula suku "konstanta" pada fase getaran akan mengalami perubahan.

$$C^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\epsilon t + \beta - \alpha). \quad (22.7)$$

Dari rumusan ini diketahui bahwa amplitudo mengalami getaran dengan frekuensi  $\epsilon$  antara dua daerah batas

$$|a - b| \leq C \leq a + b.$$

Fenomena seperti ini disebut *getaran mengambang*.

Persamaan gerak yang dinyatakan pada pers. [22.2] pada sembarang bentuk gaya luar  $F(t)$  secara umum dapat diintegrasikan. Hal ini mudah dipahami jika persamaan dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\omega x) - i(\dot{x} + i\omega x) = \frac{1}{m} F(t)$$

atau

$$\frac{d\xi}{dt} - i\omega \xi = \frac{1}{m} F(t), \quad (22.8)$$

dengan memisalkan suatu besaran kompleks

$$\xi = \dot{x} + i\omega x. \quad (22.9)$$

Pers. [22.8] bukan merupakan persamaan diferensial orde dua, melainkan menjadi persamaan orde satu. Seandainya persamaan diferensial orde satu di atas tidak mengandung ruas kanannya maka penyelesaiannya menjadi  $\xi = Ae^{i\omega t}$  ( $A$  adalah konstanta). Dengan kaedah umum penyelesaian partikular persamaan diferensial inhomogen di atas dapat dicari dengan memisahkan sebagai  $\zeta = A(t) e^{i\omega t}$  sehingga akan didapat  $A$  sebagai fungsi waktu sebagai berikut

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{m} F(t) e^{-i\omega t}.$$

Integrasi persamaan ini akan memberikan penyelesaian partikular sebagai berikut

$$\xi = e^{i\omega t} \left[ \int_0^t F(t) e^{-i\omega t} dt + \xi_0 \right], \quad (22.10)$$

dalam penyelesaian ini konstanta  $\xi_0$  dipilih sehingga harga  $\xi$  pada saat  $t = 0$  juga berharga nol. Persamaan ini tidak lain merupakan penyelesaian umum persamaan gerak getaran;  $x(t)$  merupakan suku imajiner dari pers. [22.10] (dibagi dengan  $\omega$ )<sup>7</sup>

Energi sistem, yang terdapat di dalam getaran dipaksakan ini, tentunya tidak akan tetap konstan; energi sistem dipasok oleh gaya luar. Untuk menentukan energi total sistem selama terdapatnya gaya luar (dari  $+\infty$  hingga  $-\infty$ ); sementara diandaikan bahwa energi awal sama dengan nol. Dari pers. [22.10] (dengan batas bawah integrasi  $-\infty$  selain nol dan dengan  $\xi(-\infty) = 0$ ) diperoleh untuk  $t \rightarrow \infty$

$$|\xi(\infty)|^2 = \frac{1}{m^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2$$

Di samping itu energi sistem adalah

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{m}{2} |\xi|^2 \quad (22.11)$$

Jika disubstitusikan  $|\xi(\infty)|^2$ , diperoleh energi yang ditambahkan pada sistem sebesar

$$E = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \quad (22.12)$$

Energi ini ditentukan berdasarkan kuadrat komponen Fourier dari gaya  $F(t)$  pada frekuensi eigen.

Jika gaya luar bekerja hanya pada interbal waktu singkat (kecil dibanding dengan  $1/\omega$ ), dapat dibuat pendekatan bahwa harga  $e^{-i\omega t} \approx 1$  sehingga diperoleh

$$E = \frac{1}{2m} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt \right)^2$$

7) Untuk kasus ini tentunya fungsi gaya luar  $F(t)$  harus merupakan fungsi real.

Hasil rumusan di atas telah jelas dari awal pembahasan. Rumusan ini menyatakan bahwa suatu gaya yang bekerja pada sistem dalam waktu yang singkat, akan menambah momentum (impuls) pada sistem sebesar  $\int F dt$ , tpa menyebabkan perubahan simpangan yang nyata untuk dapat diamati.

**Contoh 42:** Hitung getaran dipaksakan suatu sistem dalam pengaruh gaya luar  $F(t)$  jika sistem pada saat  $t = 0$  diam pada posisi setimbangnya ( $x = 0, \dot{x} = 0$ ), untuk kasus a)  $F = \text{konstata} = F_0$ , b)  $F = at$ ; c)  $F = F_0 e^{-at}$ ; dan d)  $F = F_0 e^{-at} \cos bt$ .

### Penyelesaian

a. Simpangan dapat dicari dengan menyelesaikan persamaan gerak pada pers. [22.2]

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t);$$

pengaruh gaya luar menyebabkan simpangan dari posisi setimbang di sekitar getaran.

b) Untuk  $F = at$  di dapat

$$x = \frac{a}{m\omega^2} (\omega t - \sin \omega t);$$

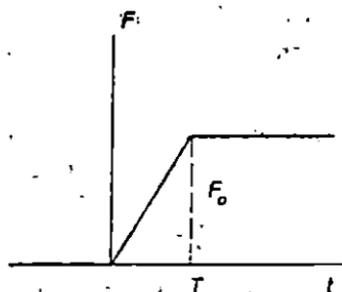
c) Untuk  $F = F_0 e^{-at}$  diperoleh

$$x = \frac{F_0}{m(\omega^2 + \alpha^2)} \left( e^{\alpha t} - \cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right).$$

d) Untuk  $F = F_0 e^{-at} \cos bt$  diperoleh

$$x = \frac{F_0}{m[(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2]} \{ -(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) \sin \omega t$$

$$= +\frac{\alpha}{\omega} (\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2) \sin \omega t + e^{-\alpha t} \{ (\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2) \cos \beta t - 2\alpha\beta \sin \beta t \}$$



Gambar:24:

**Contoh 43:** Tentukan amplitudo getaran dalam pengaruh gaya luar yang bekerja sesuai dengan aturan perubahan sebagai berikut:  $F = 0$  untuk  $t < 0$ ,  $F = F_0 t/T$  untuk  $0 < t < T$ , dan  $F = F_0$  untuk  $t > 0$  (lihat gambar g [24]) hingga pada saat  $t = 0$  sistem berada dalam keadaan diam pada posisi setimbangnya (lihat gambar [25]).

**Penyelesaian:** Pada interval waktu  $0 < t < T$  getaran akan mempunyai bentuk yang memenuhi persamaan sebagai berikut

$$x = \frac{F_0}{mT\omega^2} (\omega t - \sin \omega t).$$

Untuk  $t > T$  dapat dicari penyelesaian dalam bentuk

$$x = c_1 \cos \omega(t - T) + c_2 \sin \omega(t - T) + \frac{F_0}{m\omega^2}.$$

Dari syarat kontinuitas untuk  $x$  dan  $\dot{x}$  pada saat  $t = T$  diperoleh pula

$$c_1 = -\frac{F_0}{mT\omega^2}, \quad c_2 = -\frac{F_0}{mT\omega^2} (1 - \cos \omega T).$$

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{2F_0}{mT\omega^2} \sin \frac{\omega T}{2}.$$

Dalam hal ini, amplitudo getaran diperoleh sebagai berikut

Patut pula dicatat bahwa amplitudo akan semakin kecil jika harga  $F_0$  (yaitu jika  $T$  semakin besar).

**Contoh 44:** Pertanyaan yang sama seperti pada sebelumnya, tetapi gaya luar  $F_0$  bekerja selama interval waktu tertentu  $T$  (lihat gambar [25])!

**Penyelesaian:** Penyelesaian dapat dicari dengan cara yang sama seperti pada contoh 43 tetapi masih lebih mudah, yaitu dengan menggunakan pers. [22.10]. Untuk  $t > T$  akan diperoleh getaran pada posisi  $x = 0$ ; dalam hal ini

$$\xi = \frac{F_0}{m} e^{-i\omega t} \int e^{-i\omega t} dt = \frac{F_0}{m} (1 - e^{-i\omega T}) e^{-i\omega t},$$

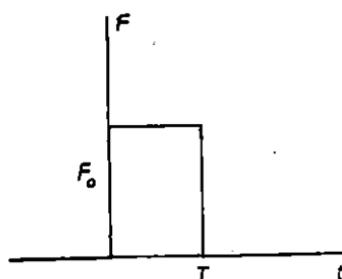
kuadrat absolut dari  $\xi$  akan menghasilkan amplitudo yang dinyatakan dalam  $|\xi| = a^2 \omega^2$ . Hasilnya diperoleh

$$a = \frac{2F_0}{m} \sin \omega \frac{\omega T}{2}.$$

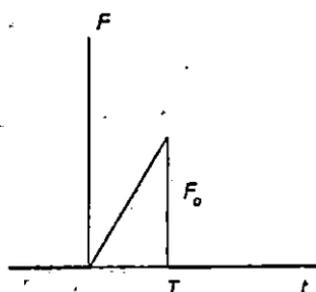
**Contoh 45:** Sama seperti contoh sebelumnya untuk gaya luar  $F = F_0 t/T$  dalam interval waktu dari 0 hingga  $T$  (lihat gambar [26]).

**Penyelesaian:** Dengan cara yang sama seperti di atas diperoleh

$$a = \frac{2F_0}{T\omega^2 m} \sqrt{\omega^2 T^2 - 2\omega T \sin \omega T + 2(1 - \cos \omega T)}.$$



Gambar 25:



Gambar 26:

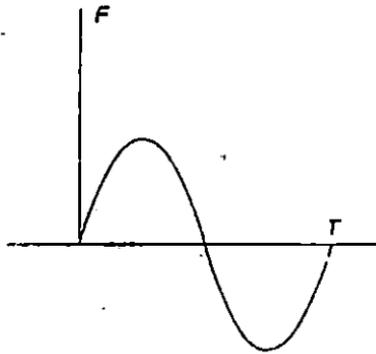
**Contoh 46:** Sama seperti contoh sebelumnya untuk gaya luar dalam interval waktu dari 0 hingga  $T = 2\pi/\omega$  yang mengikuti hukum  $F = F_0 \sin \omega t$  (lihat gbr. [27]).

**Penyelesaian:** Dengan mensubstitusikan persamaan

$$F(t) = F_0 \sin \omega t = \frac{F_0}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

Pada pers. [22.10] dan lakukan integrasi dengan batas dari 0 hingga  $T$ , akhirnya didapat

$$a = \frac{F_0 \pi}{m\omega^2} \sqrt{\omega^2 T^2 - 2\omega T \sin \omega T + 2(1 - \cos \omega T)}.$$



Gambar 27:

### 23. Getaran Beberapa Derajat Kebebasan

Teori getaran harmonik  $s$  derajat kebebasan adalah analog dengan teori getaran 1 dimensi seperti yang telah dijelaskan pada §61. Jika diasumsikan energi potensial  $U$  dari sistem sebagai fungsi koordinat diperumum  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) mempunyai harga minimum pada  $q_i = q_{i0}$ . Jika pada sistem terdapat pergeseran yang sangat kecil

$$x_i = q_i - q_{i0} \quad (23.1)$$

dan berdasarkan pergeseran ini  $U$  dideretkan sehingga mencapai suku berderajat dua, diperoleh

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,k} k_{i,k} x_i x_k \quad (23.2)$$

sebagai energi potensial yang tergantung kepada kuadrat pergeseran, yang juga mempunyai harga minimum. Koefisien  $k_{ik}$  dan  $k_{ki}$  dikalikan dengan besaran yang sama  $x_k \cdot x_i$  pada pers. [32.2] jelas bahwa indeks  $i$  dan  $k$  mengandung simetri

$$k_{ik} = k_{ki}$$

Energi kinetik untuk kasus secara umum dapat ditulis dalam bentuk

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{i,k}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k$$

dan jika disubstitusikan  $q_i = q_{i0}$ , harga  $a_{i,k} = m_{ik}$ . Dengan demikian, akan diperoleh energi kinetik berharga positif dalam bentuk

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (23.3)$$

Koefisien  $m_{ik}$  adalah simetri terhadap indeks

$$m_{ik} = m_{ki}$$

Fungsi Lagrange suatu sistem getaran harmonik dengan simpangan yang kecil menjadi

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{i,k} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{i,k} x_i x_k). \quad (23.4)$$

Selanjutnya akan dicari persamaan gerak sistem. Untuk mencari persamaan tersebut, diperlukan untuk menurunkan fungsi Lagrange dalam bentuk:

$$dL = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{i,k} \dot{x}_i dx_i + m_{i,k} \dot{x}_k dx_k - k_{i,k} x_i dx_k - k_{i,k} x_k dx_i).$$

Penjualan terhadap indeks tentunya tidak bergantung pada pertukaran indeks sehingga suku pertama dan ketiga dapat dilakukan pertukaran indeks; karena simetri koefisien  $m_{ik}$  dan  $k_{ik}$  diperoleh:

$$dL = \sum_{i,k} (m_{i,k} \dot{x}_k dx_i - k_{i,k} x_i dx_k).$$

Dengan demikian, didapat

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_k m_{i,k} \dot{x}_k, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = - \sum_k k_{i,k} x_k.$$

maka persamaan Lagrange menjadi

$$\sum_k m_{ik} \ddot{x}_k + \sum_k k_{ik} x_k = 0. \quad (23.5)$$

Pers. [23.5] menggambarkan sistem  $s$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) persamaan diferensial linier dengan koefisien konstan.

Berdasarkan aturan umum akan dicari penyelesaian  $s$  persamaan diferensial yang mengandung  $s$  fungsi yang belum diketahui dalam bentuk

$$x_k = A_k e^{i\omega t}, \quad (23.6)$$

dengan  $A_k$  adalah konstanta yang juga belum diketahui. Jika pers. [23.6] disubstitusikan ke dalam pers. [23.5], dengan menghilangkan suku  $e^{i\omega t}$ , akan diperoleh sistem persamaan linier aljabar yang harus memenuhi konstanta  $A_k$ .

$$\sum_k (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_k = 0. \quad (23.7)$$

Agar sistem persamaan ini mempunyai solusi yang tidak berharga nol maka determinan sistem persamaan ini haruslah sama dengan nol.

$$|k_{ik} - \omega^2 m_{ik}| = 0 \quad (23.8)$$

Pers. [23.8], yang disebut sebagai persamaan *karakteristik*, merupakan persamaan  $\omega^2$  berderajat  $s$ . Persamaan ini secara umum mempunyai akar positif  $\omega_\alpha^2$  dengan  $\alpha = 1, 2, \dots, s$  (untuk kasus khusus beberapa harga akar dapat mempunyai harga yang sama). Besaran yang disimbolkan dengan  $\omega_\alpha$  disebut sebagai *frekuensi eigen* dari sistem.

Dari pemikiran fisis jelas bahwa akar pers. [23.8] haruslah berharga real dan positif. Seandainya  $\omega$  mempunyai harga negatif berarti ketergantungan koordinat  $x_k$  terhadap waktu pada pers. [23.6] (dan demikian pula ketergantungan terhadap waktu dari kecepatan  $\dot{x}_k$ ), keduanya akan merupakan kurva yang menurun atau naik dengan faktor eksponensial terhadap waktu. Keberadaan faktor demikian untuk kasus

yang dipandang adalah tidak diperbolehkan (relevan) karena akan menyebabkan perubahan terhadap waktu dari energi  $E = T + U$  sistem sehingga bertentangan dengan hukum kekekalan energi.

Secara sistematis mudah dibuktikan jika pers. [23.7] dengan mengalikan  $A_i^*$  dan dijumlahkan terhadap  $i$  sehingga diperoleh

$$\sum_{i,k} (-\omega^3 m_{ik} + k_{ik}) A_i^* A_k = 0$$

dari persamaan ini diperoleh

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i,k} A_i^* A_k}{\sum_{i,k} m_{ik} A_i^* A_k}$$

Bentuk rumusan kuadrat pada pembilang dan penyebut dari pernyataan di atas merupakan bilangan real karena koefisien  $k_{ik}$  dan  $m_{ik}$  real dan simetris

$$\left( \sum_{i,k} A_i^* A_k \right) = \sum_{i,k} k_{ik} A_i A_k^* = \sum_{i,k} k_{ik} A_k A_i^*$$

Harga pada persamaan di atas juga positif sehingga berlaku untuk harga  $\omega^{2R}$

Setelah memperoleh frekuensi  $\omega$ , harga tersebut disubstitusikan ke pers. [23.7] dan kemudian dapat ditentukan harga-harga koefisien

- 8) Kenyataan bahwa bentuk kuadrat dengan koefisien  $k_{ik}$  secara definitif positif, untuk simpangan getaran berharga positif sesuai dari definisi pada pers. [23.2]. Apabila besaran kompleks  $A_i$  ditulis dalam bentuk  $a_i = i b_i$ , diperoleh bahwa (kembali sesuai dengan prinsip simetri  $k_{ik}$ ) adalah

$$\sum_{i,k} k_{ik} (a_i - i b_k)(a_k + i b_k) = \sum_{i,k} k_{ik} i k a_i a_k + \sum_{i,k} k_{ik} b_i b_k$$

hal ini merupakan penjumlahan dari dua rumus terdefinisi tersebut

$A_k$ . Jika akar dari  $\omega_a$  dari persamaan karakteristik mempunyai harga yang berbeda satu sama lainnya, koefisien  $A_k$  dapat ditentukan dari determinan (berderajat  $s - 1$ ) yang telah disebutkan pada pers. [23.8], dengan harga  $\omega$  terakhir disubstitusikan ke  $\omega_a$ ; determinan ini disimbolkan dengan  $\Delta_{ka}$ . Penyelesaian partikular (khusus) dari persamaan diferensial pada pers. [23.5] selanjutnya mempunyai bentuk sesuai dengan

$$x_k = \Delta_{ka} C_a e^{i\omega_a t},$$

dengan  $C_a$  adalah konstanta kompleks sembarang.

Penjumlahan semua penyelesaian partikular akan menghasilkan penyelesaian umum. Bentuk real penyelesaian ini dapat ditulis sebagai

$$x_k = \text{Re} \left\{ \sum_{\alpha} \Delta_{k\alpha} C_{\alpha} e^{i\omega t} \right\} \equiv \sum_{\alpha} \Delta_{k\alpha} \Theta_{\alpha}, \quad (23.9)$$

dengan menyingkat

$$\Theta_{\alpha} = \text{Re} \{ C_{\alpha} e^{i\alpha t} \} \quad (23.10)$$

Berarti bahwa perubahan setiap koordinat sistem terhadap waktu merupakan tumpang tindih (*overlapping*) dari  $s$  getaran  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s$  dengan harga amplitudo dan fase masing-masing sembarang, tetapi mempunyai frekuensi yang sama.

Pertanyaan tentang apakah mungkin untuk memilih koordinat diperumum dalam persoalan ini menjadi jelas bahwa setiap getaran yang terdapat di dalam sistem tersebut merupakan getaran sederhana. Bentuk penyelesaian umum pada pers. [23.9] memberikan jalan untuk menyelesaikan pertanyaan ini.

Apabila hubungan sebanyak  $s$  persamaan pada pers. [23.9] dipandang sebagai sistem persamaan dengan  $s$  variabel  $\Theta_s$  yang belum diketahui, dengan menyelesaikan sistem persamaan tersebut, besaran-besaran  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s$  dapat dinyatakan dalam koordinat  $x_1, x_2, \dots, x_s$ . Koordinat-koordinat tersebut disebut sebagai *koordinat normal* atau *koordinat utama* dan getaran sederhana yang terjadi pada sistem disebut pula sebagai getaran normal dari sistem.

Koordinat normal  $\Theta_\alpha$  memenuhi persamaan sebagai berikut

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0, \quad (23.11)$$

sesuai seperti terdahulu. Dalam koordinat normal, persamaan gerak terbagi dalam  $s$  persamaan yang saling tidak bergantung. Percepatan untuk setiap koordinat normal hanya bergantung pada koordinat masing-masing dan untuk menentukan secara sempurna ketergantungan terhadap waktu cukup jika diketahui harga awal koordinat dan kecepatan masing-masing koordinat. Dengan perkataan lain, koordinat normal suatu sistem getaran adalah saling tidak bergantung pada satu sama lainnya.

Dari pernyataan di atas kemudian diketahui bahwa koordinat normal yang dinyatakan dalam fungsi Lagrange dapat terbagi dalam penjumlahan pernyataan masing-masing dan setiap persamaan dengan frekuensi  $\omega_\alpha$  masing-masing, yaitu ditulis dalam bentuk

$$L = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} (\dot{\Theta}_{\alpha}^2 - \omega_{\alpha}^2 \Theta_{\alpha}^2), \quad (23.12)$$

dengan  $m_{\alpha}$  adalah konstanta berharga positif. Secara matematis hal ini mempunyai arti bahwa melalui transformasi pada pers. [23.9] kedua bentuk kuadratis, energi kinetik [23.3] dan potensial (pers. [23.2]), secara bersamaan akan membentuk diagonal.

Biasanya koordinat normal dipilih sehingga koefisien-koefisien pada harga kecepatan kuadrat pada fungsi Lagrange sama dengan  $\frac{1}{2}$ . Untuk itu koordinat normal cukup (disimbolkan dengan  $Q_{\alpha}$ ) didefinisikan sebagai

$$Q_{\alpha} = \sqrt{m_{\alpha}} \Theta_{\alpha} \quad (32.13)$$

Sehingga fungsi Lagrange menjadi.

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\dot{Q}_{\alpha}^2 - \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha}^2).$$

Semua pembahasan yang telah diberikan di atas hanya berubah sedikit saja jika dalam menyelesaikan persamaan karakteristik mengandung sejumlah akar ganda (berharga sama). Bentuk umum persamaan gerak dari pers. [23.9] dan [23.10] akan tetap sama (tetap mengandung  $s$  persamaan), hanya terdapat perbedaan bahwa koefisien  $\Delta_{ku}$  yang mengandung sejumlah frekuensi tidak lagi merupakan determinan berderajat  $s - 1$  seperti dinyatakan pada pers. [23.8]; hal yang sama hanya diketahui sama-sama harga nol<sup>9)</sup>.

Setiap penggandaan (atau basanya disebut sebagai *degenerasi*) frekuensi sesuai dengan sekian banyak koordinat normal, sebanyak derajat degenerasi yang terdapat; pemilihan koordinat normal (dengan frekuensi  $\omega_u$  yang sama) tidak akan terlihat jelas karena pada energi kinetik dan potensial dinyatakan sebagai jumlah dari  $\Sigma Q_u^2$  dan  $\Sigma Q_u^2$  dan yang ditransformasikan dengan cara yang sama sehingga dapat dilakukan transformasi linier sembarang dari penjumlahan invarian.

Koordinat normal untuk getaran tiga dimensi satu titik masa yang terdapat di dalam medan luar dapat diberikan dengan cara sederhana. Jika titik nol sistem koordinat kartesian dianggap terletak pada energi potensial minimum  $U(x, y, z)$ , energi kinetik dapat dinyatakan dalam bentuk masing-masing tuntunan koordinat terhadap waktu kuadrat sebagai berikut

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

( $m$  adalah massa partikel) yang tidak bergantung pada pemilihan arah sistem koordinat. Diperlukan energi potensial dengan merotasikan koordinat pada bentuk diagonal sehingga diperoleh

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} (k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2). \quad (23.14)$$

dan getaran sepanjang sumbu  $x, y$ , dan  $z$  adalah getaran utama dengan frekuensi sama dengan

9) Bahwa pada penyelesaian umum tidak boleh terdapat suku, selain mengandung faktor eksponensial yang mengandung pangkat waktu, berlandaskan pada dasar pemikiran fisis yang sama, akan muncul frekuensi kompleks, adanya suku yang demikian akan bertentangan dengan hukum kekekalan energi.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m}}.$$

Untuk kasus medan sentral simetri ( $k_1 = k_2 = k_3 = k, U = kr^2/2$ ) frekuensi akan mempunyai harga yang sama.

Penggunaan koordinat normal untuk sistem getaran dipaksakan dengan beberapa derajat kebebasan dengan dasar getaran satu dimensi. Untuk kasus gaya yang berubah-ubah dalam sistem, fungsi Lagrange dapat ditulis dalam bentuk

$$L = L_0 + \sum_k F_k(t) x_k, \quad (23.15)$$

dengan  $L_0$  adalah fungsi Lagrange untuk getaran bebas (harmonik). Jika koordinat  $x_k$  dinyatakan dalam koordinat normal, akan diperoleh

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\dot{Q}_{\alpha}^2 - Q_{\alpha}^2) + \sum_{\alpha} F_k(t) Q_{\alpha}, \quad (23.16)$$

dengan memisalkan

$$f_{\alpha}(t) = \sum_k F_k(t) \frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_{\alpha}}}.$$

Sesuai dengan pernyataan di atas, diperoleh persamaan gerak sebagai berikut

$$\ddot{Q}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha} = f_{\alpha}(t) \quad (23.17)$$

dengan masing-masing mengandung fungsi  $Q_{\alpha}$  yang belum diketahui.

**Contoh 47:** Hitung getaran suatu sistem dengan dua derajat kebebasan jika fungsi Lagrange dinyatakan sebagai

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0^2}{2} (x^2 + y^2) + \alpha x y$$

(sama dengan dua sistem getaran 1 dimensi dengan frekuensi eigen  $\omega_0$ , yang berhubungan dengan interaksi yang dinyatakan dengan faktor  $-a x y$ ).

### Penyelesaian

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha y, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = \alpha x.$$

Substitusikan ke pers. [23.6] akan didapat

$$A_x (\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_y, \quad A_y (\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_x.$$

Persamaan karakteristik adalah  $(\omega_2^2 - \omega^2)^2 = \alpha^2$ , dengan akar-akar persamaan

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \alpha.$$

Untuk  $\omega_1 = \omega$ , dari persamaan di atas menghasilkan  $A_x = A_y$  dan untuk  $\omega_2 = \omega$ :  $A_x = -A_y$ . Dengan demikian, diperoleh

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_1 + Q_2), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_1 - Q_2)$$

(koefisien  $1/\sqrt{2}$  sesuai dengan faktor normalisasi untuk koordinat normal yang dijelaskan di atas)

Untuk  $\alpha \ll \omega_0$  (kopling lemah) di dapat

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{\alpha}{2\omega_0}, \quad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{\alpha}{2\omega_0}.$$

Perubahan dari  $x$  dan  $y$  dalam hal ini mengandung pengertian getaran ganda dengan frekuensi masing-masing hanya mempunyai perbedaan yang kecil, yaitu getaran mempunyai karakter termodulasi (mengambang) dengan frekuensi modulasi  $\omega_1 - \omega_2 = \alpha/\omega_0$  (lihat §6.2).

Untuk kasus ini amplitudo koordinat  $y$  mempunyai harga minimum jika amplitudo  $x$  berharga maksimum, demikian pula sebaliknya.

**Contoh 48:** Hitung getaran kecil untuk bandul ganda yang bergetar pada bidang datar (lihat gbr. [1], § 14).

**Penyelesaian:** Getaran kecil ( $j_1 \ll l, j_2 \ll l$ ) pada contoh 1 mempunyai fungsi Lagrange sebagai berikut

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - \frac{m_1 + m_2}{2} g l_1 \varphi_1^2 - \frac{m_2}{2} g l_2 \varphi_2^2.$$

Maka persamaan gerak adalah

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1 - m_2) g \varphi_1 = 0$$

$$l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + g \varphi_2 = 0.$$

Dengan mensubstitusikan ke pers. [23.6] diperoleh

$$A_1 (m_1 + m_2) (g - l_1 \omega^2) - A_2 \omega^2 m_2 l_2 = 0$$

$$-A_1 \omega^2 + A_2 (g - l_2 \omega^2) = 0.$$

Akar dari persamaan karakteristik didapat:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1 l_1 l_2} \left\{ (m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \pm \sqrt{(m_1 + m_2)[(m_1 + m_2)(l_1 + l_2)^2 - 4m_1 l_1 l_2]} \right\}.$$

Untuk  $m_1 \rightarrow \infty$  frekuensi masing-masing getaran menjadi sama dengan  $\sqrt{g/l}$  dan  $\sqrt{g/l_2}$ , yang merupakan frekuensi getaran yang saling tidak bergantung pada satu sama lain untuk bandung ganda.

**Contoh 49:** Tentukan lintasan sebuah partikel yang bergerak di dalam medan sentral dengan energi potensial  $U = kr^2$  (energi potensial *osilator ruang*).

**Penyelesaian:** Gerak partikel berlangsung seperti halnya di dalam medan sentral, yaitu lintasannya berada pada bidang datar, misalnya dipilih pada bidang  $x - y$ . Setiap perubahan koordinat  $x$  dan  $y$  akan menggambarkan getaran kecil dengan frekuensi bersama  $\omega = \sqrt{k/m}$

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \quad y = b \cos(\omega t + \beta)$$

atau

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \cos(\varphi + \delta) = \cos \delta \cos \varphi - b \sin \delta \sin \varphi$$

dengan  $\varphi = \omega t + \alpha$  maka  $\delta = \beta - \alpha$ . Jika  $\cos \varphi$  dan  $\sin \varphi$  ditentukan dan dibentuk menjadi penjumlahan kuadratnya, diperoleh persamaan lintasan sebagai berikut

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \delta = \sin^2 \delta.$$

Persamaan di atas merupakan persamaan elips dengan titik tengahnya berada pada titik acuan (titik nol)<sup>10)</sup>. Untuk  $\delta = 0$  atau  $\pi$  lintasan akan mengalami degenerasi, masing-masing menjadi berbentuk garis lurus.

## 24 Getaran pada Molekul

Persoalan berhubungan dengan sistem partikel, yang satu sama lain saling berinteraksi. Akan tetapi, sistem tidak terdapat di dalam medan luar maka tidak semua derajat kebebasan mempunyai karakter getaran. Contoh terbaik dari sistem demikian adalah molekul. Selain bergerak, atom-atom di dalam molekul juga mengalami getaran, sehingga molekul menggambarkan gerak translasi dan rotasi sekaligus

Tiap gerak translasi, demikian pula rotasi suatu atom, berhubungan dengan tiga derajat kebebasan sehingga untuk satu molekul yang terdiri

10) Kenyataan bahwa gerak di dalam medan energi potensial  $U = kr^2/2$  akan berlangsung pada lintasan tertutup telah dikemukakan pada pembahasan tentang medan sentral (4.4).

dari  $n$  atom akan terdapat  $3n$  derajat kebebasan. Dengan demikian, untuk keseluruhan molekul ini hanya akan terdapat  $3n - 6$  getaran. Suatu pengecualian untuk hal ini berlaku untuk molekul dengan atom-atom saling tersusun, membentuk garis lurus. Oleh karena itu, tidak ada artinya untuk mempersoalkan terjadinya rotasi sepanjang garis lurus tersebut sehingga untuk sistem molekul demikian hanya terdapat  $3n - 5$  getaran.

Untuk menyelesaikan persoalan mekanis penting mengetahui derajat kebebasan gerak translasi dan rotasi sistem tersebut, sebelum mencoba menyelesaikannya.

Untuk mengeliminasi gerak translasi, momentum total dapat dibuat menjadi nol. Kondisi ini akan terpenuhi jika gerak sistem dipandang dari titik pusat massa molekul yang berada dalam keadaan diam, atau dengan perkataan lain ketiga koordinat masing-masing atom adalah konstan. Jika dimisalkan koordinat dinyatakan dalam  $r_a = r_{ao} + n_a$  (dengan  $r_{ao}$  adalah vektor jari-jari dari titik kesetimbangan yang tetap dari atom ke  $a$  syarat

$$\sum_a m_a r_a = \text{konstanta} = \sum_a m_a r_{ao}$$

dinyatakan sebagai

$$\sum_a m_a u_a = 0. \quad (24.1)$$

Untuk mengeliminasi gerak rotasi molekul maka momentum putar total harus dibuat sama dengan nol. Momentum putar pada umumnya bukan merupakan turunan total terhadap waktu dari salah satu fungsi koordinat molekul sehingga dengan membuat momentum putar menjadi nol akan berpengaruh terhadap koordinat yang bersangkutan. Justru untuk getaran kecil terdapat pengecualian. Jika koordinat dimisalkan sama dengan  $r_a = r_{ao} + n_a$  dan turunan kedua dari besaran yang berharga kecil  $n_a$  diabaikan, momentum pusat molekul dapat dinyatakan sebagai

$$M = \sum_a m_a [r_a v_a] \simeq \sum_a \frac{d}{dt} m_a [r_{ao} u_a];$$

Syarat momentum putar sama dengan nol dapat ditulis sebagai berikut

$$M = \sum_a m_a [r_a u_a] = 0. \quad (24.2)$$

(koordinat titik awal dalam hal ini dapat dipilih secara sembarang).

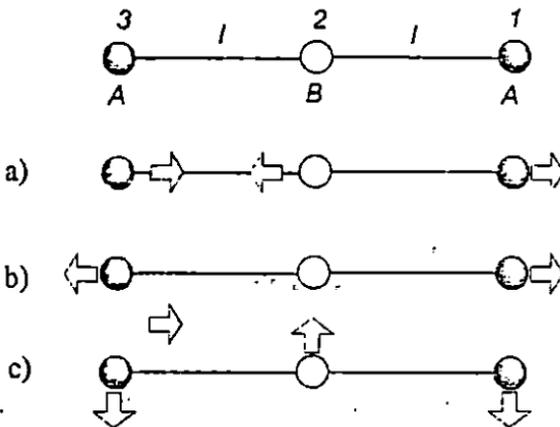
Getaran normal suatu molekul dapat diklasifikasikan dari macam gerak masing-masing atom yang berhubungan dengan distribusi simetri dari atom di dalam molekul (pada keadaan setimbang). Untuk ini terdapat metode umum yang menggunakan *teori grup*; teori ini dibahas dalam berbagai buku pegangan tentang molekul. Pada pembahasan ini hanya dilihat beberapa contoh elementer.

Jika  $n$  atom suatu molekul terletak pada bidang datar, getaran normal molekul ini dapat dibedakan antara getaran di mana atom terletak di dalam bidang dan getaran di mana atom-atom meninggalkan bidang yang bersangkutan. Untuk kedua macam getaran tersebut mudah ditentukan berapa jumlah derajat kebebasan. Untuk kasus di mana atom-atom bergetar pada bidang terdapat  $2n$  derajat kebebasan, sedangkan lainnya mempunyai 2 rotasi dan 1 rotasi. Jumlah getaran normal untuk atom-atom terletak pada bidang datar adalah  $2n-3$ , sedangkan lainnya  $(3n-6) - (2n-3) = n-3$  derajat kebebasan getaran di mana atom meninggalkan bidang datar.

Untuk kasus molekul linier, macam getaran dapat dibedakan berdasarkan getaran sepanjang garis yang dibentuk atom-atom dan getaran di mana atom-atom meninggalkan garis lurus. Untuk jenis getaran pertama, misalnya terdapat  $n$  derajat kebebasan,  $n$  getaran hanya berhubungan dengan translasi, maka jumlah getaran di mana atom-atom tetap berada pada garis lurus menjadi  $n-1$ . Oleh karena itu, jumlah seluruh derajat kebebasan getaran untuk molekul linier adalah  $3n-5$ , jumlah getaran di mana atom meninggalkan garis lurus adalah  $(3n-5) - (n-1) = 2n-4$ . Pada getaran seperti ini hanya terdapat  $n-2$  dua macam frekuensi yang berbeda karena setiap gerakan hanya dapat direalisasikan dengan dua cara yang berbeda, yaitu getaran yang terdapat pada bidang yang saling tegak lurus satu sama lain (yang digambarkan melalui sumbu molekul) dan berdasarkan pengertian simetri diketahui pula bahwa setiap pasang getaran normal ini mempunyai frekuensi yang sama.

### Contoh-contoh<sup>11)</sup>

**Contoh 51:** Tentukan frekuensi getaran suatu molekul simetri triatomik linier  $ABA$  (gbr. [28]). Dianggap bahwa energi potensial molekul hanya bergantung pada jarak  $A - B$  dan  $B - A$  dan sudut  $ABA$ .



Gambar 28:

**Penyelesaian:** Pergeseran linier dari masing-masing atom adalah  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $x_3$  berdasarkan pers. [24.1] masing-masing mempunyai hubungan sebagai berikut

$$m_A(x_1 + x_3) + m_B x_2 = 0.$$

Dengan mengeliminasi  $x_2$  diperoleh fungsi Lagrange gerak 1 dimensi dari molekul

$$L = \frac{m_A}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_B}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{k_1}{2} [(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2],$$

11) Perhitungan getaran untuk molekul lebih kompleks dapat ditemui pada buku M. W. Volkensten, M. A. Jeljaschewitsch dan B. I. Stephanov: Getaran molekul. Percetakan Negara untuk linetratur Teknik, 1949. G. Herzberg: *Spektrum Getaran dan Rotasi molekul Poliatomik*. Percetakan Literatur Asing 1949.

dengan menggunakan koordinat baru yang didefinisikan sebagai

$$Q_a = (x_1 + x_3), \quad Q_s = (x_1 - x_3)$$

diperoleh fungsi Lagrange dalam koordinat yang baru sebagai berikut

$$I_r = \frac{m_A \mu}{4m_B} \dot{Q}_a^2 + \frac{m_A}{4} \dot{Q}_s^2 - \frac{k_1 \mu^2}{4m_B^2} Q_a^2 - \frac{k_1}{4} Q_s^2$$

( $\mu = 2m_A + m_A + m_B$  adalah massa molekul). Dari fungsi Lagrange terakhir dapat terlihat bahwa  $Q_a$  dan  $Q_s$  merupakan koordinat normal (jika dilakukan normalisasi koordinat). Koordinat  $Q_a$  sesuai dengan koordinat titik tengah molekul dari *getaran antisimetri* molekul ( $x_1 = x_3$ ; gbr. [28a]) dengan frekuensi sebesar

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_1 \mu}{m_A m_B}}$$

sedangkan koordinat  $Q_s$  merupakan koordinat dari *getaran simetri* molekul ( $x_1 = x_3$ ; gbr. [28b]), bergetar dengan frekuensi sebesar

$$\omega_{s1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_A}}$$

Pergeseran transversal  $y_1$ ,  $y_2$ , dan  $y_3$  dari atom-atom molekul diperoleh hubungan pada pers. [24.1] dan [24.2] sebagai berikut

$$m_A (y_1 + y_3) + m_B y_2 = 0, \quad y_1 = y_3$$

(getaran simetri teregang gbr. [28c]. Energi potensial dari regangan molekul mempunyai bentuk seperti  $k_2 \rho^2 \delta^2 / 2$ , dengan  $\delta$  merupakan deviasi sudut ABA dari harga  $\pi$  yang mempunyai hubungan dengan pergeseran sebagai berikut

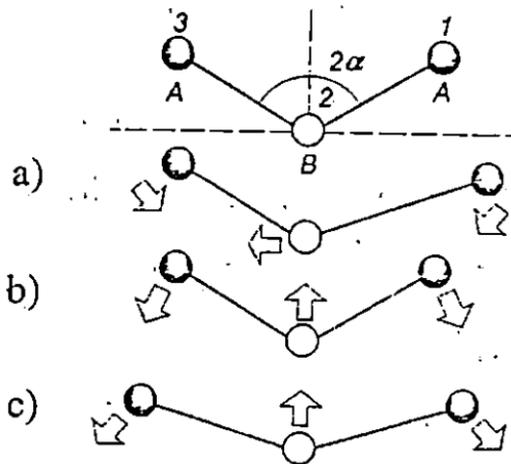
$$\delta = \frac{1}{l} [(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2)]$$

Jika semua pergeseran transversal  $y_1, y_2, y_3$ , dinyatakan dalam  $\delta$ , fungsi Lagrange untuk getaran transversal adalah

$$L = \frac{m_A}{2} (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{m_B}{2} \dot{y}_3^2 - \frac{k_2 l^2}{2} \delta^2 = \frac{m_A m_B}{4\mu} l^2 \dot{\delta}^2 - \frac{k_2 l^2}{2} \delta^2$$

dan diketahui pula frekuensi getaran

$$\omega_{32} = \sqrt{\frac{2k_2 \mu}{m_A m_B}}$$



Gambar 29:

**Contoh 52:** Pertanyaan yang sama untuk molekul  $ABA$  yang membentuk getaran segitiga (gbr. [29]).

**Penyelesaian:** Berdasarkan pers. [24.1] dan [24.2] terdapat hubungan koordinat pada arah X dan Y dari vektor pergeseran  $u$  sebagai berikut

$$m_A (x_1 + x_3) + m_B x_2 = 0,$$

$$m_A (y_1 + y_3) + m_B y_2 = 0,$$

$$\sin \alpha (y_1 - y_3) - \cos \alpha (x_1 + x_3) = 0.$$

Perubahan  $\delta l_1$  dan  $\delta l_2$  jarak antara atom  $A - B$  dan  $B - A$  diberikan melalui proyeksi vektor-vektor  $v_1 - v_2$  dan  $v_3 - v_2$  pada arah garis  $AB$  dan  $BA$

$$\delta l_1 = (x_1 - x_2) \sin \alpha + (y_1 - y_2) \cos \alpha$$

$$\delta l_2 = -(x_3 - x_2) \sin \alpha + (y_3 - y_2) \cos \alpha.$$

Perubahan sudut  $ABA$  diberikan melalui proyeksi vektor yang sama pada arah tegak lurus  $AB$  dan  $BA$

$$\begin{aligned} \delta l &= \frac{1}{l} [(x_1 - x_2) \cos \alpha - (y_1 - y_2) \sin \alpha \\ &\quad + \frac{1}{l} [-(x_3 - x_2) \cos \alpha - (y_3 - y_2) \sin \alpha]. \end{aligned}$$

Dengan demikian fungsi Lagrange molekul dapat ditulis menjadi

$$L = \frac{m_A}{2} (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_3^2) + \frac{m_B}{2} \dot{u}_2^2 - \frac{k_1}{2} (\delta l_1^2 + \delta l_2^2) - \frac{k_2 l^2}{2} \delta^2.$$

Dalam koordinat baru

$$Q_a = x_1 + x_3, \quad q_{s1} = x_1 - x_3, \quad q_{s2} = y_1 + y_3$$

yaitu sebagai vektor  $n$

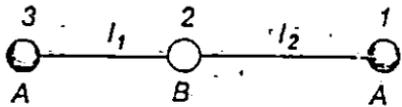
$$x_1 = \frac{1}{2} (Q_a + q_{s1}), \quad x_3 = \frac{1}{2} (Q_a - q_{s1}), \quad x_2 = -\frac{m_A}{m_B} Q_a$$

$$y_1 = \frac{1}{2} (q_{s2} + Q_a \cot \alpha), \quad y_3 = \frac{1}{2} (q_{s2} - Q_a \cot \alpha), \quad y_2 = -\frac{m_A}{m_B} q_{s2}$$

sehingga fungsi Lagrange dalam koordinat baru menjadi

$$L = \frac{m_A}{4} \left( \frac{2m_A}{m_B} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \dot{Q}_a^2 + \frac{m_A}{4} \dot{q}_{s1}^2 + \frac{m_A \mu}{4m_B} \dot{q}_{s2}^2$$

$$\begin{aligned}
 & -Q_a^2 \frac{k_1}{4} \left( \frac{2m_A}{m_B} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \sin^2 \alpha \right) \\
 & -q_{s1}^2 (k_1 \sin^2 \alpha + 2k_2 \cos^2 \alpha) - q_{s2}^2 \frac{\mu^2}{4m_B^2} (k_1 \sin^2 \alpha + 2k_2 \cos^2 \alpha) \\
 & + q_{s1} q_{s2} \frac{\mu}{2m_B} (2k_2 - k_1) \sin \alpha \cos \alpha
 \end{aligned}$$



Gambar 30:

Koordinat  $Q_a$  merupakan koordinat getaran normal dengan frekuensi

$$\omega_a^2 = k_1 \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \sin^2 \alpha \right)$$

yang antisimetri terhadap  $Y$  ( $x_1 = x_3$ ;  $y_1 = -y_3$ ; lihat gbr. [29a]).

Dua koordinat  $q_{s1}$  dan  $q_{s2}$  merupakan dua koordinat getaran simetri terhadap sumbu  $Y$  ( $x_1 = -x_3$ ;  $y_1 = y_3$ ; lihat gbr. [29b] dan [29c]), dengan frekuensi getaran masing-masing  $\omega_{s1}$  dan  $\omega_{s2}$ , yaitu sebagai akar-akar dari persamaan kuadrat  $\omega$  yang diperoleh dari persamaan karakteristik

$$\begin{aligned}
 & \omega^4 - \omega^2 \left[ \frac{k_1}{m_A} \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \sin^2 \alpha \right) + \frac{2k_2}{m_A} \left( 1 + \frac{2m_A}{m_B} \sin^2 \alpha \right) \right] \\
 & + \frac{2\mu k_1 k_2}{m_B m_A^2} = 0.
 \end{aligned}$$

Untuk  $\alpha = \pi$ , frekuensi akan sama dengan contoh-51.

**Contoh 53:** Pertanyaan yang sama untuk molekul linier tidak simetri  $ABC$  (gbr[30])!

### Penyelesaian

Simpangan horizontal ( $x$ ) dan vertikal ( $Y$ ) dari atom-atom di dalam molekul diberikan sebagai berikut

$$m_A x_1 + m_B x_2 + m_C x_3 = 0,$$

$$m_A y_1 + m_B y_2 + m_C y_3 = 0,$$

$$m_A l y_1 = m_C l_2 y_3.$$

Energi potensial dari meregang dan kompresi diberikan dalam bentuk

$$\frac{k_1}{2} (\delta l_1)^2 + \frac{k'_1}{2} (\delta l_2)^2 + \frac{k_2 l^2}{2} \delta^2,$$

( $2l = l_1 l_2$ ). Analog dengan perhitungan pada contoh 51 memberikan hasil sebagai berikut

$$\omega_i^2 = \frac{k_2 l^2}{l_1^2 l_2^2} \left( \frac{l_1^2}{m_C} + \frac{l_2^2}{m_A} + \frac{4l^2}{m_B} \right)$$

sebagai frekuensi getaran transversal dan diperoleh pula persamaan  $\omega$  kuadrat dalam bentuk

$$\omega^4 - \omega^2 \left[ k_1 \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) + k'_1 \left( \frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_C} \right) \right] + \frac{\mu k_1 k'_1}{m_A m_B m_C} = 0$$

untuk mencari frekuensi getaran longitudinal  $\omega_{11}$  dan  $\omega_{12}$ .

## 25. Getaran Teredam

Pembicaraan di atas dianggap bahwa getaran benda di dalam ruang tanpa dipengaruhi oleh medium yang mengisi ruang atau pengaruhnya diabaikan sama sekali. Di dalam kenyataannya medium yang mengisi ruang akan memberikan pengaruh gaya yang berlawanan dengan arah gerak, yaitu sebagai *tahanan* atau *widerstand* atau gaya *gesek*, yang cenderung memperlambat gerak benda. Energi dari

benda yang mengalami gerak karena pengaruh gaya akhirnya akan berubah menjadi panas; energi demikian disebut mengalami *dissipasi*. Gerak dalam pengaruh gaya seperti ini tidak lagi dapat dianggap sebagai peristiwa gerak mekanis murni dan pengamatan sistem seperti ini memerlukan pengamatan tentang gerak medium, maupun di dalam benda itu sendiri. Sebagai contoh tidak lagi dapat dipandang dengan pasti bahwa percepatan suatu benda yang bergerak, dalam interval waktu tertentu, tidak lagi hanya bergantung pada koordinat dan kecepatan geraknya; hal ini berarti bahwa persamaan gerak dalam pengertian mekanis, yang hanya dipunyai oleh sistem mekanis, tidak lagi dapat dibenarkan keberadaannya (eksistensi). Dengan demikian, gerak benda di dalam medium tidak lagi dapat dipandang sebagai gerak sistem mekanis.

Akan tetapi, terdapat beberapa katagori dari peristiwa seperti di atas, yang dengan cara pendekatan dapat diselesaikan dengan pendekatan mekanis, yaitu dengan menambah suku tambahan pada persamaan geraknya. Kasus yang termasuk katagori ini, misalnya getaran dengan frekuensi kecil dibanding dengan frekuensi yang menjadi karakteristik medium dalam proses *dissipasi* energi. Dengan terpenuhinya syarat demikian, dapat diandaikan bahwa benda mengalami *gaya gesek*, yang untuk medium homogen, hanya bergantung pada kecepatan gerak benda.

Jika dalam peristiwa tersebut kecepatan cukup kecil, gaya gesek dapat dinyatakan dalam deret kecepatan benda yang bersangkutan. Suku orde pertama dari deret adalah sama dengan nol. Dalam hal ini, berarti bahwa pada benda yang diam tidak terdapat gaya gesek dan suku kedua deret tidak sama dengan nol sebanding dengan kecepatan gerak. Maka gaya gesek  $f_R$  yang bekerja pada benda dalam getaran satu dimensi dapat ditulis dalam koordinat diperumum  $x$  sebagai berikut

$$f_R = -\alpha \dot{x},$$

dengan  $\alpha$  adalah suatu koefisien; tanda minus pada persamaan di atas menunjukkan bahwa arah gaya berlawanan dengan arah kecepatan benda. Jika gaya tersebut dibubuhkan pada ruas kanan persamaan gerak;

pers. [21.4] dapat ditulis kembali menjadi

$$m \ddot{x} = -kx - \alpha \dot{x}. \quad (25.1)$$

Dengan membagi pers. [25.1] dengan  $m$ , diperoleh relasi

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{\alpha}{m} = 2\lambda. \quad (25.2)$$

Dengan  $\omega_0$  adalah frekuensi dari sistem yang mengalami getaran tanpa pengaruh gaya gesek. Besaran  $\lambda$  disebut sebagai *faktor redaman*.

Dengan menggantikan semua besaran yang mengandung  $k$ ,  $m$  dan  $\alpha$  dengan  $\omega_0$  dan  $\lambda$  maka persamaan gerak getaran yang mengalami redaman dapat ditulis dalam bentuk

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (25.3)$$

Berdasarkan aturan umum untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan koefisien sebagai konstanta dapat dicari dengan mensubstitusikan  $x = e^r$  dapat diperoleh persamaan karakteristik dalam  $r$  sebagai berikut

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0,$$

dengan akar-akar dari  $r$  adalah

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.$$

Penyelesaian umum pers. [25.3] diperoleh

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$

Dalam hal ini terdapat dua hal yang berbeda.

Untuk  $\lambda < \omega_0$  akan diperoleh dua harga akar  $r$  kompleks konjugasinya. Untuk kasus ini penyelesaian umum persamaan diferensial menjadi

$$x = \text{Re} \left\{ A \exp \left( -\lambda t + i \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t \right) \right\},$$

dengan  $A$  konstanta kompleks sembarang, atau jika solusi pers. [25.3] ditulis dalam bentuk ekuivalen

$$x = a e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}, \quad (25.4)$$

dengan  $a$  dan  $\alpha$  adalah konstanta real. Gerak benda atau getaran yang digambarkan dengan solusi di atas disebut sebagai *getaran teredam*. Getaran serupa ini dapat dipandang sebagai getaran harmonis yang mengalami redakan amplitudo secara eksponensial. Kecepatan penurunan amplitudo ditentukan oleh eksponen dari  $\lambda$ , "frekuensi"  $\omega$  dari getaran ini adalah lebih kecil dari frekuensi getaran harmonis  $\omega_0$ , yaitu getaran tanpa gaya gesek; untuk kasus  $\lambda \ll \omega_0$  perbedaan harga antara  $\omega_0$  dan  $\omega$  merupakan turunan orde kedua. Suatu pengecilan frekuensi gesekan tidak dapat diramalkan karena gesekan merintang gerak.

Untuk  $\lambda \ll \omega_0$  amplitudo getaran untuk satu periode getaran  $2\pi/\omega$  mengalami perubahan yang amat kecil, tidak dapat diamati. Dalam hal ini terdapat suatu pengertian untuk mengamati perubahan kuadrat koordinat dan kuadrat kecepatan rata-rata dalam (dibagi) satu periode dan faktor redaman  $e^{-\lambda t}$  dapat diabaikan. Kuadrat koordinat dan kecepatan rata-rata adalah sebanding dengan  $e^{-2\lambda t}$ . Berarti, bahwa energi rata-rata sistem juga akan menurun sesuai dengan penurunan kuadrat koordinat rata-ratanya, yaitu:

$$\bar{E} = E_0 e^{-2\lambda t}, \quad (25.5)$$

dengan  $E_0$  adalah energi awal dari sistem.

Dianggap bahwa  $\lambda > \omega_0$ . Maka kedua akar persamaan karakteristik  $r$  mempunyai harga real dan negatif. Solusi umum untuk kasus ini adalah:

$$x = x_1 e^{-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t}. \quad (25.6)$$

Terlihat bahwa dalam kasus ini, muncul redaman yang sangat besar dan gerak terdapat penurunan gerak dengan penurunan  $|x|$ , yaitu secara terjadi penurunan  $x$  secara asimtotik (pada  $t \rightarrow \infty$ ) mendekati keadaan seimbang tanpa mengalami getaran sama sekali. Gerak seperti ini sebagai *gerak aperiodik*.

Untuk kasus khusus  $\lambda = \omega_0$ , maka akar persamaan karakteristik akan mempunyai dua akar yang sama, yaitu  $r = -\lambda$ . Solusi umum untuk kasus ini adalah:

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{-\lambda t}. \quad (25.7)$$

Kasus ini merupakan kasus dari gerak aperiodik. Gerak tidak lagi mempunyai karakter getaran.

Untuk suatu sistem dengan derajat kebebasan yang besar maka gaya gesek diperumum yang sesuai dengan koordinat diperumum  $x_i$ , dinyatakan dalam kecepatan diperumum sebagai berikut:

$$f_{iR} = - \sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k. \quad (25.8)$$

Berdasarkan pemikiran mekanis murni tidak dapat diramalkan lebih lanjut tentang sifat simetri dari koefisien  $\alpha_{ik}$  berhubungan dengan indeks  $i$  dan  $k$ . Dengan metode fisika statistik dapat ditunjukkan bahwa selalu berlaku simetri:

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}. \quad (25.9)$$

Dengan demikian rumusan pada pers. [325.8] dapat ditulis dalam bentuk turunan sebagai berikut:

$$f_{iR} = - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \quad (25.10)$$

dari bentuk kuadrat

$$F = \frac{1}{2} \sum_{ik} \alpha_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k \quad (25.11)$$

yang disebut sebagai *fungsi dissipasi*.

Gaya yang dinyatakan pada pers.[25.10] harus ditambahkan pada ruas kanan persamaan Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}. \quad (25.12)$$

Fungsi dissipasi sendiri mempunyai arti fisis penting fungsi ini menentukan intensitas dissipasi dari energi sistem. Untuk itu mudah ditunjukkan, yaitu dengan menurunkan energi mekanis sistem terhadap waktu

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L \right) = \sum_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \\ &= - \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \end{aligned}$$

Dalam hal ini  $F$  adalah fungsi kuadrat dari kecepatan maka berdasarkan persamaan Euler untuk suatu fungsi homogen jumlah suku pada ruas kanan persamaan di atas adalah sama dengan  $2F$  sehingga

$$\frac{dE}{dt} = 2F, \quad (25.13)$$

berarti bahwa perubahan energi terhadap waktu (kecepatan energi) adalah sama dengan dua kali fungsi dissipasi. Karena peristiwa dissipasi selalu diikuti dengan penurunan harga energi, haruslah selalu  $F > 0$ , yaitu bahwa bentuk kuadrat pada pers. [25.11] adalah selalu positif.

Persamaan gerak untuk getaran kecil dengan adanya gesekan diberikan dengan menambahkan gaya-gaya dari pers. [25.8] pada ruas kanan pers. [25.5], atau

$$\sum_k m_{ik} \ddot{x}_k + \sum_k k_{ik} x_k = - \sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k. \quad (25.14)$$

Jika disubstitusikan

$$x = A e^{rt}$$

pada persamaan di atas, akan diperoleh persamaan aljabar biasa dalam  $r$  sebagai berikut

$$\sum_k (m_{ik} r^2 + \alpha_{ik} r + k_{ik}) = 0. \quad (25.15)$$

Dengan menggunakan determinan dari sistem ini akan diperoleh persamaan karakteristik yang menentukan harga  $r$ , yaitu

$$|m_{ik} r^2 + \alpha_{ik} r + k_{ik}| = 0. \quad (25.16)$$

Dari determinan di atas akan diperoleh persamaan berpangkat  $2s$  dari  $r$ . Pada umumnya koefisien persamaan ini adalah real, sedangkan akar persamaannya dapat berharga real atau sebagian konjugat kompleks. Dalam hal ini akar-akar real harus berharga negatif dan akar kompleksnya haruslah mempunyai harga bagian real negatif. Seandainya tidak demikian koordinat, kecepatan, dan energi akan bertambah secara eksponensial, sementara terdapat gaya-gaya dissipatif yang akan menyebabkan penurunan harga energi sistem.

## 26. Getaran Dipaksakan dengan Gaya Gesek

Analisa getaran dipaksakan dengan adanya gesekan dapat dipandang analog dengan getaran tanpa gesekan (lihat § 6.2). Dalam pembahasan ini akan dibicarakan suatu kasus menarik dengan adanya gaya luar periodik.

Jika pada ruas kanan pers. [25.1] ditambahkan gaya luar  $f \cos \gamma t$  dan dibagi dengan  $m$ , diperoleh persamaan gerak sebagai berikut

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \gamma t. \quad (26.1)$$

Penyelesaian persamaan ini biasanya diperoleh dalam bentuk variabel kompleks, karenanya suku  $\cos \gamma t$  pada ruas kanan diganti dengan  $e^{i\gamma t}$

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} e^{i\gamma t}.$$

Dengan mengandaikan penyelesaian partikular sama dengan  $x = B e^{i\gamma t}$  maka diperoleh

$$B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)}. \quad (26.2)$$

Jika  $B$  dinyatakan dalam  $be^{i\delta}$ ,  $b$  dan  $\delta$  didapat

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, \quad \tan \delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (26.3)$$

Dengan memisahkan bagian real dari  $Be^{i\omega t} = \beta e^{i(\omega t + \delta)}$ , yang memberikan hasil penyelesaian partikular pers. [26.1] dan penyelesaian umum dari persamaan diferensial homogen (yang lebih jelas dinyatakan untuk kasus  $\omega_0 > \chi$ ), didapat

$$x = a e^{\lambda t} \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\gamma t + \delta). \quad (26.4)$$

Suku pertama pada pers. [26.4] akan menurun secara eksponensial terhapus waktu sehingga untuk interval waktu yang sangat panjang, solusi hanya tinggal

$$x = b \cos(\gamma t + \delta). \quad (26.5)$$

Pernyataan pada pers. [26.3] untuk amplitudo  $b$  dari getaran dipaksakan, dengan frekuensi  $\omega_0$  mendekati  $g$  akan bertambah, tetapi tidak akan mencapai harga tak berhingga, seperti yang terjadi pada peristiwa resonansi getaran tanpa gesekan. Dengan amplitudo gaya ( $f$ ) diketahui, amplitudo getaran akan mencapai harga maksimum untuk frekuensi  $g = \sqrt{\omega_0^2 - 2\chi^2}$ , untuk  $\chi \gg \omega_0$  perbedaan keduanya ( $\omega_0$  dan  $g$ ) akan sangat kecil, yaitu mendekati sama dengan turunan keduanya.

Selanjutnya pandang daerah di dekat frekuensi resonansi, anggap bahwa  $g = \omega_0 + \varepsilon$ , dengan  $\varepsilon$  mempunyai harga sangat kecil dan andaikan pula bahwa  $\chi \ll \omega_0$ . Maka secara pendekatan pers. [26.2] dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = (\gamma + \omega_0)(\gamma - \omega_0) \approx 2\omega_0 \varepsilon, \quad 2i\lambda\gamma \approx 2i\lambda\omega_0,$$

sehingga

$$B = -\frac{f}{2m(\varepsilon - i\lambda)\omega_0} \quad (26.6)$$

atau

$$b = \frac{f}{2m\omega_0(\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2})}, \quad \tan \delta = \frac{\lambda}{\varepsilon}. \quad (26.7)$$

Diketahui dari bentuk karakteristik ketergantungan perbedaan fase  $\delta$  antara getaran dan gaya luar dari frekuensi gaya  $\gamma, \delta$  tetap berharga negatif, berarti bahwa getaran mengalami "perlambatan" dibandingkan dengan gaya luar. Pada peristiwa yang cukup jauh dari daerah resonansi harga  $\delta$  akan menuju nol pada posisi  $\gamma < \omega_0$ , sedangkan pada posisi  $\gamma > \omega_0$  harganya bertambah menjadi  $-\pi$ . Perubahan  $\delta$  dari 0 hingga  $-\pi$  terdapat hanya dalam daerah frekuensi yang sempit (lebar daerah ini adalah  $\sim \lambda$ ) di sekitar  $\omega_0$ . Dalam hubungan ini patut ditandai bahwa dengan adanya gesekan perubahan fase dari getaran dipaksakan dengan harga  $\pi$  terjadi secara tiba-tiba untuk  $\gamma = \omega_0$  (suku kedua pada pers. [22.4] tandanya mengalami perubahan) dengan mengamati adanya gesekan akan memperhalus loncatan tersebut:

Dalam keadaan dipaksakan (pers. [26.5]) energi suatu sistem yang mengalami getaran dipaksakan akan tetap, tidak mengalami perubahan. Sistem juga mengabsorpsi energi tanpa mengalami pemutusan (mengabsorpsi energi secara kontinu dari gaya luar) karena adanya gesekan energi tersebut akan mengalami dissipasi. Apabila jumlah energi rata-rata per satuan waktu sebagai fungsi dari frekuensi gaya luar yang diabsorpsi disimbolkan dengan  $I(\gamma)$ , berdasarkan pers. [25.13] diperoleh

$$I(\gamma) = 2\bar{F},$$

dengan  $\bar{F}$  adalah harga rata-rata dari fungsi dissipasi (perata-rataan fungsi ini terhadap periode). Untuk gerak satu dimensi, berdasarkan pers. [25.11] fungsi dissipasi adalah  $F = \dot{x}^2/2 = c \dot{m}x^2$ . Dengan mensubstitusikan fungsi ini ke pers. [26.5], didapat

$$F = \lambda m b^2 \gamma^2 \sin^2(\gamma t + \delta).$$

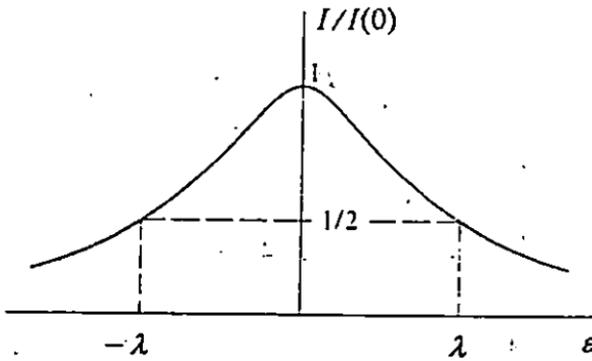
Kuadrat rata-rata terhadap waktu dari fungsi sinus sama dengan 1/2, sehingga berlaku

$$I(\gamma) = \lambda m b^2 \gamma^2. \quad (26.8)$$

Jika amplitudo getaran yang dinyatakan pada pers. [26.7] disubstitusikan, pada daerah di dekat resonansi diperoleh hubungan, sebagai berikut

$$I(\varepsilon) = \frac{f^2}{4m \varepsilon^2 + \lambda^2} \frac{\lambda}{\varepsilon^2 + \lambda^2}. \quad (26.9)$$

Suatu peristiwa absorpsi yang bergantung pada frekuensi demikian disebut sebagai peristiwa *dispersi*. Harga I di mana besaran  $I(\varepsilon)$



Gambar 31:

mempunyai harga  $1/2$  dari harga maksimumnya pada  $\varepsilon = 0$  disebut sebagai lebar setengah (FWHM)  $\equiv$  *frequency width half maximum* dari kurva resonansi (lihat gbr. [31]). Dari pers. [26.9] dengan jelas dapat dilihat bahwa lebar kurva untuk kasus yang dipandang sama dengan konstanta redaman  $\lambda$ . Tinggi kurva maksimum adalah

$$I(0) = \frac{f^2}{4m \lambda}$$

berbanding terbalik terhadap  $\lambda$ . Berarti bahwa dengan mengecil harga konstanta redaman  $\lambda$ , maka kurva resonansi menjadi lebih tinggi dan semakin sempit, dengan perkataan lain harga maksimumnya menjadi

lebih "tajam". Dalam hal ini luas kurva resonansi tetap tidak berubah, yaitu

$$\int_0^{\infty} I(\gamma) d\gamma = \int_{-\omega_0}^{\infty} I(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Dengan membesarnya harga  $\lambda$ , maka harga  $I(\varepsilon)$  akan cepat menurun, sehingga daerah untuk harga  $\lambda$  yang besar menjadi samar, batas bawah integrasi  $I(\varepsilon)$  pada pers. (26.9) dapat diubah menjadi  $-\infty$ .

Dengan demikian, berlaku

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{f^2 \lambda}{4m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2 + \lambda^2} = \frac{\pi f^2}{4m}. \quad (26.10)$$

**Contoh 54:** Tentukan getaran dipaksakan dengan adanya gesekan dalam pengaruh gaya luar  $f = f_0 e^{\alpha t} \cos \gamma t$ .

**Penyelesaian:** Solusi persamaan gerak dalam bentuk kompleks adalah

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0 x = \frac{f_0}{m} e^{\alpha t + i\gamma t}$$

dan pisahkan bagian real persamaan di atas. Sebagai hasilnya didapat persamaan untuk getaran dipaksakan

$$x = b e^{\alpha t} \cos(\gamma t + \delta)$$

dengan

$$b = \frac{f_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 + \alpha^2 - \gamma^2 + 2\alpha\lambda)^2 + 4\gamma^2(\alpha + \lambda)^2}},$$

dan

$$\tan \delta = -\frac{2\gamma(\alpha + \lambda)}{\omega_0^2 + \alpha^2 - \gamma^2 + 2\alpha\lambda}.$$

## 27. Resonansi Parametris

Selain getaran yang telah dibahas sebelumnya, terdapat pula sistem getaran yang tidak tertutup, yaitu getaran yang berada dalam pengaruh luar yang mengandung parameter yang berubah terhadap waktu<sup>1)</sup>.

Parameter sistem gerak satu dimensi adalah koefisien  $m$  dan  $k$  pada fungsi Lagrange pers. [21.3]; jika parameter tersebut bergantung pada waktu, persamaan gerak sistem menjadi:

$$\frac{d}{dt}(m \dot{x}) + kx = 0. \quad (27.1)$$

Dengan mengandaikan suatu besaran yang tidak berubah lain, yaitu  $t$ , selain  $t$  melalui persamaan  $dt = dt/dm(t)$ , didapat

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m k x = 0.$$

Persamaan ini tidak mempunyai batasan bentuk umum sehingga persamaan gerak dapat dianggap mempunyai bentuk, seperti

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega(t)^2 x = 0, \quad (27.2)$$

yang pada pers. [27.1] diberikan  $m = \text{konstanta}$ .

Fungsi  $\omega(t)$  diberikan dari kondisi yang ada; misalnya fungsi ini sebagai periodik dengan frekuensi  $\gamma$  (dan periode  $T = 2\pi/\gamma$ ), berarti

$$\omega(t + T) = \omega(t).$$

Dengan demikian, pers. (27.2) adalah invarian terhadap transformasi  $t \rightarrow t \pm T$ . Demikian pula dengan  $x(t)$  dan  $x(t + T)$  adalah solusi dari persamaan tersebut. Dengan perkataan lain  $x_1(t)$  dan  $x_2(t)$  adalah

1) Sebagai contoh sederhana sistem demikian adalah sebuah bandul dengan titik gantungnya bergerak secara periodik pada arah vertikal (lihat contoh selanjutnya).

dua solusi yang berbeda dari pers. [27.2] sehingga solusi tersebut linier terhadap transformasi  $t \rightarrow t + T$ . Dalam hal ini  $x_1$  dan  $x_2$  dapat dipilih sedemikian sehingga dengan menggantikan  $t$  menjadi  $t + T$  masing-masing dihubungkan dengan faktor konstanta sebagai berikut

$$x_1(t + T) = \mu_1 x_1(t), \quad x_2(t + T) = \mu_2 x_2(t)^2.$$

Bentuk paling umum dari suatu fungsi yang mempunyai sifat seperti ini adalah

$$x_1(t) = \mu^{t/T} \Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu^{t/T} \Pi_2(t), \quad (27.3)$$

dengan  $\Pi_1(t)$  dan  $\Pi_2(t)$  adalah fungsi periodik yang bergantung pada waktu secara murni dengan periode  $T$ .

Konstanta  $\mu_1$  dan  $\mu_2$  dalam fungsi ini haruslah mempunyai hubungan tertentu satu sama lain. Kenyataannya diperoleh melalui perkalian persamaan

$$\dot{\bar{x}}_1 + \omega^2(t) x_1 = 0, \quad \dot{\bar{x}}_2 + \omega^2(t) x_2 = 0.$$

dengan  $x_2$  dan  $x_1$  dan membaginya menjadi

$$\dot{\bar{x}}_1 x_2 - x_1 \dot{\bar{x}}_2 = \frac{d}{dt} (\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2) = 0$$

atau

$$\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2 = \text{konstanta}. \quad (27.4)$$

- 2) Pemilihan  $x_1$  dan  $x_2$  seperti ini adalah ekuivalen dengan operasi diagonalisasi matriks dalam transformasi linier

$$x_i(t + T) = \sum_k M_{ik} z_k(t),$$

yang merupakan solusi dari persamaan sekular kuadratis. Dalam hal ini dianggap bahwa masing-masing solusi persamaan ini adalah berbeda.

Dengan mengubah argumen  $t$  sebesar  $T$  untuk kasus fungsi  $x_1(t)$  dan  $x_2(t)$  sembarang pada pers. [27.3] akan muncul faktor  $\mu_1, \mu_2$ . Karenanya dapat pula dibuktikan bahwa pers. [27.4] akan dipenuhi jika

$$\mu_1 \mu_2 = 1. \quad (27.5)$$

Kunci selanjutnya dari perkalian konstanta  $\mu_1, \mu_2$  dapat diperoleh, jika dipandang bahwa koefisien-koefisien pada pers. [27.2] merupakan bilangan real. Jika  $x(t)$  merupakan solusi persamaan ini, diketahui pula bahwa fungsi konjugat kompleks  $x^*(t)$  juga merupakan persamaan yang sama. Dengan demikian, maka pasangan konstanta  $\mu_1, \mu_2$  dengan pasangan konstanta  $\mu_1^*, \mu_2^*$  haruslah sama, yaitu dapat berlaku  $\mu_1 = \mu_2^*$  atau  $\mu_1$  dan  $\mu_2$  berharga real. Untuk kasus pertama, dari pers. [27.5] diketahui bahwa  $\mu_1 = 1/\mu_1^*$ , atau berarti pula bahwa  $|\mu|^2 = |\mu_2|^2$  sehingga harga  $\mu_1$  dan  $\mu_2$  adalah sama dengan satu.

Untuk kasus kedua solusi persamaan independen dari pers. [25.2] dalam bentuk

$$x_1(t) = \mu^{t/T} \Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu^{t/T} \Pi_2(t), \quad (27.6)$$

dalam hal ini harga  $\mu \neq 1$  dan dapat pula berharga positif atau negatif. Salah satu dari fungsi ini (masing-masing untuk solusi pertama dan kedua adalah  $|\mu| > 1$  dan  $|\mu| < 1$  akan meningkat secara eksponensial. Hal ini berarti bahwa sistem dalam keadaan diam (pada posisi setimbang  $x = 0$ ) adalah tidak stabil, cukup jika terdapat simpangan kecil dari sistem dari keadaan semula, akan menyebabkan kenaikan yang cepat dari simpangan. Peristiwa semacam ini disebut sebagai *resonansi parametris*.

Dari peristiwa ini dapat ditilik hal berikut jika  $x$  dan  $\dot{x}$  pada keadaan awal sama dengan nol, maka keduanya akan tetap mempunyai harga nol untuk waktu selanjutnya. Hal ini berlawanan dengan peristiwa resonansi biasa (lihat § 6.2), pada resonansi biasa tetap terdapat simpangan yang bergantung pada waktu (sebanding dengan  $t$ ) walaupun harga awal keduanya sama dengan nol.

*Apa penyebab penting terjadinya resonansi parametris?*

Resonansi parametris terjadi jika harga  $\omega(t)$  hanya berbeda sedikit dari harga konstanta  $\omega_0$  dan merupakan fungsi periodik sederhana dari

$$\omega(t)^2 = \omega_0^2 (1 + h \cos \gamma t), \quad (27.7)$$

dengan harga konstanta  $h \ll 1$  (dianggap harga  $h$  adalah positif yang tetap dapat tercapai dalam pemilihan waktu awal). Seperti yang akan dilihat nantinya bahwa resonansi parametris akan terjadi dengan kuat jika frekuensi sebagai fungsi waktu  $\omega(t)$  sama dengan dua kali harga frekuensi konstanta  $\omega_0$ . Dengan dasar ini substitusikan

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon$$

dengan  $\varepsilon \ll \omega_0$

Solusi persamaan gerak menjadi <sup>3)</sup>

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + h \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t] x = 0 \quad (27.8)$$

diperoleh dalam bentuk

$$x = a(t) \cos \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t + b(t) \sin \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t, \quad (27.9)$$

dengan  $a(t)$  dan  $b(t)$  fungsi yang berubah dengan lambat terhadap waktu (bandingkan dengan faktor cosinus dan sinus). Solusi ini tentunya bukan merupakan penyelesaian eksak. Sesungguhnya persamaan tersebut juga mengandung suku dengan frekuensi yang mempunyai perbedaan dari  $(\omega_0 + \varepsilon/2)$  hingga kelipatan dari  $(\omega_0 + \varepsilon)$ ; suku tersebut akan mempunyai harga kecil, dalam orde  $h$ , dan dengan pendekatan pertama faktor tersebut dapat diabaikan (lihat contoh 58).

Substitusikan pers. (27.9) ke pers. [27.8] dan untuk pendekatan pertama perhatikan hanya suku yang mengandung  $\varepsilon$  berpangkat satu. Dalam hal ini dianggap bahwa  $a \sim \varepsilon a$  dan  $b \sim \varepsilon b$  (kebenaran dari pengandaian ini dapat dilihat dari hasil perhitungan nantinya)

3) Persamaan dalam bentuk ini (dalam harga  $g$  dan  $h$  sembarang) dalam fisika matematika disebut sebagai persamaan diferensial Mathieus.

Jika produk tersebut ditulis dalam faktor penjumlahan trigonometri, misalnya

$$\begin{aligned} \cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t \cdot \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t &= \frac{1}{2} \cos\left(3\omega_0 + \frac{3\varepsilon}{2}\right)t \\ &+ \frac{1}{2} \cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t, \end{aligned}$$

dan seterusnya dan dengan alasan yang telah disebutkan di atas, suku yang mengandung  $3(\omega_0 + \varepsilon/2)$  diabaikan, diperoleh

$$\begin{aligned} -\left(2\dot{a} + b\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2}b\right)\omega_0 \sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t \\ + \left(2\dot{b} + a\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2}a\right)\omega_0 \cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t = 0 \end{aligned}$$

Persamaan ini akan terpenuhi jika faktor yang dikandung sinus dan cosinus sama dengan nol. Dengan demikian, akan diperoleh sistem dua persamaan diferensial untuk fungsi  $a(t)$  dan  $b(t)$ . Dengan cara yang umum akan dicari penyelesaian persamaan ini, yang sebanding dengan  $e^{st}$ . Solusi tersebut memberikan persamaan, sebagai berikut

$$\begin{aligned} sa + \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2}b\right)b &= 0, \\ -sb + \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2}a\right)a &= 0. \end{aligned}$$

Agar kedua persamaan aljabar di atas tidak mempunyai solusi trivial, haruslah berlaku

$$s^2 = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{h\omega_0}{2} \right)^2 - \varepsilon^2 \right]. \quad (27.10)$$

Syarat terjadinya resonansi parametris mengandung pengertian bahwa  $s$  haruslah berharga real (atau  $s^2 > 0$ )<sup>4)</sup>. Selanjutnya resonansi akan

4) Konstanta  $\mu$  pada pers [276] berhubungan dengan  $s$  melalui relasi  $\mu = -e^{st}/\omega_0$  (dengan mensubstitusikan  $t$  dengan  $t + 2\pi/2\omega_0$ , cosinus dan sinus pada pers. [27.9] akan berubah tanda).

$e^{(s-\omega)t}$  (dengan harga  $s$  positif yang diperoleh dari solusi getaran tanpa gesekan) dan batas dari daerah instabil dapat ditentukan dari persamaan  $s-\lambda = 0$ . Dengan menggunakan  $s$  dari pers. [27.10] diperoleh daerah resonansi selain daerah resonansi pada pers. [27.11] yang ditulis dalam ketidaksamaan sebagai berikut

$$-\sqrt{\frac{h\omega_0}{2} - 4\lambda^2} < \varepsilon < \sqrt{\frac{h\omega_0}{2} - 4\lambda^2}. \quad (27.12)$$

Patut pula dicatat bahwa dalam hal ini resonansi tidak akan terjadi untuk harga amplitudo  $h$  yang kecil sembarang, tetapi terjadi hanya untuk harga "puncak"  $h_k$  untuk kasus pers. [27.12] berlaku

$$h_k = \frac{4\lambda}{\omega_0}.$$

Dapat pula ditunjukkan bahwa resonansi di dekat harga  $2\omega_0/n$  harga "puncak"  $h_k$  sebanding dengan  $\lambda^{1/n}$ , yaitu meningkat dengan bertambahnya  $n$ .

**Contoh 55:** Tentukan daerah instabil dari resonansi di dekat harga  $g = 2\omega_0$  dengan ketepatan dalam suku yang mengandung  $h^2$ .

### Penyelesaian

Penyelesaian yang dicari adalah penyelesaian pers. [27.8] dalam bentuk

$$x = a_0 \cos \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t + b_0 \sin \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \\ + a_1 \cos 3 \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t + b_1 \sin 3 \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t$$

yaitu mengandung orde  $h$  lebih tinggi dari penyelesaian pers. [27.9]. Karena hanya pada daerah instabil yang menjadi perhatian, koefisien  $a_0$ ,  $b_0$ , dan  $b_1$  dianggap sebagai konstanta (dengan catatan dari catatan kaki pada halaman sebelumnya). Dengan mensubstitusikan ke pers. [27.8], fungsi-fungsi trigonometri ditulis dalam bentuk penjumlahan dan diperoleh suku-suku yang mengandung  $5(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})$ , yang hanya berlaku

untuk pendekatan orde lebih tinggi. Perhitungan seperti ini menghasilkan persamaan, sebagai berikut

$$\begin{aligned} & \left[ -a_0 \left( \omega_0 \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) + \frac{h\omega_0^2}{2} a_0 + \frac{h\omega_0^2}{2} a_1 \right] \cos \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \\ & + \left[ -b_0 \left( \omega_0 \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) - \frac{h\omega_0^2}{2} b_0 + \frac{h\omega_0^2}{2} b_1 \right] \sin \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \\ & + \left[ \frac{h\omega_0^2}{2} a_0 - 8\omega_0^2 a_1 \right] \cos 3 \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \\ & + \left[ \frac{h\omega_0^2}{2} b_0 - 8\omega_0^2 b_1 \right] \sin 3 \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t = 0. \end{aligned}$$

Pada suku yang mengandung  $\omega_0^2 + \varepsilon/2$  merupakan besaran kecil orde pertama dan kedua, sedangkan pada suku yang mengandung  $3(\omega_0 + \varepsilon/2)$  tetap merupakan suku orde pertama. Semua rumusan yang ditulis dalam tanda kurung segi empat haruslah sama dengan nol. Dengan mensubstitusikan harga nol pada dua ruas terakhir, diperoleh

$$a_1 = \frac{h}{16} a_0, \quad b_1 = \frac{h}{16} b_0,$$

sementara untuk dua suku awal memberikan hasil, sebagai berikut

$$\omega_0 \varepsilon \pm \frac{h\omega_0^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{h^2\omega_0^2}{32} = 0.$$

Penyelesaian persamaan ini hingga mencapai orde  $h^2$  dan diperoleh untuk batas daerah yang dicari, yaitu

$$\varepsilon = \pm \frac{h\omega_0}{2} - \frac{1}{32} h^2 \omega_0.$$

**Contoh 56:** Tentukan daerah instabil dari resonansi di dekat harga  $\gamma = \omega_0$  !

**Penyelesaian**

Misalkan,  $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$  dan diperoleh persamaan gerak

$$m \ddot{x} + \omega_0^2 [1 + h \cos(\omega_0 + \varepsilon) t] x = 0.$$

Diperhatikan pula bahwa untuk harga batas berlaku  $\varepsilon \sim h^2$  dan cari penyelesaian persamaan gerak dalam:

$$x = a_0 \cos(\omega_0 + \varepsilon) t + b_0 \sin(\omega_0 + \varepsilon) t + a_1 \cos 2(\omega_0 + \varepsilon) t + b_1 \sin 2(\omega_0 + \varepsilon) t + c_1.$$

sejak awal hanya diperhatikan suku yang mengandung orde pertama dan kedua saja. Untuk menentukan batas daerah instabil koefisien-koefisien persamaan di atas dianggap sebagai konstanta, diperoleh

$$\begin{aligned} & \left[ -2\omega_0 \varepsilon a_0 + \frac{h\omega_0^2}{2} a_1 + h\omega_0^2 c_1 \right] \cos(\omega_0 + \varepsilon) t \\ & + \left[ -2\omega_0 \varepsilon b_0 + \frac{h\omega_0^2}{2} b_1 + h\omega_0^2 c_1 \right] \sin(\omega_0 + \varepsilon) t \\ & + \left[ -3\omega_0^2 a_1 + \frac{h\omega_0^2}{2} a_0 \right] \cos(\omega_0 + \varepsilon) t \\ & + \left[ -3\omega_0^2 b_1 + \frac{h\omega_0^2}{2} b_0 \right] \sin(\omega_0 + \varepsilon) t = 0 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama seperti pada contoh 58, diperoleh

$$a_1 = \frac{h}{6} a_0 \quad b_1 = \frac{h}{6} b_0 \quad c_1 = -\frac{h}{2} a_0$$

sedangkan harga batas daerah instabil menjadi

$$\varepsilon = -\frac{5}{24} h^2 \omega_0, \quad \varepsilon = -\frac{1}{24} h^2 \omega_0.$$

**Contoh 57:** Tentukan syarat untuk terjadinya resonansi parametris untuk getaran kecil dari bandul bidang dengan titik gantungnya yang mengalami getaran vertikal.

### Penyelesaian

Dari contoh 3c pada § 5 diketahui fungsi Lagrange untuk getaran kecil bandul bidang ( $\varphi \ll 1$ ) diperoleh persamaan gerak, sebagai berikut.

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \left( 1 + 4 \frac{a}{l} \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t \right) \varphi = 0$$

dengan  $\omega_0^2 = g/l$ . Dalam hal ini didapat pula bahwa perbandingan  $4a/l$  mempunyai peran penting untuk parameter yang dijelaskan di dalam teks. Syarat pada pers. [27.11], menjadi

$$|\varepsilon| < \frac{2a\sqrt{g}}{l^{3/2}}$$

## 28. Getaran Tidak Harmonik

Seluruh teori getaran kecil yang dibicarakan di atas didasari dari deret energi potensial dan kinetik sistem terhadap koordinat dan kecepatan hingga orde kedua; deret demikian akan menghasilkan persamaan gerak linier karena getaran dengan persamaan gerak demikian disebut sebagai getaran linier. Walaupun pembatasan suku dalam deret dibentuk untuk getaran beramplitudo cukup kecil, dengan menambahkan suku berorde lebih tinggi dalam deret (disebut sebagai *aharmonisitas* atau *getaran tidak linier*) diperoleh pula getaran yang berbeda dari orde kedua.

Dalam hal ini fungsi Lagrange dideretkan hingga suku orde ketiga. Pada energi potensial akan muncul suku orde ketiga dari koordinat  $x$ , sedangkan pada energi kinetik muncul suku dalam bentuk perkalian antara koordinat dan kecepatan seperti  $x_1, x_k, x_l$ ;

perbedaan dengan pertanyaan sebelumnya, pers. [23.3] adalah dalam penderetan fungsi  $a_{ik}(k)$  dalam suku  $x$  berpangkat satu. Dengan demikian, fungsi Lagrange dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k) + \frac{1}{2} \sum_{i,k,l} n_{ikl} \dot{x}_i \dot{x}_k x_l - \frac{1}{3} \sum_{i,k,l} l_{ikl} x_i x_k x_l, \quad (28.1)$$

dengan  $n_{ikl}, l_{ikl}$  adalah koefisien konstanta yang baru. Jika disamping koordinat  $x_i$  diperkenalkan pula koordinat normal  $Q_\alpha$  (dengan pendekatan linier), transformasi yang linier tersebut menyebabkan penjumlahan yang terdapat pada suku ketiga dan keempat pada pers [28.1] akan menjadi penjumlahan yang analog pula, yaitu hanya mengganti koordinat  $x_i$  dan kecepatan  $\dot{x}_i$  menjadi  $Q_\alpha$  dan  $\dot{Q}_\alpha$ . Apabila koefisien pada penjumlahan ini dituliskan dalam  $\chi_\alpha \beta_\gamma$  dan

$\mu_{\alpha\beta\gamma}$ , fungsi Lagrange dalam koordinat normal dapat ditulis menjadi

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} (\lambda_{\alpha\beta\gamma} \dot{Q}_\alpha \dot{Q}_\beta Q_\gamma - \frac{1}{3} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \mu_{\alpha\beta\gamma} Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma). \quad (28.2)$$

Tidak akan dipersoalkan kembali bagaimana mencari persamaan gerak secara lengkap dari fungsi Lagrange di atas Akan tetapi, telah diketahui bahwa untuk fungsi demikian akan diperoleh persamaan gerak, sebagai berikut

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}), \quad (28.3)$$

dengan  $f_\alpha$  adalah fungsi homogen derajat dua dari  $Q$  dan turunannya.

Dengan menggunakan metode pendekatan suksesif, solusi persamaan ini dapat dibentuk dalam persamaan

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)} + Q_\alpha^{(2)}. \quad (28.4)$$

dengan  $Q_{\alpha}^{(2)} \ll Q_{\alpha}^{(1)}$  dan fungsi  $Q_{\alpha}^{(1)}$  adalah penyelesaian persamaan tanpa gangguan yang memenuhi persamaan diferensial, sebagai berikut

$$\ddot{Q}_{\alpha}^{(1)} + \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha}^{(1)} = 0;$$

dan penyelesaiannya merupakan persamaan getaran sederhana, sebagai berikut

$$Q_{\alpha}^{(1)} = a_{\alpha} \cos(\omega_{\alpha} t + \alpha_{\alpha}). \quad (28.5)$$

Untuk pendekatan selanjutnya perhatikan ruas kanan pers. [28.3] dengan memandang suku orde kedua dan untuk  $Q_{\alpha}^{(2)}$  diperoleh persamaan diferensial, sebagai berikut

$$\ddot{Q}_{\alpha}^{(2)} + \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha}^{(2)} = f_{\alpha}(Q^{(1)}, \dot{Q}^{(1)}, \ddot{Q}^{(1)}), \quad (28.6)$$

dengan mensubstitusikan ke ruas kanan pers. [28.5]. Oleh karena itu, diperoleh persamaan diferensial homogen linier dengan ruas kanan dapat ditulis dalam bentuk penjumlahan fungsi-fungsi periodik, sebagai berikut

$$\begin{aligned} Q_{\alpha}^{(1)} Q_{\beta}^{(1)} &= a_{\alpha} a_{\beta} \cos(\omega_{\alpha} t + \alpha_{\alpha}) \cos(\omega_{\beta} t + \alpha_{\beta}) \\ &= \frac{1}{2} a_{\alpha} a_{\beta} \{ \cos [(\omega_{\alpha} + \omega_{\beta}) t + \alpha_{\alpha} + \alpha_{\beta}] \\ &\quad + \cos [(\omega_{\alpha} - \omega_{\beta}) t + \alpha_{\alpha} - \alpha_{\beta}] \}. \end{aligned}$$

Pada ruas kanan pers. [28.6] muncul suatu suku yang bergetar dengan frekuensi sama dengan penjumlahan dan pengurangan frekuensi eigen dari sistem. Solusi persamaan ini harus dicari sedemikian, yaitu persamaan yang masing mengandung faktor periodik. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa dalam sistem seperti ini di samping terdapat getaran yang bergetar dengan frekuensi  $\omega_{\alpha}$ , terdapat pula getaran lain yang bergetar dengan frekuensi

$$\omega_{\alpha} \pm \omega_{\beta} \quad (28.7)$$

yang saling saling tumpang tindih satu sama lainnya (dalam hal ini adanya frekuensi ganda  $2\omega_a$  dan 0 sesuai dengan pergeseran yang ada). Frekuensi serupa ini disebut sebagai *frekuensi kombinasi*. Amplitudo *getaran kombinasi* adalah sebanding dengan perkalian dari  $a_a$ ,  $a$  (atau  $a_a^2$ ) yang dibentuk dari amplitudo getaran normal.

Untuk pendekatan lebih tinggi, yaitu dengan memperhatikan suku-suku deret yang lebih tinggi dalam fungsi Lagrange, akan muncul getaran kombinasi dengan frekuensi kombinasi sejumlah frekuensi  $\omega_a$ . Selain itu, terdapat pula fenomena lain.

Untuk pendekatan yang dibuat dalam orde ketiga muncul fenomena seperti ini, yaitu fenomena yang mengandung frekuensi sama dengan  $\omega_a$  ( $= \omega_a + \omega_b - \omega_b$ ). Jika digunakan metode yang telah dibahas di atas, pada ruas kanan persamaan gerak akan muncul suku resonansi yang mempengaruhi solusi persamaan tersebut dengan amplitudo bertambah terhadap waktu. Secara fisis hal tersebut jelas bahwa di dalam sistem tertutup besarnya getaran dengan adanya sumber energi dari luar tidak dapat lagi mempunyai harga sembarang.

Dalam kenyataan suku-suku yang terkandung dalam pendekatan yang lebih tinggi frekuensi dasar  $\omega_a$  dibandingkan dengan frekuensi getaran tanpa gangguan  $\omega_a^{(0)}$  terletak sebagai frekuensi kuadrat pada energi potensial. Adanya suku yang bertambah terhadap waktu bergantung pada deret dengan tipe, sebagai berikut

$$\cos(\omega_a^{(0)} + \Delta\omega_a)t \approx \cos\omega_a^{(0)}t - t\Delta\omega_a \sin\omega_a^{(0)}t,$$

yang tentunya untuk harga  $t$  yang cukup besar tidak akan diperbolehkan. Dengan dasar ini untuk pendekatan yang mengandung suku lebih tinggi, metode pendekatan suksesif harus mengalami perubahan, yaitu suku yang mengandung faktor periodik tidak lagi dinyatakan dalam pendekatan seperti telah dibuat di atas. Namun, harus dicantumkan sebagai faktor periodik sebagaimana adanya, yaitu masih mengandung frekuensi. Perubahan frekuensi diberikan dari solusi justru dengan syarat bahwa tidak boleh mengandung suku resonansi.

Akan didemonstrasikan metode tersebut untuk contoh getaran anharmonik dengan satu derajat kebebasan dengan mengambil fungsi Lagrange sebagai berikut

$$L = \frac{m \dot{x}^2}{2} - \frac{m \omega_0^2}{2} x^2 - \frac{m \alpha}{3} x^3 - \frac{m \beta}{4} x^4. \quad (28.8)$$

Persamaan gerak yang berhubungan dengan fungsi Lagrange di atas adalah

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3. \quad (28.9)$$

Untuk mencari solusi persamaan gerak ini, gunakan pendekatan suksesif dengan mensubstitusikan persamaan

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)},$$

dengan

$$x^{(1)} = a \cos \omega t \quad (28.10)$$

yang mengandung harga  $\omega$  secara eksak, dan akan ditentukan bentuk frekuensi dalam deret  $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \dots$  (fase awal dari  $x^{(1)}$  dapat ditentukan sembarang bergantung pada pemilihan keadaan awal, yaitu dianggap sama dengan nol). Selanjutnya persamaan gerak yang diberikan pada pers. [28.9] dengan cara lebih sederhana substitusikan pers. [28.10] dengan ruas kanan persamaan tidak harus sama dengan nol. Dengan demikian, bentuk persamaan gerak, menjadi

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3 - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right) \ddot{x}. \quad (28.11)$$

Dengan mengambil  $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ ,  $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)}$  dan abaikan semua suku dengan orde lebih tinggi lainnya maka untuk  $x^{(2)}$  diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} &= -\alpha a^2 \cos^2 \omega t + 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos \omega t \\ &= \frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\alpha a^2}{2} \cos 2\omega t + 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos \omega t. \end{aligned}$$

Syarat tidak mengandungnya suku resonansi pada ruas kanan persamaan akan menghasilkan  $\omega^{(1)} = 0$ , yaitu sebagai metode yang telah dibicarakan dalam mencari solusi untuk pendekatan kedua. Dengan demikian, solusi persamaan diferensial inhomogen dengan cara biasa, diperoleh

$$x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega t. \quad (28.12)$$

Untuk langkah selanjutnya substitusikan pers. [28.11]  $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$ ,  $\omega = \omega_0 + \omega_0^{(2)} + x^{(3)}$  dan diperoleh persamaan gerak untuk  $x^{(3)}$

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -2\alpha x^{(1)} x^{(2)} - \beta x^{(1)^3} + 2\omega_0 \omega^{(2)} x^{(1)}$$

atau dengan menggunakan pers. [28.10] dan [28.12] dapat diperoleh rumusan yang lebih sederhana, yaitu:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = & -a^3 \left[ \frac{\beta}{4} + \frac{\alpha^2}{6\omega_0^2} \right] \cos 3\omega t \\ & + a \left[ 2\omega_0 \omega^{(2)} + \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^2} - \frac{3}{4} a^2 \beta \right] \cos \omega t. \end{aligned}$$

Dengan memasukkan faktor resonansi  $\cos \omega t$  sama dengan nol maka koreksi frekuensi dasar, diperoleh

$$\omega^{(2)} = \left( \frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3} \right) a^2. \quad (28.13)$$

Frekuensi ini adalah sebanding dengan amplitudo kuadrat. Solusi getaran kombinasi orde ketiga diperoleh, sebagai berikut

$$x^{(3)} = \frac{a^3}{16\omega_0^2} \left( \frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} + \frac{\beta}{2} \right) \cos 3\omega t. \quad (28.14)$$

## 29. Resonansi pada Getaran Tidak Linier

Pengamatan suku-suku anharmonik pada getaran dipaksakan suatu sistem menuju pada suatu fenomena resonansi yang lain.

Apabila pada ruas kanan pers. [28.9] ditambahkan suatu gaya luar yang periodik (bergetar dengan frekuensi  $\gamma$ ), diperoleh

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3 \quad (29.1)$$

dalam hal ini ditambahkan pula suatu gaya gesek (pengaruhnya dianggap amat kecil) dengan konstanta redaman  $\lambda$ . Harus pula diperhatikan dengan seksama bahwa adanya suku yang tidak linier pada persamaan getaran harmonik suku dari gaya luar yang berderajat tinggi, sesuai dengan ketergantungan gaya terhadap simpangan  $x$ . Akan tetapi, suku-suku ini kemudian diabaikan demi menyederhanakan rumusan; pengabaian ini tidak mengubah gambaran peristiwa secara kualitatif. Misalkan,

$$\varphi = \omega_0 + \varepsilon$$

(anggap bahwa harga  $\varepsilon$  adalah kecil) berarti dengan kondisi tersebut, getaran berada pada daerah di dekat daerah resonansi biasa. Dalam memperhatikan karakter gerak yang muncul ini dapat digunakan rumusan yang terdapat dalam pers. [29.1] secara langsung, yaitu dengan memperhatikan pemikiran, sebagai berikut

Untuk pendekatan linier ketergantungan amplitudo getaran dipaksakan  $b$  terhadap amplitudo gaya luar  $f$  dan frekuensi  $\gamma$  di dekat daerah resonansi, diperoleh dari pers. [26.7] adalah

$$b^2 (\varepsilon^2 + \lambda^2) = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2} \quad (29.2)$$

Ketidaklinieran getaran terletak pada ketergantungan frekuensi eigennya terhadap amplitudo; frekuensi getaran ini ditulis dalam bentuk:

$$\omega_0 + \chi b^2 \quad (29.3)$$

dengan konstanta  $\chi$  dapat diperoleh dari koefisien anharmonisitas (lihat pers. [28.13]). Selanjutnya substitusikan pers. [29.3] ke [29.2] (tepatnya dengan mengambil perbedaan yang kecil dari  $\gamma - \omega_0$ ), yaitu mengganti  $\omega_0$  dengan  $\omega_0 + \chi b^2$ .

Jika ditulis  $\varepsilon = \gamma - \omega_0$ , sebagai hasilnya diperoleh persamaan sebagai berikut

$$b^2 [(\varepsilon - \chi b^2)^2 + \lambda^2] = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2} \quad (29.4)$$

atau

$$\varepsilon = \chi b^2 \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2m\omega_0}\right)^2 - \lambda^2}.$$

Pers. [29.4] adalah berderajat tiga dari  $b^2$  dan akar realnya menentukan amplitudo getaran dipaksakan. Sekarang perhatikan ketergantungan amplitudo ini terhadap frekuensi dari gaya luar, jika amplitudo gaya luar adalah  $p$ .

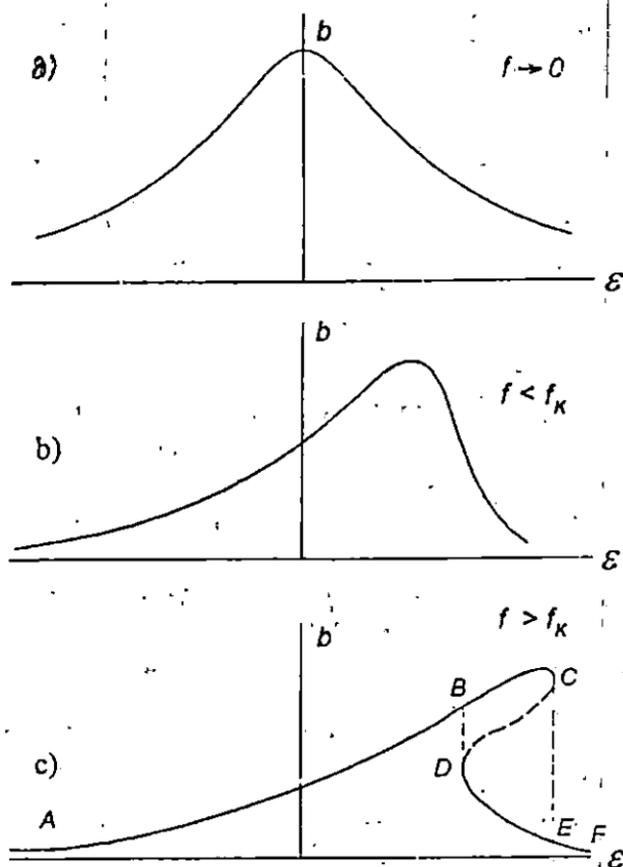
Untuk harga  $f$  yang cukup kecil, amplitudo  $b$  juga kecil, sehingga suku-suku ruas kanan yang mengandung pangkat dalam orde lebih tinggi ( $b^4$  dan  $b^6$ ) dapat diabaikan. Dengan demikian, akan diperoleh kembali pers. [29.2] untuk fungsi  $b(\varepsilon)$  yang akan digambarkan dalam kurva simetris dengan maksimum berada pada  $\varepsilon = 0$  (lihat gbr. [32a]).

Dengan bertambahnya  $f$ , kurva akan mengalami deformasi (perubahan bentuk) dan memperhatikan karakternya sebagai berikut kurva dalam hal ini mempunyai maksimum (lihat gambar [32b]) yang hanya mengalami pergeseran ( $\chi > 0$ ) ke arah  $\varepsilon$  positif dan untuk kasus ini pers. [29.4] hanya mempunyai tiga akar real

Untuk harga tertentu  $f = fk$  (yang akan ditentukan nantinya karakter kurva akan mengalami perubahan. Untuk setiap harga  $f > fk$  terdapat daerah frekuensi tertentu di mana pers. [29.4] mempunyai tiga akar real, kasus ini memenuhi potongan kurva  $BACDE$  pada gbr. [32c].

Batas daerah ini diperoleh dengan syarat harga  $db/de = \infty$  pada titik  $D$  dan  $C$ . Dengan menurunkan pers. [29.4] terhadap  $e$ , didapat:

$$\frac{db}{d\varepsilon} = \frac{-\varepsilon b + \chi b^3}{\varepsilon^2 + \lambda^2 - 1\chi\varepsilon\lambda + 3\chi^2 b^4}.$$



gambar 32

Posisi titik  $D$  dan  $C$  dapat diperoleh dengan menyelesaikan kedua persamaan

$$\epsilon^2 - 4\chi b^2 \epsilon + 3\chi^2 b^4 + \lambda^2 = 0 \quad (29.5)$$

dan pers. [29.4]; harga  $\epsilon$  yang ditentukan ini keduanya adalah positif. Amplitude akan mempunyai harga terbesarnya pada titik di mana  $db/d\epsilon = 0$ . Dalam keadaan ini  $\epsilon = \chi b^2$  dan dari pers. [29.4], diperoleh

$$b_{\text{maks}} = \frac{f}{2m\omega_0\lambda} \quad (29.6)$$

Harga ini sama dengan harga maksimum yang diberikan oleh pers. [29.2].

Dapat pula ditunjukkan bahwa (dalam hal ini tidak akan dibuktikan)<sup>6)</sup>, bahwa untuk tiga akar real dari pers. [29.4], rata-rata (yaitu potongan kurva  $CD$  pada gbr. [32c] yang ditandai dengan garis putus-putus) sesuai dengan keadaan tidak stabil dari sistem: melalui suatu pengaruh yang lemah pada sistem dalam keadaan demikian keadaan ini dapat berubah menjadi bentuk getaran, yang mempunyai harga akar terbesar atau terkecil (yaitu terjadi masing-masing untuk potongan kurve  $BC$  dan  $DE$ ). Getaran real hanya terjadi pada potongan kurva  $ABC$  dan  $DEF$ . Suatu penilaian yang khususnya berarti dalam hal ini adalah menggambarkan adanya ketergantungan daerah frekuensi yang hanya memenuhi dua amplitudo yang berbeda. Dengan bertambahnya frekuensi gaya luar secara drastis, selanjutnya amplitudo getaran dipaksakan akan meningkat sepanjang kurva  $ABC$ . Pada titik  $C$  amplitudo akan "menghilang" hampir tidak terlihat hingga mencapai titik  $E$ , selanjutnya berubah (dengan semakin besarnya penambahan frekuensi) sepanjang kurva  $EF$ . Jika frekuensi kembali diperkecil, amplitudo akan bertambah besar sepanjang kurva  $FD$  dan harganya akan "melompat" dari titik  $D$  langsung ke  $B$  untuk kemudian harga amplitudo akan bergerak mengecil sepanjang kurva  $BA$ .

Untuk menghitung harga  $f_k$  yang bersangkutan paut dengan harga  $f$ , dalam hal ini kedua akar (dalam  $b^2$ ) dari persamaan kuadrat adalah harus sama dengan pers. [29.5]; untuk harga  $f = f_k$  potongan kurva  $CD$  seluruhnya "mengkerut" menjadi satu titik balik. Penyamaan dengan nol suatu diskriminan dari persamaan kuadrat pada pers. [29.5] akan memberikan harga  $\varepsilon^2 = 3\lambda^2$  dan berhubungan dengan harga akar yang berkenaan dengan persamaan  $\chi^2 b^2 = 2\varepsilon/3$ . Jika harga  $b$  dan  $\varepsilon$  ini disubstitusikan ke pers. [25.4], diperoleh

---

6) Pembuktian akan hal ini misalnya dapat ditemukan pada buku N.N. Bogoljubov dan J.A. Mitropolskij: "Metode Asimtotik pada Teori Getaran Nonlinier", Percetakan Negara untuk literatur Fisika Matematika, Moskow 1963. Terjemahan dalam bahasa Jerman "Asymptotische Methoden in der Theorie nichtlinearer Schwingungen", Akademie Verlag, Berlin 1964.

$$f_k^2 = \frac{32 m^2 \omega_0^2 \lambda^3}{3\sqrt{3} |x|} \quad (29.7)$$

Selain perubahan karakter fenomena resonansi pada frekuensi  $\gamma \approx \omega_0$  getaran yang tidak linier ini juga menyebabkan timbulnya resonansi yang baru, yang terjadi pada getaran dengan frekuensi di dekat harga  $\omega_0$  dipengaruhi oleh gaya luar, dengan frekuensi yang jauh berbeda dengan  $\omega_0$  sendiri.

Anggap bahwa frekuensi gaya luar adalah  $\gamma \approx \omega_0/2$ , berarti

$$\gamma = \frac{\omega_0}{2} + \varepsilon.$$

Dalam pendekatan linier pertama akan terjadi getaran dengan frekuensi yang sama dan dengan amplitudo yang sebanding dengan amplitudo gaya luar, yaitu

$$x^{(1)} = \frac{4f}{3m\omega_0^2} \cos\left(\frac{\omega_0}{2} + \varepsilon\right) t$$

(sesuai dengan rumusan pada pers. [22.4]). Dengan memandang suku tidak linier (potensial mengandung suku berderajat tinggi) maka pada persamaan gerak getaran yang dirumuskan pada pers. [29] akan muncul suatu suku tambahan dengan frekuensi  $2\gamma \approx \omega_0$ . Jika  $x^{(1)}$  disubstitusikan pada persamaan

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda \dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\alpha x^{(1)2},$$

dengan memasukkan cosinus dua kali sudut dan pada ruas kanan hanya dipandang suku yang menyatakan resonansi, diperoleh bahwa:

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda \dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\frac{8\alpha f^2}{9m^2\omega_0^4} \cos(\omega_0 + 2\varepsilon) t. \quad (29.8)$$

Persamaan ini adalah berbeda dengan pers. [29.1] hanya pada posisi

amplitudo gaya  $f$  digantikan dengan  $f^2$ . Hal ini berarti bahwa resonansi muncul dari karakter yang sama seperti resonansi yang dibahas di atas  $g^a w_0$ , tetapi dengan intensitas yang lebih kecil. Hubungan antara  $b$  dan  $\varepsilon$  jika harga  $f$  pada pers. [29.4] diganti dengan  $-8af^2/9m\omega_0^4$  (dan  $\varepsilon$  diganti dengan  $2$ ) sehingga dapat persamaan

$$b^3 \left[ (2\varepsilon - \chi b^2)^2 + \lambda^2 \right] = \frac{16\alpha^2 f^4}{81m^4\omega_0^{10}}. \quad (29.9)$$

Frekuensi gaya luar sekarang menjadi

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon.$$

Untuk pendekatan pertama didapat

$$x^{(1)} = -\frac{f}{3m\omega_0^2} \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t.$$

Substitusikan  $x = x^{(1)} + x^{(2)}$  pada pers. [29.1] dan akan diperoleh persamaan tanpa suku yang menyebabkan resonansi dengan gaya luar, seperti kasus tanpa resonansi tersebut. Akan terdapat resonansi yang sama dengan resonansi parametris yang disebabkan oleh kehadiran suku orde ketiga, yang sebanding dengan hasil kali  $x^{(1)} x^{(2)}$ . Jika hanya suku ini yang dipandang dari semua suku yang tidak linier,  $x^{(2)}$  diperoleh sebagai berikut

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda \dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -2, \alpha x^{(1)} \cdot x^{(2)}$$

atau

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda \dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 \left[ 1 - \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^4} \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t \right] x^{(2)} = 0, \quad (29.10)$$

yaitu suatu persamaan yang sama dengan pers. [27.8] (termasuk adanya gaya gesek), yang telah diketahui, mengandung suatu keadaan getaran instabil pada interval frekuensi tertentu.

Untuk menentukan amplitudo yang dihasilkan dalam getaran ini tidak cukup jika menggunakan persamaan ini semata. Amplitudo berhingga hanya terdapat untuk getaran yang mengandung efek tidak linier sehingga untuk mengamati hal ini untuk  $x^{(2)}$  harus pula mengandung suku tidak linier, yaitu

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda \dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^2} \cos(2\omega_0 + \varepsilon) t \cdot x^{(2)}. \quad (29.11)$$

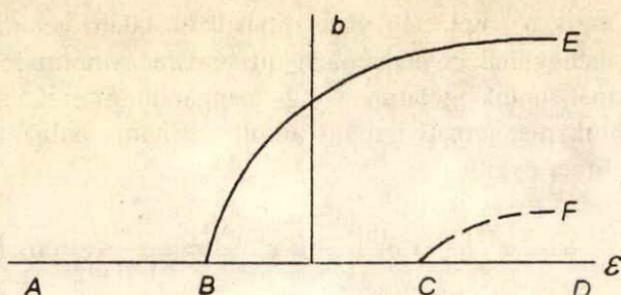
Pengamatan kasus ini dapat menjadi lebih disederhanakan jika dipandang hal berikut. Jika pada ruas kanan pers. [29.11] disubstitusikan persamaan

$$x^{(2)} = b \cos \left[ \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t + \delta \right]$$

dengan  $b$  adalah amplitudo dari resonansi getaran yang dicari dan  $\delta$  adalah pergeseran fase yang tidak begitu penting untuk kasus ini) dan sebagai hasil kali kedua faktor periodik tersebut dapat dinyatakan dalam enjumlahan dua fungsi cosinus, diperoleh:

$$\frac{\alpha f b}{3m\omega_0^2} \cos \left[ \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t - \delta \right]$$

dengan karakter resonansi biasa (dipandang dari frekuensi eigen  $\omega_0$  sistem). Dengan demikian, persoalan akan kembali pada persoalan yang telah dibicarakan pada permulaan paragraf ini, yaitu persoalan resonansi biasa untuk kasus getaran tidak linier, dengan perbedaan, bahwa perantaraan amplitudo dari gaya luar dalam hal ini adalah



Gambar 33:

sama dengan  $\alpha f b/3\omega_0^2$  ( dan untuk  $\epsilon$  sekarang menjadi  $\epsilon/2$ ). Jik disubstitusikan ke pers. [29.4], diperoleh

$$b^2 \left[ \left( \frac{\epsilon}{2} - \chi b^2 \right)^2 + \lambda^2 \right] = \frac{\alpha^2 f^2 b^2}{36 m^2 \omega_0^4}.$$

Selesaikan persamaan ini untuk  $b$  dan akan didapat amplitudo yang mungkin, yaitu

$$b = 0 \quad (29.12)$$

$$b = \frac{1}{\chi} \left[ \frac{\epsilon}{2} + \sqrt{\left( \frac{\alpha f}{6 m \omega_0^2} \right)^2 - \lambda^2} \right], \quad (29.13)$$

$$b = \frac{1}{\chi} \left[ \frac{\epsilon}{2} - \sqrt{\left( \frac{\alpha f}{6 m \omega_0^2} \right)^2 - \lambda^2} \right]. \quad (29.14)$$

Pada gbr. [33] diilustrasikan kurva dari  $b$  ( $\epsilon$ ) untuk  $\chi > -$ ; untuk  $\chi < 0$  kurva akan membentuk cerminan terhadap sumbu  $b$ ). Titik-titik  $B$  dan  $C$  sesuai dengan harga

$$\epsilon = \pm \sqrt{\left( \frac{\omega f}{6 m \omega_0^2} \right)^2 - 4 \lambda^2}.$$

Di sebelah kiri dari titik  $B$  hanya mungkin dipenuhi untuk  $b = 0$ , berarti bahwa tidak akan terjadi peristiwa resonansi dan hanya terjadi getaran  $\approx$  dengan frekuensi  $\approx \omega_0$  tidak akan terpengaruh. Dalam interval antara  $B$  dan  $C$  terdapat dua akar, yaitu  $B = 0$  (potongan kurva  $BC$  pada gbr. [33] dan rumusan yang terdapat pada pers. [23.13] (kurva  $BE$ ). Sebelah kanan dari titik  $C$  terdapat ketiga akar yang dinyatakan pada pers. [29.13], [29.13], dan [29.14]. Akan tetapi, tidak semua dari akar ini menampilkan getaran yang stabil. Harga  $b = 0$  pada potongan kurva  $BC$  adalah tidak tidak stabil dan selanjutnya dapat pula ditunjukkan bahwa akar pada pers. [29.14] (yang terletak antara akar-akar lainnya) tetap berada dalam keadaan getaran tidak stabil juga. Pada gbr. [33] ditunjukkan bahwa semua getaran tidak stabil digambarkan dengan garis putus-putus.

Sekarang akan dipandang bagaimana sistem berada dalam keadaan "diam<sup>8)</sup>", jika frekuensi gaya luar mempunyai harga semakin yang kecil. Selama titik  $C$  tidak dicapai, harga  $b$  tetap sama dengan nol ( $b = 0$ ), sehingga keadaan ini akan "lenyap", dan terjadi lompatan sepanjang kurva  $EB$ <sup>9)</sup>.

Peristiwa resonansi yang diamati di sini hanya untuk kasus terpenting, yaitu untuk getaran tidak linier. Untuk pendekatan lebih tinggi lagi akan muncul juga peristiwa resonansi dengan amplitudo yang berbeda. Dengan anggapan mutlak bahwa terjadi peristiwa resonansi pada frekuensi  $\gamma$ , yaitu jika frekuensi merupakan kelipatan bilangan bulat, seperti  $n\gamma - m\omega_0 = \omega_0$  ( $n$  dan  $m$  adalah bilangan bulat), atau

7) Interval ini justru sesuai untuk daerah frekuensi resonansi parametris, pers. [27.12], yaitu dengan membandingkan pers. [29.10] dengan per. [27.8] sehingga diperoleh  $|h| = 2a/3ma^2$ . Syarat

$$\left| \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^3} \right| > 4\lambda,$$

pada peristiwa yang diamati adalah mungkin terjadi, sesuai dengan ketidaksamaan  $h > h_k$

8) Dalam hal ini patut diingat kembali, bahwa kasus di atas hanya dipandang untuk peristiwa terjadinya resonansi. Jia keadaan demikian tidak muncul, tidaklah berarti bahwa sistem akan mengalami getaran dipaksakan yang lemah, dengan frekuensi  $\gamma$ , dalam arti sebenarnya.

berarti pula terjadi pada frekuensi  $\gamma = p\omega_0/q$  ( $p$  dan  $q$  juga bilangan bulat). Untuk pendekatan lebih tinggi intensitas dari peristiwa resonansi (juga lebar daerah frekuensi terjadinya resonansi) akan menurun dengan cepat sehingga kenyataannya praktis hanya dapat diamati resonansi pada frekuensi  $\gamma = p\omega_0/q$  dengan harga  $p$  dan  $q$  yang kecil.

**Contoh 58:** Tentukan kurva  $b(\epsilon)$  untuk peristiwa resonansi pada frekuensi  $\gamma = 3\omega_0$ .

**Penyelesaian:** Untuk pendekatan pertama, berlaku

$$x^{(1)} = -\frac{f}{8, \omega_0^2} \cos(3\omega_0 + \epsilon)t.$$

Untuk pendekatan kedua ( $x^{(2)}$ ) diperoleh dari pers. [29.1], sebagai berikut

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda \dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -3\beta x^{(1)} x^{(2)2}.$$

dengan ruas kanan hanya ditulis suku yang menyebabkan perbedaan peristiwa resonansi. Apabila dalam hal ini disubstitusikan

$$x^{(2)} = \cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{3}\right)t + \delta\right],$$

dan memisahkan perkalian tiga fungsi cosinus yang menyatakan suku resonansi pada ruas kanan akan didapat, persamaan sebagai berikut

$$\frac{3\beta b^2 f}{32 m \omega_0^2} \cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{3}\right)t - 2\delta\right].$$

Dalam hal ini akan diperoleh fungsi  $b(\epsilon)$  jika  $f$  pada pers [29.4] digantikan dengan  $3\beta b^2 f / 32 m \omega_0^2$  dan  $\epsilon$  digantikan dengan  $\epsilon/3$  diperoleh

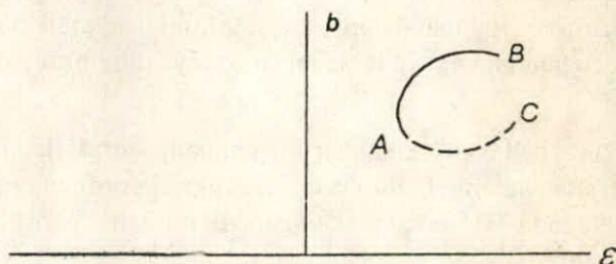
$$b(\epsilon) \left[ \left( \frac{\epsilon}{3} - \chi \beta^2 \right)^2 + \lambda^2 \right] = \frac{9\beta^2 f^2}{2^{12} m^2 \omega_0^2} b^1 = A b^1.$$

Persamaan di atas mempunyai akar

$$b = 0$$

dan

$$b^2 = \frac{\varepsilon}{3\chi} + \frac{A}{2\chi} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon A}{3\chi} + \frac{A^2}{4\chi^2} - \lambda^2}$$



gambar 34

Pada gbr. [34] diilustrasikan fungsi  $b(\varepsilon)$  untuk  $\chi > 0$ ) secara grafis. Keadaan stabil hanya diperoleh pada  $b = 0$  (sumbu absis) dan garis AB. Untuk titik A berlaku harga

$$\varepsilon_k = \frac{3(4\chi^2\lambda^2 - A^2)}{4\chi\lambda}, \quad b_k^2 = \frac{4\chi\lambda^2 + A^2}{4\chi^2\lambda}$$

Getaran hanya terdapat jika  $\varepsilon > \varepsilon_k$ , di mana berlaku amplitudo  $b > b_k$ . Keadaan  $b = 0$  tetap stabil sehingga untuk memulai atau merangsang agar terjadi getaran harus diberikan "tumbukan" terlebih dahulu pada saat awal.

Rumusan yang diperoleh hanya berlaku untuk harga  $\varepsilon$  yang kecil. Kecilnya harga  $\varepsilon$  dari  $\lambda$  adalah jika amplitudo gaya memenuhi kondisi  $\chi^2/\omega_0 \ll A \ll \chi\omega_0$ .

### 30. Gerak dalam Medan Berosilasi Cepat

Sekarang akan dibahas gerak sebuah partikel secara bersamaan di bawah pengaruh gaya dan medan potensial  $U$  konstan sekaligus:

$$f = f_1 \cos \omega t + f_2 \sin \omega t. \quad (30.1)$$

yang berubah-ubah terhadap waktu dengan frekuensi yang sangat tinggi  $\omega$  ( $f_1$  dan  $f_2$  adalah hanya bergantung pada koordinat), yaitu dengan frekuensi yang memenuhi kondisi  $\omega \gg 1/T$ , besarnya  $T$  adalah semamata dalam orde periode gerak partikel yang berada di dalam medan potensial  $U$ . Dalam hal ini tidak pula diandaikan bahwa gaya  $f$  adalah kecil dibanding dengan gaya-gaya yang disebabkan oleh potensial  $U$ . Akan tetapi, dibuat pengandaian jika amplitudo getaran partikel kecil karena adanya gangguan gaya tersebut (misalnya amplitudo disimbolkan dengan  $\xi$ ).

Untuk menyederhanakan persoalan ini pandang gerak dalam pengaruh gaya ini terjadi dalam 1 dimensi sehingga koordinat ruang hanya tergantung kepada  $x$  semata. Dengan demikian, persamaan gerak partikel adalah<sup>10)</sup>

$$m \ddot{x} = -\frac{dU}{dx} + f. \quad (30.2)$$

Dari awal telah jelas bagaimana bentuk medan yang mempengaruhi gerak partikel, yaitu medan berpengaruh pada partikel sehingga pergeseran atau simpangan partikel terjadi di sepanjang lintasan rata (*smooth*) dan akan saling tumpang tindih membentuk getaran dengan simpangan kecil (dengan frekuensi  $\omega$ ). Misalnya, getaran mengikuti suatu fungsi  $x(t)$  sebagai penjumlahan dari

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \quad (30.3)$$

dengan  $\xi(x)$  melambangkan fungsi getaran kecil yang disebutkan di atas.

Harga rata-rata dari  $\xi(t)$  terhadap satu periode ( $2\pi/\omega$ ) adalah sama dengan nol, sedangkan fungsi  $X(t)$  dalam waktu ini hanya sedikit

---

10) Koordinat  $x$  tidak perlu dalam sistem koordinat cartesian. Koefisien  $m$  tidak harus sama dengan massa partikel dan tidak pula harus berharga konstan, seperti yang dinyatakan pada pers. [30.2] karena hasil akhir penyelesaian persamaan ini tidak bergantung pada pengandaian demikian.

mengalami perubahan. Misalnya, perata-rataan terhadap waktu fungsinya ini ditulis dalam tanda garis di atas simbol fungsi, atau  $x = \bar{X}(t)$ ; dalam hal ini rata-rata fungsi  $\bar{X}(t)$  harga rata-rata fungsi lintasan yang membentuk garis datar ("halus") yang dibentuk partikel. Selanjutnya akan dicari fungsi ini secara eksplisit, di mana fungsi tersebut <sup>11)</sup>.

Jika pers. [30.3] disubstitusikan ke pers. [30.2] dan dibuat dalam bentuk deret hingga orde pertama, didapat

$$m \ddot{X} + m \ddot{\xi} = -\frac{dU}{dX} - \xi \frac{d^2U}{dX^2} + f(X, t) + \xi \frac{\partial f}{\partial X}. \quad (30.4)$$

Pada persamaan di atas terdapat berbagai suku yang mempunyai berbagai karakter, yaitu suku osilasi (getaran) dan suku "datar"; dalam hal ini haruslah akan saling menghilangkan dalam masing-masing grup. Sebagai pendekatan untuk term atau suku yang berisolasi berlaku

$$m \ddot{\xi} = f(X, t), \quad (30.5)$$

sedangkan suku-suku lainnya akan mengandung faktor  $\xi$  (berharga kecil dibandingkan dengan yang telah dijelaskan di atas (turunan  $\ddot{\xi}$  adalah sebanding dengan  $\omega^2$  karena tidak mempunyai harga yang kecil). Jika pers. [30.5] setelah disubstitusikan  $d$  dari pers. [30.1] diintegrasikan (dalam hal ini  $X$  dipandang sebagai konstanta), didapat

$$\xi = -\frac{f}{m\omega^2}. \quad (30.6)$$

Selanjutnya dibuat perata-rataan terhadap waktu pers. [30.4] (dengan cara seperti disebutkan sebelumnya). Harga rata-rata dari  $f$  dan  $\xi$  pangkat satu akan sama dengan nol diperoleh persamaan

$$m \ddot{\bar{X}} = -\frac{dU}{dX} + \overline{\xi \frac{\partial f}{\partial X}} = -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{m\omega^2} \overline{f \frac{\partial f}{\partial X}}.$$

11) Idea penurunan ini berasal dari P.L. Kapiza (1951).

yang hanya mengandung fungsi  $X(t)$  semata. Akhirnya persamaan di atas dapat ditulis, menjadi

$$m \ddot{X} = -\frac{dU_{\text{eff}}}{dX}. \quad (30.7)$$

dengan "energi potensial efektif" didefinisikan sebagai<sup>12)</sup>

$$U_{\text{eff}} = U + \frac{1}{2m\omega^2} \bar{f}^2 = U + \frac{1}{4m\omega^2} (f_1^2 + f_2^2). \quad (30.8)$$

Jika rumusan ini dibandingkan dengan pers. [30.6], akan terlihat dengan jelas bahwa suku tambahan (medan potensial  $U$ ) tidak dapat dinyatakan dengan cara lain selain dari energi kinetik rata-rata dari gerak osilasi

$$U_{\text{eff}} = U + \frac{m}{2} \bar{\xi}^2. \quad (30.9)$$

Pernyataan ini mempunyai arti bahwa gerak rata-rata partikel yang mengalami osilasi berlangsung sedemikian, sekan-akan di samping terdapat medan potensial konstan  $U$  pada sistem, terdapat pula medan tambahan yang juga konstan lainnya yang bergantung pada kuadrat dari amplitudo medan bolak-balik.

Hasil perhitungan ini dengan mudah dapat diterjemahkan ke dalam gerak suatu sistem yang mengandung sejumlah derajat kebebasan yang dituliskan dalam koordinat diperumum  $q_r$ . Untuk energi potensial efektif (selain yang telah diberikan pada pers [30.8], ditulis dalam bentuk

$$U_{\text{eff}} = U + \frac{1}{2\omega^2} \sum_{i,k} a_{ik}^{-1} \bar{f}_i \bar{f}_k = U + \sum_{i,k} \frac{a_{ik}}{2} \bar{\xi}_i \bar{\xi}_k. \quad (30.10)$$

---

12) Jika besaran  $m$  tergantung kepada  $x$ , dengan perhitungan yang berbelit-belit dan lebih panjang dapat dibuktikan bahwa pers. [30.7] dan [30.8] akan tetap berlaku untuk kasus ini.

dengan besaran  $a_{ik}^{-1}$  (yang secara umum bergantung pada koordinat) adalah elemen dari kebalikan matriks koefisien  $a_{ik}$  pada energi kinetik sistem <sup>13)</sup>

**Contoh 59:** Tentukan posisi stabil kesetimbangan sebuah bandul dengan titik gantungnya berosilasi secara vertikal dengan frekuensi  $g$  ( $g \gg \sqrt{g/l}$ )!

**Penyelesaian:** Fungsi Lagrange sistem seperti ini dapat dilihat kembali pada contoh 6, pertanyaan c) pada ¶ 2.5. Untuk gaya yang berubah-ubah dalam hal ini

$$f = -m a l \gamma^2 \cos \gamma t \sin \varphi$$

(sebagai "koordinat"  $x$  dipilih sudut  $\varphi$ ). Dengan demikian, potensial efektif didapat dalam bentuk

$$U_{ef} = m g l \left( -\cos \varphi + \frac{a^2 \gamma^2}{4 g l} \sin^2 \varphi \right).$$

Posisi stabil setimbang dapat ditentukan sesuai apabila fungsi mempunyai harga minimum. Secara logis arah yang tegak lurus ke bawah ( $\varphi = 0$ ) merupakan posisi yang selalu stabil. Jika memenuhi persamaan

$$a^2 \gamma^2 > 2 g l.$$

maka posisi bandul adalah tegak lurus ke atas ( $\varphi = \pi$ ).

**Contoh 60:** Dengan pertanyaan yang sama untuk bandul, tetapi titik gantungnya mengalami osilasi pada arah horizontal

13) Lihat pembahasan fungsi Lagrange untuk sistem titik massa

**Penyelesaian:** Dari contoh 3, pertanyaan b) pada §5 dari fungsi

$$f = m a l \gamma^2 \cos \gamma t \cos \varphi .$$

sehingga dari persamaan di atas diperoleh pula

$$U_{ef} = m g l \left[ -\cos \varphi + \frac{a^2 \gamma^2}{4 g l} \cos^2 \varphi \right] .$$

Untuk  $a^2 \gamma^2 < 2 g l$  posisi  $\varphi = 0$  adalah stabil. Jika sebaliknya  $a^2 \gamma^2 > 2 g l$  keadaan stabil sistem akan terpenuhi

$$\cos \varphi = \frac{2 g l}{a^2 \gamma^2} .$$

## Bab VI

# Gerak Benda Tegar

### 31. Kecepatan Sudut

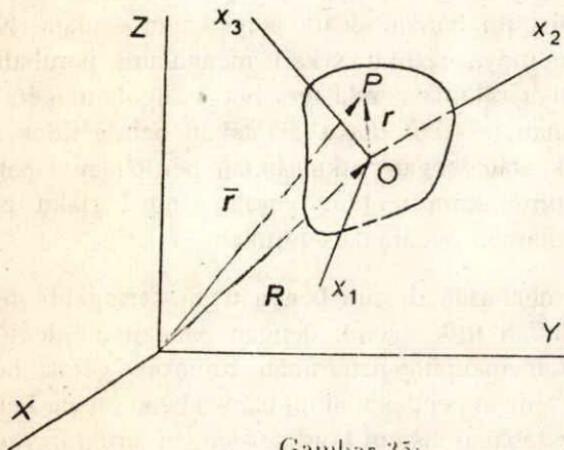
*Benda tegar* dalam mekanika didefinisikan sebagai sistem kumpulan titik-titik massa dengan jarak satu sama lain tidak berubah atau tetap. Sistem-sistem yang kenyataannya terdapat di alam tentunya akan memenuhi kondisi ini hanya secara pendekatan semata. Kebanyakan benda tegar umumnya sedikit sekali mengalami perubahan bentuk maupun ukurannya selama benda tersebut mengalami gerak sehingga kecilnya perubahan tersebut dapat dikatakan benda tidak mengalami perubahan bentuk, atau dengan perkataan lain perubahan dapat diabaikan, seandainya hukum-hukum tentang gerak yang berlaku pada benda sebagai sistem diamati secara keseluruhan.

Dalam pembahasan di sini benda tegar seringkali digambarkan terdiri dari sejumlah titik massa; dengan pandangan demikian dapat dibuat pendekatan maupun penurunan rumusan gerak benda tegar dengan mudah. Dengan pendekatan ini bahwa benda tegar kenyataannya dapat dipandang sebagai sistem kontinu dengan struktur yang terdapat di dalamnya bukan merupakan objek yang menarik perhatian, ternyata tidak menimbulkan "komplikasi" atau pertentangan sama sekali dalam pembahasan ini. Perhitungan "transisi" dari anggapan benda tegar sebagai sistem penjumlahan diskrit titik-titik massa menjadi sistem benda tegar kontinu dilakukan dengan cara sederhana, yaitu massa benda tegar dianggap sebagai perkalian kerapatan volume materi dan

elemen volumenya  $\rho dV$  dan dilakukan integrasi terhadap volume benda secara keseluruhan.

Untuk menjelaskan gerak benda tegar biasanya dipandang dua sistem koordinat inersial  $xyz$  dan suatu sistem koordinat "diam", yaitu sistem koordinat pertama suatu sistem koordinat bergerak dengan koordinat  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ , dan  $x_3 = z$  yang berhubungan erat dengan benda dan selalu turut serta dalam setiap gerak benda. Titik nol sistem koordinat bergerak dianggap terletak di titik pusat massa benda.

Posisi benda tegar terhadap sistem koordinat diam ditentukan oleh pemberian posisi dari sistem koordinat bergerak. Misalnya vektor jari-jari  $R$  adalah vektor yang menunjukkan titik nol sistem koordinat bergerak (terhadap titik nol koordinat diam; lihat gbr. [35]). Arah sumbu-sumbu sistem ini terhadap sistem koordinat diam ditentukan oleh tiga sudut yang saling tidak bergantung pada satu sama lainnya,



Gambar 35:

sehingga bersama-sama dengan komponen vektor  $R$  akan terdapat enam koordinat. Berarti pula bahwa setiap benda tegar sembarang suatu sistem mekanis mempunyai enam derajat kebebasan.

Selanjutnya lihat suatu pergeseran kecil sembarang, terjadi pada zat padat. Gambaran tentang ini dijelaskan dengan dua gerak sekaligus,

yaitu pertama jika titik pusat massa mengalami pergeseran yang kecil tak berhingga dan saling paralel dari titik asal ke titik akhir, tetapi arah sumbu tidak berubah gerak tersebut dan kedua adalah gerak rotasi terhadap titik pusat massa yang juga tak terhingga kecil hingga mencapai titik akhir rotasi.

Suatu vektor jari-jari sembarang terhadap suatu titik  $P$  yang terdapat pada benda tegar dalam sistem koordinat bergerak disimbolkan dengan  $\mathbf{r}$  dan vektor jari-jari titik yang sama terhadap sistem koordinat diam ditulis sebagai  $\bar{\mathbf{r}}$ . Maka pergeseran infinitesimal titik  $P$  adalah  $d\bar{\mathbf{r}}$  dari pergeseran titik pusat massa  $d\mathbf{R}$  dan pergeseran yang dialami oleh titik  $P$  terhadap pusat massa menjadi adanya rotasi sebesar  $d\varphi$  adalah  $[d\varphi\mathbf{r}]$  atau dengan perkataan lain

$$d\bar{\mathbf{r}} = d\mathbf{R} + [d\varphi\mathbf{r}].$$

Jika persamaan ini dibagi dengan waktu  $dt$ , yaitu waktu yang dibutuhkan untuk menggeser titik tersebut, diperoleh kecepatan

$$\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \Omega, \quad (31.1)$$

sehingga diperoleh hubungan antar kecepatan di atas sebagai berikut:

$$d\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\Omega\mathbf{r}] \quad (31.2)$$

Vektor  $\mathbf{V}$  adalah kecepatan titik pusat massa benda tegar; kecepatan ini sering pula disebut sebagai *kecepatan translasi*. Vektor  $\Omega$  disebut *kecepatan sudut* benda tegar; arah kecepatan sudut ini (demikian pula dengan arah  $d\varphi$ ) adalah sama dengan arah perputaran sumbu rotasi. Dengan demikian, kecepatan  $\mathbf{v}$  setiap titik yang terdapat pada benda tegar (terhadap titik acuan sistem koordinat diam) dapat dinyatakan dalam kecepatan translasi dan rotasinya.

Patut pula dicatat bahwa penurunan pers [31.2] adalah tidak penting karena titik pusat massa dianggap sebagai titik nol. Keuntungan pemilihan titik tersebut akan dibahas nanti dalam pembicaraan tentang energi benda yang bergerak.

Sekarang anggap bahwa sistem koordinat yang berhubungan erat dengan benda dipilih sedemikian, seolah titik  $O$  tidak berada pada titik pusat massa, tetapi di titik sembarang  $O'$ , yang terletak sejauh  $a$  dari titik  $O$ . Kecepatan titik  $O'$  sistem ini, misalnya  $V'$  dan kecepatan rotasinya adalah  $\Omega'$ .

Kemudian lihat sebuah titik  $P$  yang terdapat pada benda tegar, misalnya vektor jari-jari terhadap titik  $O'$  adalah  $r'$ . Dengan demikian, maka  $r = r' + a$  dan substitusikan ke pers. [31.2], didapat

$$d\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\Omega \mathbf{a}] + [\Omega' \mathbf{r}'].$$

Di samping itu berdasarkan definisi dari  $V'$  dan  $\Omega'$  harus pula berlaku  $\mathbf{n} = \mathbf{V}' + [\Omega' \mathbf{r}']$ . Dengan demikian akan diperoleh hubungan

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + [\Omega \mathbf{a}], \quad \Omega' = \Omega. \quad (31.3)$$

Relasi kedua pada persamaan di atas adalah sangat penting. Terlihat bahwa kecepatan sudut di mana benda tegar setiap saat mengalami rotasi, tidak bergantung pada sistem koordinat tersebut. Sistem yang mengalami rotasi demikian adalah sistem yang pada setiap saat mengalami rotasi dengan kecepatan sudut yang sama,  $\Omega$ , dan mempunyai sumbu rotasi terletak saling paralel dengan sumbu koordinat. Peristiwa demikian sekaligus menegaskan bahwa  $\Omega$  memang benar-benar sebagai kecepatan sudut rotasi benda tegar. Kecepatan translasi adalah sebaliknya tidak mempunyai karakter "absolut".

Jika  $V$  dan  $\Omega$  (dalam waktu tertentu) dengan pemilihan titik acuan tertentu saling terletak paralel satu sama lain, rumusan pertama pers. [31.3] juga akan berlaku untuk pemilihan titik acuan  $O'$  sembarang (yaitu  $V'$  dan  $\Omega'$  saling tegak lurus). Berdasarkan pers [2] kecepatan  $v$  suatu titik yang terdapat pada benda tegar juga akan terletak pada bidang yang sama, yaitu pada bidang yang tegak lurus terhadap  $\Omega$ . Dalam hal ini akan selalu terdapat suatu titik awal<sup>1)</sup>  $O'$  dengan kecepatan

1) Tentunya dapat ditunjukkan bahwa titik tersebut haruslah terletak di luar benda

translasi  $V'$  sama dengan nol sehingga gerak benda tegar setiap saat merupakan suatu gerak rotasi murni terhadap sumbu  $O'$ . Sumbu ini disebut sebagai *sumbu rotasi sesaat* benda tegar <sup>2)</sup>.

Selanjutnya tetap dianggap, bahwa titik nol dari sistem koordinat bergerak terletak pada titik pusat massa benda tegar sehingga sumbu rotasi benda "bergerak" melalui titik pusat massa tersebut. Pada suatu gerak benda harga  $\Omega$  dan juga arah sumbu putar atau sumbu rotasi dapat mengalami perubahan.

### 32. Tensor Kelembaman

Untuk menghitung energi kinetik benda tegar, seperti disebutkan di atas, benda tegar dipandang sebagai kumpulan titik-titik massa secara diskrit dan ditulis, sebagai berikut

$$T = \sum \frac{m v^2}{2}$$

yaitu merupakan penjumlahan terhadap semua energi kinetik masing-masing titik massa. Untuk menyederhanakan masalah, misalnya masing-masing titik massa diberi numerasi.

Dengan menggunakan pers. [3.2], diperoleh

$$T = \sum \frac{m}{2} (V + [\Omega r])^2 = \sum \frac{m}{2} V^2 + \sum m V [\Omega r] + \sum \frac{m}{2} [\Omega r]^2$$

Kecepatan  $V$  dan  $\Omega$  untuk setiap massa benda tegar adalah sama, karena suku pertama yang mengandung  $V^2/2$  dapat diletakkan di depan tanda summu (penjumlahan). Kemudian suku  $\sum m$  tidak lain sama dengan massa benda tegar yang disimbolkan dengan  $\mu$ , suku kedua diuraikan dalam bentuk

2) Untuk kasus umum di mana  $V$  dan  $\Omega$  tidak akan saling paralel maka titik awal sistem koordinat dapat dipilih sehingga  $V$  dan  $\Omega$  akan saling paralel, atau dengan perkataan lain bahwa gerak mengandung gerak rotasi terhadap suatu sumbu tertentu dan gerak translasi sepanjang sumbu yang sama.

$$\sum m V^2 [\Omega r] = \sum m r [V \Omega] = [V \Omega] \sum m r.$$

Jika titik nol benda tegar terletak di titik pusat massanya, suku ini akan sama dengan nol karena  $\Sigma m r = 0$ . Suku ketiga ditulis dalam bentuk perkalian vektor kuadrat sehingga akhir persamaan energi kinetik  $T$  dapat ditulis, menjadi

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega^2 r^2 - (\Omega r)^2 \}. \quad (32.1)$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa energi kinetik benda tegar terdiri dari dua bagian. Suku pertama pers. [32.1] menggambarkan *energi kinetik gerak translasi*; energi kinetik translasi mengambil bentuk seolah massa benda tegar terkonsentrasi di titik pusat massa. Suku kedua merupakan *energi kinetik rotasi* benda tegar yang mengalami rotasi dengan kecepatan sudut  $\Omega$ , berotasi terhadap suatu sumbu yang melalui titik pusat massa. Patut pula dicatat bahwa "terbaginya" energi kinetik demikian dimungkinkan karena titik nol sistem koordinat yang berhubungan dengan benda terletak di titik pusat massa.

Selanjutnya variabel yang menyatakan energi kinetik rotasi dapat dituliskan dalam bentuk tensor, yaitu apabila energi tersebut dinyatakan dalam komponen-komponen  $x_i$ ,  $\Omega_i$  dari vektor  $r$  dan  $\Omega$  diperoleh

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega_i^2 x_i^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k \} \\ &= \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_i^2 - \Omega_i \Omega_k x_i x_k \} \\ &= \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k \sum m \{ x_i^2 \delta_{ik} x_i^2 - x_i x_k \}. \end{aligned}$$

Dalam penulisan di atas digunakan identitas  $\Omega_i = \delta_{ik} \Omega_k$ , dengan  $\delta_{ik}$  melambangkan vektor satuan (jika komponen  $i = k$  harga  $\delta_{ii} = \delta_k = 1$

dan untuk  $i \neq k$ ,  $\delta_{ik} = 0$ )<sup>3)</sup>. Gerakan tensor

$$I_{ik} = \sum m (x_i^2 \delta_{lk} - r_i r_k), \quad (32.2)$$

sehingga rumusan akhir diperoleh energi kinetik dalam bentuk

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k. \quad (32.3)$$

Fungsi Lagrange benda tegar diperoleh dengan mengurangkan pers [32.3] dengan energi potensial  $U$ , sebagai berikut

$$L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U. \quad (32.4)$$

Untuk kasus ini energi potensial  $U$  merupakan fungsi dari enam variabel yang menyatakan posisi benda tegar, misalnya tiga koordinat ditulis dalam  $X$ ,  $Y$ , dan  $Z$ , yaitu koordinat titik pusat massa benda dan tiga lainnya dalam (koordinat) sudut yang menyatakan arah sumbu sistem koordinat bergerak terhadap sistem koordinat diam.

Tensor  $I_{ik}$  disebut sebagai *tensor momen kelembaman* atau *tensor kelembaman* dari benda tegar. Dari definisi pada pers [32.2] dapat dengan mudah dilihat bahwa tensor tersebut adalah simetris atau dengan perkataan lain berlaku

$$I_{ik} = I_{ki}. \quad (32.5)$$

Penulisan secara eksplisit tensor kelembaman  $I_{ik}$  ini adalah sebagai berikut

3) Dalam bab ini huruf  $i$ ,  $k$ , dan  $l$  digunakan sebagai indeks tensor, harga huruf  $l$  adalah berjalan dari 2. Dalam hal ini untuk keseragaman penulisan digunakan tanda summasi jika tanda summa dihilangkan, akan muncul indeks ganda (dinamakan pula sebagai indeks penjumlahan atau summasi) dan berlaku penjumlahan untuk 1, 2, dan 3; sebagai  $A_i B_i = AB$ ,  $A_i A_i = A^2$ . Hubungan antara indeks summasi dapat dipilih secara sembarang (jika tidak berhubungan dengan indeks tensor lainnya dalam rumusan yang sama).

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2 + z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myz & \sum m(x^2 + z^2) & -\sum myz \\ -\sum myz & -\sum mzy & \sum m(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \quad (32.6)$$

Komponen  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ , dan  $I_{zz}$  adalah momen kelembaman pada arah sumbu sesuai dengan indeks yang diberikan.

Tensor kelembaman mempunyai sifat penambahan momen kelembaman suatu benda adalah sama dengan penjumlahan momen kelembaman bagiannya.

Jika suatu benda tegar dapat dipandang sebagai benda kontinu, dari definisi pada pers. [32.2] penjumlahan dapat dilakukan terhadap integral volume benda yang bersangkutan

$$I_{ik} = \int \rho(x_l^2 \delta_{ik} - x_l x_k) dV. \quad (32.7)$$

Seperti halnya tensor simetri rank dua lainnya, tensor momen kelembaman dapat dibuat menjadi tensor diagonal dengan pemilihan sumbu  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $x_3$ . Sumbu-sumbu ini disebut sebagai *sumbu utama* atau *sumbu prinsipal* dan harga-harga momen kelembaman yang berhubungan dengan masing-masing sumbu disebut sebagai *momen kelembaman prinsipal*; momen kelembaman tersebut dinyatakan sebagai  $I_1$ ,  $I_2$ , dan  $I_3$ . Pada pemilihan sumbu  $x_1$ ,  $x_2$  dan  $x_3$  energi kinetik rotasi mempunyai bentuk sederhana, sebagai berikut

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2). \quad (32.8)$$

Patut pula diketahui bahwa masing-masing momen kelembaman prinsipal ini tidak dapat berharga lebih besar dari penjumlahan dua momen kelembaman lainnya sehingga berlaku hubungan

$$I_1 + I_2 = \sum m(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \geq \sum m(x_1^2 + x_2^2) = I_3. \quad (32.9)$$

Sebuah benda tegar dengan ketiga momen kelembaman prinsipal berbeda disebut sebagai *gasing tidak simetri*.

Jika dua dari tiga momen kelembaman mempunyai harga sama  $I_1 = I_2 \neq I_3$ , benda tegar demikian disebut sebagai *gasing simetri*. Dalam hal ini pemilihan sumbu prinsipal yang membentuk bidang  $x_1 - x_2$  adalah sembarang.

Jika ketiga momen kelembaman prinsipal berharga sama, berhubungan dengan benda tegar gasing bola. Pemilihan arah ketiga sumbu dapat dilakukan secara sembarang, ketiganya dipilih sedemikian, terletak saling tegak lurus satu sama lain.

Perhitungan momen kelembaman suatu benda tegar akan lebih mudah jika benda mempunyai simetri tertentu; hal ini jelas karena posisi titik pusat dan arah sumbu prinsipal haruslah mempunyai simetri yang sama.

Jika benda mempunyai simetri bidang, titik pusat massa benda haruslah terletak pada bidang yang bersangkutan. Pada bidang tersebut terletak pula dua dari tiga sumbu utama dan sumbu ketiga terletak tegak lurus bidang. Untuk kasus demikian berhubungan dengan hal, jika semua bagian dari sistem terletak di suatu bidang. Dalam hal ini terdapat pula hubungan sederhana antara ketiga sumbu utamanya. Jika bidang  $x_1 - x_2$  dipilih sebagai permukaan sistem,  $x_3 = 0$  untuk semua titik massa yang terdapat pada sistem berlaku

$$I_1 = \sum m x_2^2, \quad I_2 = \sum m x_1^2, \quad I_3 = \sum m (x_1^2 + x_2^2),$$

sehingga berhubungan ketiga sumbu prinsipal dapat ditulis

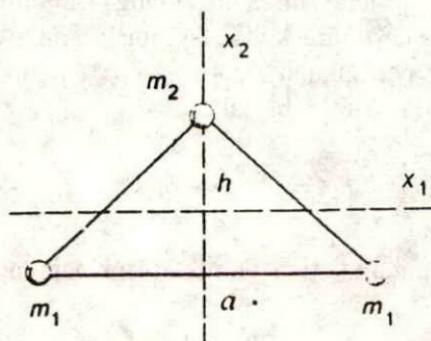
$$I^3 = I + I_2 \quad (32.10)$$

Jika sebuah benda mempunyai sumbu simetri yang tersusun secara sembarang, titik pusat massa benda akan terletak pada sumbu tersebut. Pada sumbu ini terdapat pula salah satu momen kelembaman prinsipal, sedangkan dua lainnya berada saling tegak lurus terhadap momen kelembaman tersebut. Benda demikian menggambarkan simetri gasing jika simetri aksial sumbu tingginya sebagai orde kedua. Kenyataannya setiap sumbu utama (yang terletak tegak lurus terhadap sumbu simetri) mempunyai perbedaan sudut rotasi sekitar  $180^\circ$ , berarti pemilihan sumbu simetri ini tidak begitu jelas dan hanya akan muncul pada benda yang mempunyai simetri gasing.

Sebagai kasus khusus yang menggambarkan sistem demikian, adalah sistem dengan bagian-bagiannya terletak pada satu garis lurus. Jika garis lurus tersebut dipilih sebagai sumbu  $x_3$ , untuk seluruh titik massa berlaku  $x_1 = x_2 = 0$  sehingga dua momen kelembaman prinsipalnya akan mempunyai harga yang sama dan momen kelembaman lainnya sama dengan nol

$$I_1 = I_2 = \sum m x_3^2 \quad I_3 = 0. \quad (32.11)$$

Sistem demikian disebut sebagai *rotator*, suatu sifat khusus rotator, untuk membedakannya dengan kasus lain bahwa rotator hanya mempunyai dua (bukan tiga) derajat kebebasan rotasi, yaitu hanya rotasi terhadap sumbu  $x_1$  dan  $x_2$ ; suatu garis lurus yang mengalami rotasi terhadap dirinya sebagai sumbu tidak memberikan pengaruh apapun.



Gambar 36:

Sebagai penutup pembahasan ini akan dilihat secara khusus perhitungan tensor kelembaman. Walaupun tensor ini dilihat dengan menggunakan suatu sistem koordinat tertentu, dengan titik pusat massa terletak di titik acuan sistem koordinat (hanya dengan definisi demikian pers. [32.3, berlaku], agar perhitungan menjadi lebih mudah dilakukan dengan menggunakan analogi, cari terlebih dahulu suatu tensor lain dengan titik acuan di  $O'$

$$I_{ik} = \sum (x_i'^2 \delta_{ik} + x_i' x_k').$$

Jika jarak  $OO'$  diketahui sebagai vektor  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$  dan  $x_i = x_i' + a_i$ , berdasarkan definisi dari titik  $O$  terdapat hubungan bahwa  $\sum m r = 0$ , diperoleh

$$I'_{ik} = I_{ik} + \mu (a_i^2 \delta_{ik} - a_i a_k). \quad (32.12)$$

Berdasarkan persamaan ini dapat dengan mudah diketahui tensor  $I_{ik}$ , jika  $I'_{ik}$  diketahui pula <sup>4)</sup> yang merupakan jarak konstanta, dan kaedah ini disebut sebagai *aturan Steiner*.

**Contoh 61:** Hitung momen kelembaman prinsipal suatu molekul jika molekul dipandang sebagai sistem titik massa dengan jarak konstan satu sama lainnya

- molekul terdiri dari atom yang terletak pada satu garis lurus,
- molekul triatomik membentuk segitiga sama sisi, dan
- molekul beratam empat dengan masing-masing atom terletak pada sudut suatu piramida.

### Penyelesaian

$$a) \quad I_1 = I_2 = \frac{1}{\mu} \sum_{a>b} m_a m_b l_{ab}^2, \quad I_3 = 0,$$

a) Istilah yang dijelaskan dari pers. [32.12]

dengan  $m_a$  dan  $m_b$  masing-masing atom  $a$  dan  $b$  dan jarak keduanya adalah  $l_{ab}$ . Penjumlahan dilakukan untuk setiap pasangan atom yang terdapat di dalam molekul (dalam hal ini masing-masing pasangan  $a$  dan  $b$  dijumlahkan hanya sekali).

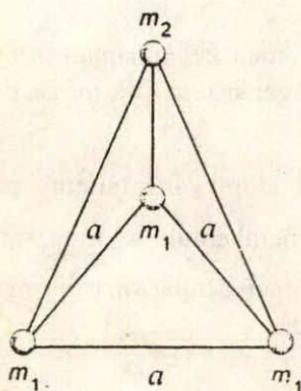
Untuk molekul diatomik penjumlahan hanya terdiri dari satu bagian, dan momen kelembaman, seperti yang diharapkan, dinyatakan oleh massa reduksi kedua atom dan kuadrat dari jarak antara keduanya

$$I_1 = I_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2.$$

b) molekul beratomb tiga, dengan masing-masing atom terletak pada sudut segitiga samasisi (gbr. [36])

Titik pusat massa terletak pada garis tinggi segitiga pada jarak  $x_2 = m_2 h/m$  dari alasnya. Momen kelembamannya adalah

$$I_1 = \frac{2m_1 m_2}{\mu} h^2, I_2 = \frac{m_1}{2} a^2, \quad I_3 = I_1 + I_2.$$



Gambar 37:

c) molekul beratomb empat dengan masing-masing atom terletak pada sudut, suatu piramida (gbr. [37]).

Titik pusat massa terletak di garis tinggi piramida pada jarak  $X_3 = m_2 h / m$  dari alasnya. Momen kelembamannya adalah:

$$I_1 = I_2 = \frac{3m_1 m_2}{\mu} h^2 + \frac{m_1 a^2}{2}, \quad I_3 = m_1 a^2.$$

Untuk  $m_1 = m_2$  dan  $h = a \sqrt{2/3}$  bentuk molekul menjadi tetrahedral dengan momen kelembaman

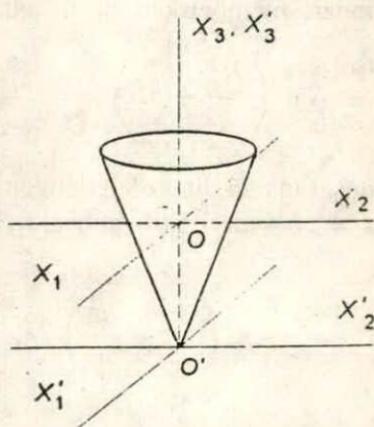
$$I_1 = I_2 = I_3 = m_1 a^2$$

**Contoh 62:** Tentukan momen kelembaman benda tegar berikut:

a) Batang tipis panjang  $l$ ,

**Penyelesaian**

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{12} \mu l^2, \quad I_3 = 0.$$



Gambar 38:

b) Bola berjari-jari  $R$ ,

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5} \mu R^2.$$

c) Selinder dengan jari-jari  $R$  dan tinggi  $h$ ,

$$I_1 = I_2 = \frac{\mu}{4} \left( R^2 + \frac{h^2}{3} \right), \quad I_3 = \frac{\mu}{2} R^2.$$

d) Empat persegi dengan panjang sisi  $a$ ,  $b$ , dan  $c$

**Jawab :**

$$I_1 = \frac{\mu}{12} (b^2 + c^2) \quad I_2 = \frac{\mu}{12} (c^2 + a^2) \quad I_3 = \frac{\mu}{12} (a^2 + b^2)$$

(sumbu  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $x_3$  masing-masing paralel dengan sisi  $a$ ,  $b$ , dan  $c$ ).

e) Kerucut beralas lingkaran, tinggi  $h$  dan jari-jari alas adalah  $R$ , dan

**Jawab:** Akan dihitung tensor  $I_{ik}$  terhadap suatu sumbu sistem dengan titik nolnya berada dipuncak kerucut (gbr.[38]). Perhitungan dilakukan dalam koordinat selinder, memberikan hasil sebagai berikut

$$I'_1 = I'_2 = \frac{3}{5} \mu \left( \frac{R^2}{4} + h^2 \right), \quad I'_3 = \frac{3}{10} \mu R^2.$$

Titik berat atau titik pusat massa diperoleh dengan mudah di permukaan kerucut pada jarak  $a = 3h/4$  dari titik puncaknya. Dari pers. [32.12] akhirnya, diperoleh

$$I_1 = I_2 = I'_1 - \mu a^2 = \frac{3}{20} \mu \left( R^2 + \frac{h^2}{4} \right), \quad I_3 = I'_3 = \frac{3}{10} \mu R^2.$$

f) Elipoida segitiga dengan sumbu masing-masing  $a$ ,  $b$ , dan  $c$ .

**Jawab:** Titik berat atau titik pusat massa terletak di tengah dan sumbu kelembaman saling berimpit dengan sumbu-sumbu elipsoida. Integrasi terhadap volume elipsoida dapat dihitung melalui volume kerucut dengan melakukan transformasi koordinat  $x = a \xi$ ,  $y = b \eta$  dan  $z = c \zeta$ , dengan persamaan permukaan elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

diubah menjadi persamaan permukaan bola (satuan bola):

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

Dengan demikian, diperoleh momen kelembaman terhadap sumbu,  $x$  sebagai berikut

$$I_1 = \rho \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho abc \iiint (b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2) d\xi d\eta d\zeta$$

atau

$$I_1 = abc \frac{1}{2} I' (b^2 + c^2).$$

dengan  $I'$  adalah momen kelembaman satuan bola. Dengan volume elipsoida  $4\pi abc/3$  akhirnya diperoleh momen kelembaman

$$I_1 = \frac{\mu}{5} (b^2 + c^2), \quad I_2 = \frac{\mu}{5} (a^2 + c^2), \quad I_3 = \frac{\mu}{5} (a^2 + b^2).$$

**Contoh 63:** Tentukan frekuensi getaran kecil bandul fisis (sebuah batang tegar yang digantungkan vertikal, bergetar dalam pengaruh medan gaya berat).

**Penyelesaian:** Misalnya  $l$  adalah jarak titik pusat massa bandul terhadap sumbu rotasi,  $a$ ,  $b$ , dan  $\gamma$  adalah sudut yang melambangkan arah sumbu prinsipal (utama) kelembaman terhadap sumbu rotasi. Sebagai koordinat variabel adalah  $\varphi$  yaitu sudut yang dibentuk oleh sumbu vertikal dan batu duga terhadap titik pusat massa pada sumbu rotasi. Kecepatan titik pusat massa adalah  $V = l \dot{\varphi}$  dan proyeksi kecepatan sudut pada sumbu prinsipal kelembaman adalah  $\dot{\varphi} \cos \alpha$ , dan  $\dot{\varphi} \cos \beta \cos \gamma$ . Dengan anggapan bahwa sudut  $\varphi$  kecil, diperoleh energi potensial, sebagai berikut

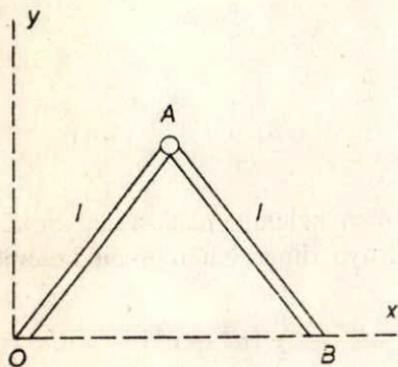
$$U = \mu g l (1 - \cos \varphi) \approx \frac{1}{2} \mu g l \varphi^2.$$

Dengan demikian, persamaan Lagrange bandul fisis, diperoleh

$$L = \frac{\mu l^2}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta) \dot{\varphi}^2 - \frac{\mu g l}{2} \varphi^2$$

Frekuensi getaran bandul, diperoleh

$$\omega^2 = \frac{\mu g l}{\mu l^2 + I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma}$$



Gambar 39:

**Contoh 64:** Hitung energi kinetik sistem yang digambarkan pada gbr. [39];  $OA$  dan  $AB$  adalah bola tipis dengan panjang  $l$  yang masing-masing dihubungkan dengan engsel pada titik  $A$ . Balok  $OA$  mengalami rotasi (pada bidang gambar) terhadap titik  $O$  sehingga balok  $AB$  akan tergelincir sepanjang sumbu  $x$ .

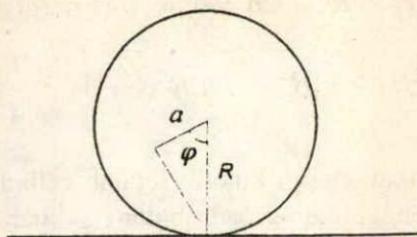
**Penyelesaian:** Kecepatan titik pusat massa balok  $OA$  (terletak di tengah balok) adalah  $l\dot{\varphi}/2$ , dengan  $\varphi$  adalah sudut  $AOB$ . Dengan demikian, energi kinetik balok  $OA$ , diperoleh sebesar

$$T_{OA} = \frac{\mu l^2}{8} \dot{\varphi}^2 + \frac{l}{2} \dot{\varphi}^2$$

( $\mu$  adalah massa balok).

Koordinat catersian dari titik pusat massa batang  $AB$  adalah

$$X = \frac{3l}{2} \cos \varphi, \quad Y = \frac{l}{2} \sin \varphi.$$



Gambar 40:

Kecepatan sudut rotasi dari balok ini juga sama dengan  $\dot{\varphi}$  dan energi kinetiknya menjadi

$$T_{AB} = \frac{\mu}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{I}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{\mu l^2}{8} (1 + 8 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{I \dot{\varphi}^2}{2}.$$

Maka energi kinetik total sistem adalah

$$T = T_{O.A} + T_{AB} = \frac{\mu l^2}{3} (1 + 3 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2.$$

(dari contoh 65 a harga telah diketahui harga  $I = \mu l^2/12$ ).

**Contoh 65:** Tentukan energi kinetik sebuah selinder (jari-jari  $R$ ) yang menggelinding pada permukaan selimutnya. Massa selinder terdistribusi di dalam volumenya sehingga salah satu dari sumbu selinder paralel dengan salah satu sumbu prinsipal pada jarak  $a$  pada sumbunya; misalnya momen kelembaman pada sumbu prinsipal ini adalah  $I$ .

**Penyelesaian:** Misalnya sudut  $\varphi$  adalah sudut antara garis vertikal dan titik pusat pada massa yang terletak pada sumbu selinder (lihat gbr. [40]). Gerak selinder setiap saat dapat dipandang sebagai gerak rotasi murni terhadap sumbu rotasi sesaat yang sama dengan garis singgung

selinder dengan rantai; kecepatan sudut rotasi ini adalah  $\varphi$  (kecepatan sudut rotasi pada sumbu yang paralel adalah sama). Titik pusat massa selinder berada pada jarak  $\sqrt{a^2 + R^2} - 2a R \cos \varphi$  dari sumbu rotasi sesaatnya sehingga kecepatan pusat massa

adalah  $V = \varphi \sqrt{a^2 + R^2 - 2a R \cos \varphi}$ . Energi kinetik total adalah

$$T = \frac{\mu}{2} (a^2 + R^2 - 2a R \cos \varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2} \dot{\varphi}^2$$

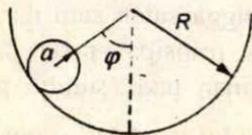
**Contoh 66:** Tentukan energi kinetik sebuah selinder homogen dengan jari-jari  $a$  yang menggelinding pada bidang sebuah selinder berjari-jari  $R$  (gbr. [41]).

**Penyelesaian:** Sudut  $\varphi$  adalah sudut antara garis vertikal dan garis hubung titik tengah kedua selinder. Titik pusat massa selinder yang menggelinding terletak pada sumbu tersebut dan mempunyai kecepatan  $V = \varphi (R-a)$ . Kecepatan sudut rotasi dicari dengan menganggap rotasi yang terjadi adalah rotasi murni terhadap sumbu rotasi sesaat yang sama dengan garis singgung bidang selinder tempat selinder berjari-jari  $a$  menggelinding, besarnya adalah

$$\Omega = \frac{V}{a} = \dot{\varphi} \frac{R-a}{a}$$

Jika  $I_3$  adalah momen kelembaman terhadap sumbu selinder, didapat

$$T = \mu (R-a)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{I_3 (R-a)^2}{a^2} \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4} \mu (R-a)^2 \dot{\varphi}^2$$



Gambar 41:

( $I_3$  dapat dilihat kembali contoh 65c).

**Contoh 67:** Tentukan energi kinetik sebuah kerucut homogen yang menggelinding pada bidang datar.

**Penyelesaian:** Sudut antara garis singgung kerucut  $OA$  dan lantai disimbolkan sebagai  $\Theta$  yang mempunyai arah tertentu (gbr. [42]). Titik pusat massa terletak pada sumbu kerucut dan kecepatannya adalah  $V = a \cos \alpha \dot{\Theta}$ , dengan sudut  $2\alpha$  merupakan sudut puncak kerucut dan  $a$  adalah jarak titik pusat massa terhadap puncak kerucut. Kecepatan sudut rotasi diberikan sebagai kecepatan rotasi murni terhadap sumbu rotasi sesaat  $OA$

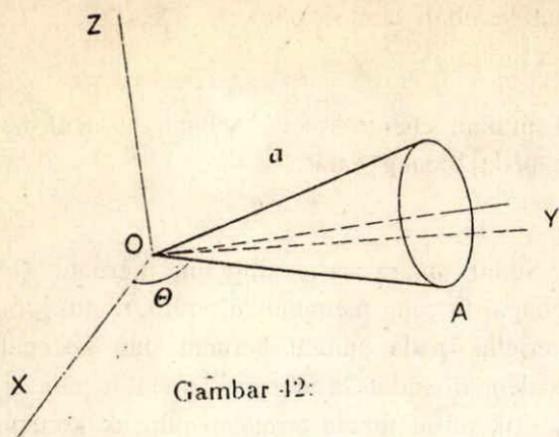
$$\Omega = \frac{V}{a \sin \alpha} = \dot{\Theta} \cot \alpha.$$

Salah satu sumbu prinsipal kelembaman (sumbu  $x_3$ ) bertumpuk sama dengan sumbu kerucut, sedangkan sumbu lainnya (misalkan  $x_2$ ) dipilih tegak lurus terhadap sumbu kerucut dan garis  $OA$ . Kemudian proyeksi vektor  $\Omega$  (yang ditunjukkan paralel terhadap sumbu  $OA$ ) terletak pada sumbu prinsipal kelembaman  $\Omega \sin \alpha$ ,  $0$ , dan  $\alpha \cos \alpha$ . Dengan demikian energi kinetik yang dicari sebagai berikut

$$T = \frac{\mu a^2}{2} \cos^2 \alpha \cdot \dot{\Theta}^2 + \frac{I_1}{2} \cos^2 \alpha \cdot \dot{\Theta}^2 + \frac{I_3 \cos^4 \alpha}{2 \sin^2 \alpha} \dot{\Theta}^2 = \frac{3\mu h^2}{40} \dot{\Theta}^2 (1 + 5 \cos^2 \alpha)$$

( $h$  adalah tinggi kerucut, harga  $I_1$ ,  $I_3$ , dan  $a$  diambil dari contoh 65e).

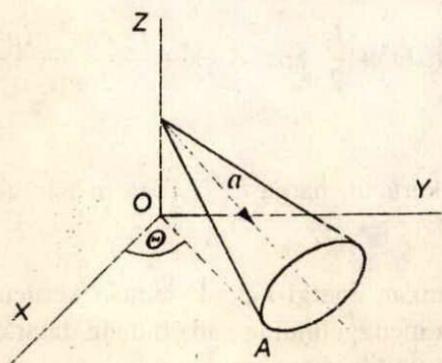
**Contoh 68:** Tentukan energi kinetik sebuah kerucut homogen dengan lingkaran alasnya menggelinding pada bidang datar dan titik puncaknya berada pada suatu titik diam.



Gambar 42:

**Penyelesaian:** Misalkan sudut  $\Theta$  sebagai sudut yang menyatakan arah permukaan kerucut pada bidang datar, terhadap proyeksi kerucut pada bidang tersebut (gbr. [43]). Kecepatan titik pusat massa adalah  $v = a\dot{\Theta}$  (relasi ini adalah sama seperti contoh 70). Sumbu rotasi sesat kerucut adalah sama dengan garis  $OA$  yang dibentuk kerucut, yang melalui titik singgung  $A$  pada bidang datar. Titik pusat massa terletak pada jarak  $a \sin \alpha$  dari sumbu ini, sehingga berlaku

$$\Omega = \frac{V}{a \sin \alpha} = \frac{\dot{\Theta}}{\sin \alpha}.$$



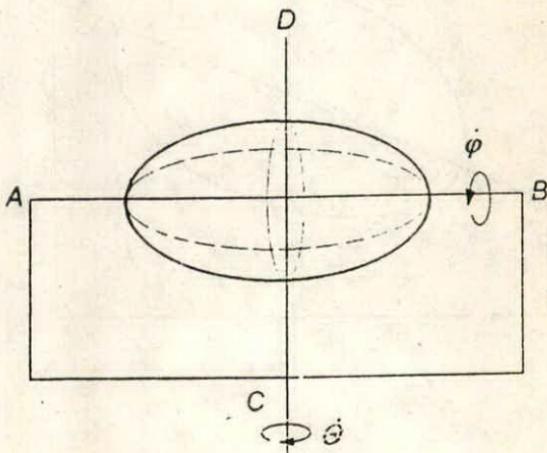
Gambar 43:

Proyeksi vektor  $\Omega$  pada sumbu prinsipal kelembaman (sumbu  $x_2$  dipilih tegak lurus terhadap sumbu kerucut dan garis  $OA$ ), yaitu  $\Omega \sin \alpha = \dot{\Theta} \sin \alpha$  dan  $\Omega \cos \alpha = \dot{\Theta} \cos \alpha$  sehingga diperoleh energi kinetik dalam bentuk

$$T = \frac{\mu a^2}{2} \dot{\Theta}^2 + \frac{I_2}{2} \dot{\Theta}^2 + \frac{I_3}{2} \dot{\Theta}^2 \cot^2 \alpha = \frac{3\mu h^2}{40} \dot{\Theta}^2 \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha} + 5 \right)$$

**Contoh.** Tentukan energi kinetik suatu elipsoida homogen bersumbu tiga yang mengalami rotasi pada salah satu sumbunya (pada gbr [44] digambarkan sebagai garis  $AB$ ), sementara sumbu ini juga mengalami rotasi pada arah  $CD$ , yang terletak tegak lurus terhadap sumbu  $AB$  dan melalui titik pusat massa elipsoida.

**Penyelesaian:** Misalnya, sudut putar terhadap sumbu  $CD$  adalah  $\Theta$  dan terhadap sumbu  $AB$  (yaitu sama dengan sudut antara  $CS$  dan sumbu prinsipal kelembaman  $x_1$ , terletak tegak lurus ( $AB$ ) adalah  $\varphi$ .



Gambar 44:

Maka sebagai proyeksi  $\Omega$  pada sumbu kelembaman adalah

$$\dot{\Theta} \cos \varphi \quad \dot{\Theta} \sin \varphi \quad \dot{\varphi}$$

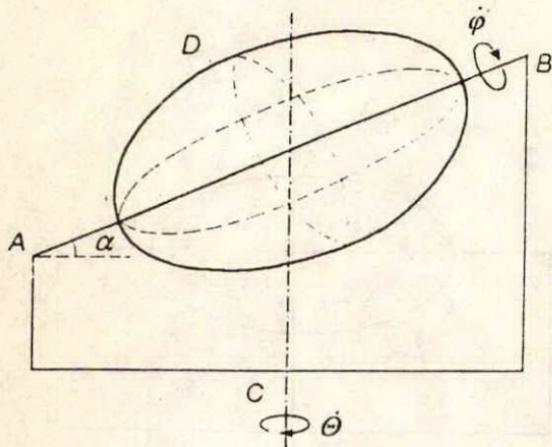
(dengan sumbu prinsipal kelembaman berimpit dengan sumbu  $AB$ )  
 Dalam hal ini titik pusat massa yang terletak di tengah elipsoida berada dalam keadaan diam maka energi kinetik sistem menjadi

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \cos^2 \varphi + I_2 \sin^2 \varphi) \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}^2.$$

**Contoh 70:** Sama dengan pertanyaan di atas jika sumbu  $AB$  miring dan elipsoida terhadap sumbu ini adalah simetris.

**Penyelesaian:** Proyeksi dari vektor  $\Omega$  pada sumbu  $AB$  dan pada dua sumbu prinsipal kelembaman yang tegak lurus terhadapnya (dapat dipilih secara sembarang) adalah

$$\dot{\Theta} \cos \alpha \cos \varphi \quad \dot{\Theta} \cos \alpha \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} + \dot{\Theta} \sin \alpha.$$



Gambar 45:

Energi kinetik diperoleh

$$T = \frac{1}{2} I_1 \cos^2 \alpha \cdot \dot{\Theta}^2 + \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\Theta} \sin \alpha)^2.$$

### 33. Momentum Angular Benda Tegar

Besar suatu *momentum putar (momentum angular)* suatu sistem, seperti telah diketahui, bergantung pada pemilihan sistem koordinat. Dalam mekanika benda tegar titik acuan momentum angular biasanya untuk memudahkan rumusan permasalahan, dipilih titik nol sistem koordinat bergerak, atau titik pusat massa benda yang mengalami koordinat bergerak. Dalam pembahasan ini akan dibicarakan pengertian yang terkandung dalam definisi momentum angular  $M$ .

Jika tidak acuan koordinat dipilih berimpit dengan titik pusat massa benda, berdasarkan pers. [9.6], momentum angular  $M$  akan berimpit pula dengan "momentum angular karakteristik" (momentum angular eigen), yang dihasilkan hanya oleh gerak titik-titik benda tegar relatif terhadap titik pusat massa benda. Dari definisi  $M = \sum m [\mathbf{r}, \mathbf{v}]$  dan  $\mathbf{v}$  harus dinyatakan dalam  $[\Omega \mathbf{r}]$  sehingga diperoleh relasi

$$M = \sum [\mathbf{r} [\Omega \mathbf{r}]] \mathbf{r} = \sum m \{ r^2 \Omega - \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \Omega) \}$$

atau penulisan dalam tensor

$$M_i = \sum m \{ x_l^2 \Omega_l - x_l x_k \Omega_k \} = \Omega_k \sum m \{ x_l^2 \delta_{lk} - x_l x_k \}.$$

Dari definisi tensor momen kelembaman pada pers. [32.2] akan diperoleh hubungan

$$M_i = I_{ik} \Omega_k. \quad (33.1)$$

Jika sumbu-sumbu  $x_1$ ,  $x_2$  dan  $x_3$  berada pada arah sumbu prinsipal kelembaman, akan diperoleh rumusan

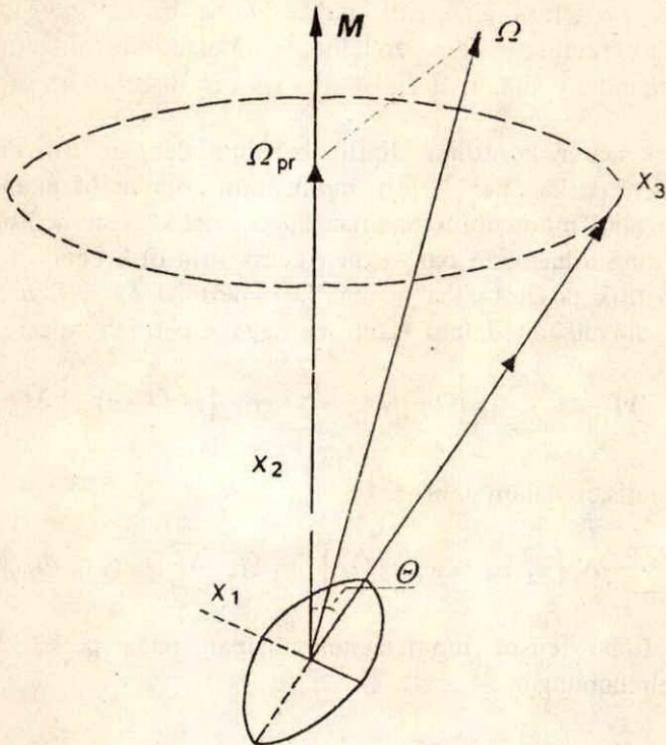
$$M_1 = I_1 \Omega_1, \quad M_2 = I_2 \Omega_2, \quad M_3 = I_3 \Omega_3. \quad (33.2)$$

Untuk gasing berbentuk bola (gasing bola) yang mempunyai tiga sumbu prinsipal kelembaman saling berimpit akan diperoleh hubungan sederhana

$$M = I \Omega. \quad (33.3)$$

berarti bahwa vektor momentum angular adalah sebanding dengan vektor kecepatan sudut dan akan mempunyai arah yang sama dengannya.

Untuk benda berbentuk sembarang umumnya vektor  $M$  tidak akan terletak paralel terhadap  $\Omega$ , tetapi benda dirotasikan



Gambar 46:

terhadap salah satu sumbu prinsipal ini. Maka akan didapat  $M$  dan  $\Omega$  mempunyai arah yang sama. Selanjutnya pandang gerak bebas sebuah benda tegar yang tidak dipengaruhi oleh medan gaya apapun. Gerak translasi beraturan yang tidak menjadi pokok perhatian pada pembahasan ini, tetapi hanya berhubungan dengan gerak rotasi bebas.

Seperti halnya berlaku untuk setiap sistem tertutup, momentum angular suatu benda yang mengalami rotasi bebas adalah konstan. Untuk

gasing berbentuk bola, adanya hubungan sederhana  $M = \text{konstan}$  menyebabkan pula  $\Omega = \text{konstan}$ . Berarti bahwa rotasi bebas suatu gasing berbentuk bola merupakan gerak rotasi beraturan terhadap suatu sumbu tetap.

Hal sederhana lain juga terdapat pada sebuah rotor. Padanya berlaku relasi  $M = I\Omega$ , dengan  $\Omega$  terletak tegak lurus terhadap sumbu rotor. Oleh karena itu, rotasi bebas suatu rotor merupakan gerak rotasi beraturan pada suatu bidang dengan arah tegak lurus terhadap bidang yang bersangkutan.

Hukum kekekalan momentum angular dapat pula digunakan untuk menghitung gerak rotasi bebas yang sangat kompleks suatu gasing simetri.

Dengan menggunakan kenyataan bahwa pemilihan arah sumbu prinsipal kelembaman  $x_1$  dan  $x_2$  (yang terletak tegak lurus terhadap sumbu simetri  $x_3$ ) dapat dilakukan dengan bebas (baca; sembarang) dan sumbu  $x_2$  terletak pada bidang, yang melintang melalui vektor  $M$  (dengan perkataan lain saling berimpit dengan vektor  $M$ ) dan sumbu  $x_3$ . Dengan demikian, maka harga  $M_2 = 0$  dan selanjutnya menurut pers [33.2] diketahui pula bahwa  $W_2 = 0$ . Hal ini mempunyai arti bahwa arah dari vektor  $M$ ,  $\Omega$ , dan sumbu gasing setiap saat akan terletak pada satu bidang (lihat gbr. [46]). Oleh karena itu, diperoleh pula hal lain, bahwa kecepatan  $n = [\Omega r]$  setiap titik yang terletak pada sumbu gasing setiap saat akan terletak tegak lurus terhadap bidang yang disebutkan di atas; atau dengan perkataan lain, sumbu gasing mengalami rotasi secara beraturan (lihat penjelasan di bawah) terhadap arah  $M$ , dengan lintasan berbentuk "lingkaran gasing" (disebut pula *gerak precesi beraturan* dari gasing). Bersamaan dengan gerak precesi gasing juga mengalami rotasi secara beraturan terhadap sumbunya sendiri.

Kecepatan sudut kedua gerak rotasi ini secara sederhana dapat dinyatakan dalam harga momentum angular  $M$  yang diketahui sebelumnya dan sudut kemiringan sumbu gasing  $\Theta$  terhadap arah  $M$ . Kecepatan rotasi gasing terhadap sumbunya sendiri adalah sama dengan proyeksi komponen vektor kecepatan sudut  $\Omega$ , yaitu  $\Omega_3$  pada sumbu tersebut

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M}{I_3} \cos \Theta. \quad (33.4)$$

Untuk mencari kecepatan sudut gerak presesi  $\Omega_{pr}$  vektor  $\Omega$  harus diuraikan dalam dua komponen, yaitu pertama komponen yang berada sepanjang sumbu  $x_3$  dan komponen yang berada sepanjang vektor  $M$  dengan menggunakan aturan paralelogram. Komponen pertama tidak menyebabkan miringnya sumbu gasing, sedangkan komponen kedua, tidak lain adalah kecepatan sudut gerak presesi yang dicari. Dari gambaran yang terdapat pada gbr. [46] diperoleh bahwa  $\sin \Theta \Omega_{pr} = \Omega_1$  dan  $\Omega_1 = M_1/I_1 = M \sin \Theta/I_1$  sehingga kecepatan sudut gerak presesi sendiri didapat

$$\Omega_{pr} = \frac{M}{I_1}. \quad (33.5)$$

### 34. Persamaan Gerak Benda Tegar

Benda tegar secara umum mempunyai enam derajat kebebasan karena persamaan geraknya juga akan mengandung enam persamaan yang saling independen satu sama lain. Akan tetapi, semua persamaan tersebut dapat ditulis dalam satu bentuk, terdiri dari dua turunan suatu vektor terhadap waktu, yaitu vektor momentum dan momentum angulat benda tegar.

Persamaan itu pertama diperoleh dengan cara sederhana, dengan anggapan bahwa benda tegar tersusun oleh sejumlah partikel yang mempunyai momentum  $p = f$  sehingga momentum benda tegar adalah sama dengan penjumlahan dari semua vektor momentum partikel ( $p$  adalah momentum dan  $F$  adalah masing-masing gaya partikel). Maka momentum total benda tegar dapat ditulis

$$P = \sum p = \mu V$$

dan gaya total yang bekerja pada benda adalah  $\sum f = F$ . atau

$$\frac{dP}{dt} = F. \quad (34.1)$$

Walaupun  $F$  didefinisikan sebagai penjumlahan gaya-gaya  $f$  yang berasal dari partikel yang mengisi benda tegar, sebenarnya dimengerti bahwa  $f$  sebagai gaya yang bekerja antara sesama partikel. Akan tetapi, dalam pengertian ini adalah gaya yang berasal dari luar yang bekerja pada partikel. Sementara gaya-gaya interaksi yang bekerja pada partikel mengisi benda tegar adalah saling meniadakan satu sama lain; dengan tidak adanya gaya luar, seperti halnya pada sistem tertutup lainnya, momentum benda tegar haruslah sebagai konstanta gerak, dengan perkataan lain haruslah berlaku  $F = 0$ .

Jika  $U$  adalah energi potensial benda tegar yang dipengaruhi gaya luar,  $F$  dapat dicari dari turunan energi potensial terhadap koordinat pusat massa

$$F = -\frac{dU}{dR}; \quad (34.2)$$

Oleh karena itu, adanya pergeseran benda tegar sebesar  $\delta R$  vektor ruang  $r$  setiap titik massa (partikel) juga mengalami perubahan yang sama besarnya sehingga perubahan energi potensial sistem keseluruhan

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial r} \delta r = \delta R \sum \frac{\partial U}{\partial r} = -\delta R \sum f = -F \delta R.$$

Pers. [34.1] tidak lain berhubungan dengan persamaan Lagrange dalam sistem koordinat pusat massa, yaitu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial V} = \frac{\partial L}{\partial R}$$

dengan fungsi Lagrange pada pers. [34.2] berlaku pula

$$\frac{\partial L}{\partial V} = \mu V = P, \quad \frac{\partial L}{\partial R} = -\frac{\partial U}{\partial R} = F.$$

Untuk menurunkan persamaan gerak kedua harus dicari turunan vektor momentum angular  $M$  terhadap waktu. Untuk menyederhanakan rumusan, dipilih sistem koordinat inersial (sistem koordinat diam)

sehingga titik pusat massa benda dalam sistem koordinat ini, dalam interval waktu berada dalam keadaan diam.

Diketahui

$$\dot{M} = \frac{d}{dt} \sum [r p] = \sum [\dot{r} p] + \sum [r \dot{p}].$$

Dengan pemilihan sistem koordinat di atas (yaitu  $V = 0$ ), maka  $\dot{r}$  dalam interval waktu ini akan sama dengan  $v = \dot{r}$ . Karena vektor  $v$  dan  $p = mv$  mempunyai arah yang sama, haruslah berlaku bahwa  $[\dot{r} p] = 0$ . Jika  $\dot{p}$  selanjutnya digantikan dengan  $f$ , akhirnya diperoleh persamaan, sebagai berikut

$$\frac{dM}{dt} = K \quad (34.3)$$

dengan

$$K = \sum [r f]. \quad (34.4)$$

Oleh karena itu,  $M$  didefinisikan sebagai momentum angular titik pusat massa (lihat awal pembahasan pada §33), besaran ini tidak berubah terhadap transformasi dari satu sistem inersial ke sistem inersial lainnya. Dari pers. [9.5] dapat dilihat dengan jelas jika  $R = 0$ . Dengan demikian, diperoleh persamaan gerak yang dinyatakan pada pers. [34.3], walaupun telah diturunkan berdasarkan pemilihan sistem koordinat tertentu, berdasarkan prinsip relativitas Galilei berlaku pula untuk sistem inersial sembarang.

Vektor  $[rf]$  disebut sebagai *momen (momen putar) dari gaya  $f$*  sehingga dapat disimpulkan bahwa  $K$  tidak lain merupakan jumlah dari semua momentum angular yang bekerja pada benda.

Demikian pula untuk kasus gaya total  $F$ , diperlukan praktis hanya memandang penjumlahan gaya luar pada pers. [34.4]; berdasarkan hukum kekekalan momentum angular yang menyatakan bahwa jumlah seluruh momentum angular, yang termasuk atau bekerja di dalam sistem tertutup, haruslah sama dengan nol.

Momen putar dan momentum angular secara umum bergantung pada pemilihan sistem koordinat. Pada pers. [34.3] dan [34.4] kedua besaran tersebut didefinisikan dalam sistem koordinat pusat massa.

Pada pergeseran titik nol (titik acuan) sejauh  $a$  maka vektor jari-jari titik yang baru  $r'$  mempunyai hubungan dengan vektor lama  $r$  sebagai berikut:  $r = r' + a$  sehingga didapat hubungan untuk  $K$

$$K = \sum [r f] = \sum [r' f] + \sum [a f]$$

atau

$$K = K' + [a F]. \quad (34.5)$$

Dari persamaan di atas dapat dilihat bahwa harga momen putar tidak bergantung pada pemilihan titik awal atau titik acuan sistem koordinat, jika gaya  $F = 0$  (dalam hal ini dikatakan bahwa pada benda terdapat gaya berpasangan).

Pers. [34.3] dapat ditulis sebagai persamaan Lagrange sebagai berikut:

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

jika sistem dipandang dalam koordinat sudut.

Hal ini dapat dibuktikan dengan menurunkan persamaan Lagrange, pers. [34.4], terhadap vektor kecepatan sudut  $\Omega$ .

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega_i} = I_{ik} \Omega_k = M_i.$$

Perubahan energi potensial  $U$  benda dirotasikan membentuk sudut infinitesimal  $d\Omega$  adalah

$$\delta U = - \sum f \delta r = - \sum f [\delta \varphi \cdot r] = - \varphi \sum [r f] = -K \delta \varphi,$$

dengan

$$-K = - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \quad (31.6)$$

sehingga didapat hubungan

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = K.$$

Sekarang andaikan bahwa vektor  $F$  dan  $K$  terletak saling tegak lurus satu sama lain. Dalam hal ini selain perlu diketahui vektor  $a$  dan  $K'$  yang terdapat dalam pers. [34.5] adalah sama dengan nol, berlaku:

$$K = [a F]. \quad (34.7)$$

Pemilihan vektor  $a$  dalam hal ini belum jelas; vektor ini dapat dipilih, misalnya paralel terhadap vektor  $F$ , tanpa mengubah pers. [34.7]. Syarat  $K' = 0$  tidak memberikan arti tentang suatu titik tertentu yang terdapat di dalam sistem koordinat diam, tetapi sebuah garis lurus. Untuk kasus  $K \pm K$  pengaruh gaya-gaya luar dapat direduksi menjadi satu-satunya gaya  $F$  yang bekerja sepanjang garis lurus tersebut.

Sebagai contoh kasus ini, misalnya sebuah partikel terdapat dalam pengaruh suatu medan gaya  $f = eE$ , vektor  $E$  adalah vektor konstanta yang mengkarakteristikan medan gaya dan  $\epsilon$  merupakan suatu besaran karakteristik partikel<sup>5)</sup> sehingga didapat

$$F = E \sum \epsilon \quad K = \left[ \sum \epsilon r E \right]$$

Diandaikan bahwa  $\sum \epsilon \neq 0$  dan  $r_0$  didefinisikan

$$r_0 = \frac{\sum \epsilon r}{\sum \epsilon}. \quad (34.8)$$

Maka akan diperoleh rumusan sederhana dari momentum angular total sebagai berikut

- 
- 5) Untuk kasus medan gaya listrik,  $E$  adalah kuat medan listrik homogen dan  $e$  muatan partikel, sedangkan untuk kasus partikel di dalam medan gaya gravitasi  $E$  digantikan dengan vektor gravitasi  $g$  dan  $e$  digantikan oleh  $m$ , yaitu massa partikel.

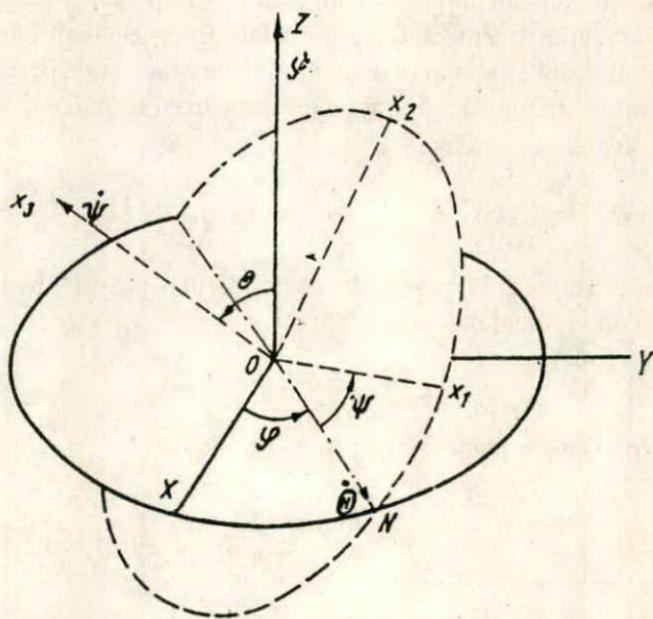
$$K = [r_0 F]. \quad (34.9)$$

Gerak benda tegar di dalam medan gaya terjadi karena pengaruh satu-satunya gaya  $F$  yang bekerja pada suatu titik dengan vektor jari-jari yang didefinisikan oleh pers. [34.8]. Posisi titik ini secara utuh ditentukan oleh sifat dari benda tegar itu sendiri; di dalam medan gaya berat, misalnya titik tersebut berimpit dengan titik pusat massa benda.

### 35 Sudut Euler

Seperti telah disebutkan di atas, gambaran gerak benda tegar dapat dinyatakan dalam tiga koordinat sistem titik pusat massa dan tiga koordinat sudut yang menentukan arah sistem koordinat bergerak  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $x_3$  terhadap sistem koordinat diam  $X$ ,  $Y$ , dan  $Z$ . Selain itu, untuk memudahkan rumusan gerak sering pula digunakan *sudut Euler*.

Dalam pembahasan ini akan digunakan tiga sudut yang menjadi pokok perhatian, yaitu sudut antara sumbu koordinat dengan patokan



Gambar 17:

bahwa kedua titik acuan sistem koordinat adalah sama (lihat gbr. [47]). Perpotongan bidang  $x_1 - x_2$  dari sistem koordinat bergerak dengan bidang  $X - Y$  dari koordinat diam merupakan garis lurus (garis  $ON$  pada gbr. [47]), yang disebut *garis perpotongan*. Garis ini terletak tegak lurus terhadap sumbu  $Z$  dan  $x_3$ , arah positifnya dipilih sesuai dengan arah vektor yang dibentuk oleh  $[zx_3]$  (dengan  $z$  dan  $x_3$  masing-masing sebagai vektor satuan pada arah sumbu  $Z$  dan  $x_3$ ).

Untuk menentukan posisi sumbu-sumbu  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $x_3$  terhadap sumbu  $X$ ,  $Y$ , dan  $Z$  dipilih sudut berikut  $\Theta$  adalah sudut antara sumbu  $Z$  dan  $x_3$ , sudut  $\varphi$  adalah antara sumbu  $X$  dan  $N$  dan sudut  $\psi$  adalah sudut antara sumbu  $N$  dan  $x_1$ . Arah bertambah besarnya sudut  $\varphi$  dan  $\psi$  adalah sesuai dengan arah putar kanan terhadap sumbu  $Z$  dan  $x_3$ . Harga sudut  $\Theta$  bervariasi dari 0 hingga  $\pi$ , sementara sudut  $\varphi$  dan  $\psi$  adalah dari 0 hingga  $2\pi$ <sup>6)</sup>

Selanjutnya akan dicari komponen-komponen hubungan vektor kecepatan sudut  $\Omega$  terhadap titik acuan sumbu koordinat  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $x_3$  yang dinyatakan dalam sudut Euler. Untuk kepentingan ini semua kecepatan sudut, yaitu  $\dot{\Theta}$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\psi}$  haruslah diproyeksikan pada sumbu ini. Kecepatan sudut  $\dot{\Theta}$  sesuai dengan arah dan berada pada garis perpotongan  $ON$  dan komponen-komponennya pada masing-masing sumbu  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $x_3$  adalah

$$\dot{\Theta}_1 = \dot{\Theta} \cos \psi, \quad \dot{\Theta}_2 = \dot{\Theta} \sin \psi, \quad \dot{\Theta}_3 = 0.$$

Kecepatan sudut  $\dot{\varphi}$  berada pada sumbu  $Z$  dan proyeksinya pada sumbu  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $x_3$  adalah

$$\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi} \cos \Theta$$

dan proyeksinya pada bidang  $x_1 - x_2$  adalah

$$\dot{\varphi} \sin \Theta$$

6) Sudut  $\Theta$  dan  $\varphi - \pi/2$  menggambarkan arah polar dan azimat dari arah  $x_3$  terhadap sumbu  $X$ ,  $Y$ , dan  $Z$ . Di samping itu  $\Theta$  dan  $\pi/2 - \psi$  menggambarkan sudut polar dan azimat sebagai arah  $Z$  terhadap sumbu  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $x_3$ .

sehingga proyeksi kecepatan sudut ini pada sumbu  $x_1$  dan  $x_2$  adalah

$$\psi_1 = \dot{\varphi} \sin \Theta \sin \psi, \quad \dot{\phi}_2 = \dot{\phi} \sin \Theta \cos \psi.$$

Kecepatan sudut  $\varphi$  berada pada arah sumbu  $x_3$ .

Jika seluruh komponen-komponen kecepatan sudut ditambahkan untuk masing-masing sumbu, diperoleh komponen  $\Omega$ , sebagai berikut

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \Theta \sin \psi + \dot{\Theta} \cos \psi \\ \Omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \Theta \cos \psi - \dot{\Theta} \sin \psi \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi} \sin \Theta \cos \psi + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (35.1)$$

Jika sumbu-sumbu  $z_1$ ,  $x_2$ , dan  $x_3$  dipilih sebagai sumbu prinsipal benda tegar, energi kinetik rotasinya dapat dinyatakan dalam sudut Euler, yaitu dengan mensubstitusikan pers. [35.1] ke pers [32.8].

Untuk gasing simetri berlaku  $I_1 = I_2 \neq I_3$ , dengan menghitung kembali energi kinetik rotasi benda tegar, didapat relasi

$$T_{\text{rot}} = \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \Theta + \dot{\Theta}^2) + \frac{I_2}{2} (\dot{\varphi} \cos \Theta + \dot{\psi})^2. \quad (35.2)$$

Dapat dilihat bahwa rumusan energi kinetik seperti di atas dapat dilakukan dengan mudah, yaitu dengan menggunakan kenyataan bahwa pemilihan sumbu prinsipal  $x_1$  dan  $x_2$  untuk gasing simetri dapat ditentukan secara sembarang. Jika diandaikan sumbu  $x_1$  berimpit dengan garis  $ON$ ,  $\varphi = 0$ , komponen kecepatan sudut  $\Omega$  dapat dinyatakan dengan rumusan lebih sederhana, sebagai berikut

$$\Omega_1 = \dot{\Theta}, \quad \Omega_2 = \dot{\varphi} \sin \Theta, \quad \Omega_3 = \dot{\varphi} \cos \Theta + \dot{\psi}. \quad (35.3)$$

Sebagai contoh penggunaan sederhana sudut Euler akan dibahas kembali gerak bebas gasing simetri.

Sebagai arah sumbu  $Z$  dari sistem koordinat diam dipilih arah momentum angular gasing  $M$  yang konstan. Sumbu  $x_3$  dari sistem

koordinat bergerak ditunjukkan berada pada arah *sumbu figur* gasing dan pada saat yang sama sumbu  $x_1$  adalah berimpit dengan garis perpotongan. Dengan demikian, komponen vektor  $M$  diperoleh dengan pertolongan pers. [35.3], sebagai berikut

$$M_1 = I_1 \Omega_1 = I_1 \dot{\Theta}.$$

$$M_2 = I_1 \Omega_2 = I_1 \dot{\varphi} \sin \Theta.$$

$$M_3 = I_3 \Omega_3 = I_3 (\dot{\varphi} \cos \Theta - \dot{\psi}).$$

Di samping itu, sumbu  $x_1$  (garis perpotongan) berada tegak lurus terhadap sumbu  $Z$  sehingga didapat

$$M_1 = 0, \quad M_2 = M \sin Q, \quad M_3 = M \cos Q$$

Jika kedua persamaan di atas disamakan, diperoleh relasi

$$\dot{\Theta} = 0, \quad I_1 \dot{\varphi} = M, \quad I_3 (\dot{\varphi} \cos \Theta + \dot{\psi}) = M \cos \Theta. \quad (35.4)$$

Dari persamaan pertama pada pers. [35.4] diketahui pula bahwa  $\Theta =$  konstan, atau berarti pula bahwa sudut kemiringan sumbu figure gasing terhadap arah  $M$  adalah konstan. Persamaan kedua menentukan (sesuai dengan pers. [33.5]) kecepatan sudut gerak presesi, yaitu  $\dot{\varphi} = M/I_1$ ; sedangkan persamaan ketiga menentukan kecepatan sudut rotasi dari gasing terhadap sumbunya sendiri.

**Contoh 71:** Bahas gerak dari gasing simetri yang berada di dalam medan gaya berat jika titik terendahnya berada dalam keadaan diam.

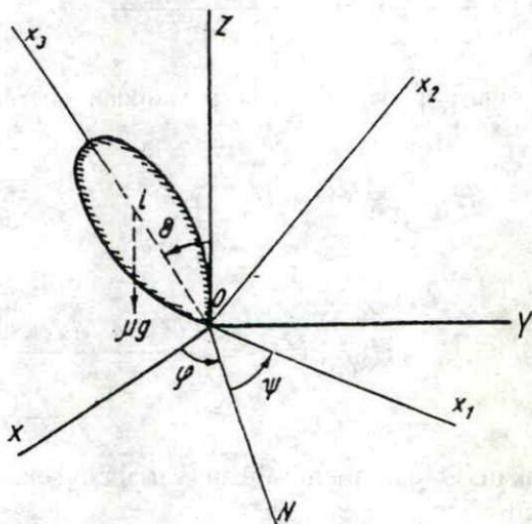
**Penyelesaian:** Titik acuan sistem koordinat diam dan bergerak dianggap berimpit pada titik  $O$  dari gasing; sumbu  $Z$  terletak tegak lurus ke atas (gbr. [48]). Fungsi Lagrange gasing di dalam medan gaya berat adalah

$$L = \frac{I_1 + \mu l^2}{2} (\dot{\Theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \Theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \Theta)^2 - \mu g l \cos \Theta$$

$\mu$  adalah massa gasing dan  $l$  adalah jarak titik pusat massa gasing ke titik terendah.

$\psi$  dan  $\phi$  adalah koordinat siklik. Dalam hal ini, diperoleh dua integral gerak, yaitu

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \Theta) = \text{konstan} \equiv M_3 \quad (1)$$



Gambar 48:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I'_1 \sin^2 \Theta + I_3 \cos^2 \Theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \Theta = \text{konstan} \equiv M_1$$

dengan  $I'_1 = I_1 + \mu l^2$  ( $p_\phi$  dan  $p_\psi$  menggambarkan komponen momentum angular yang terdapat pada titik  $O$  pada arah sumbu  $x_3$  dan  $Z$ ). Selain itu, energi sistem tetap konstan

$$E = \frac{I'_1}{2} (\dot{\Theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \Theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \Theta)^2 + \mu g l \cos \Theta. \quad (3)$$

dari pers. [1] dan [2] didapat

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3 \cos \Theta}{I_1' \sin^2 \Theta} \quad (4)$$

$$\dot{\psi} = \frac{M_3}{I_3} - \cos \Theta \frac{M_z - M_3 \cos \Theta}{I_1' \sin^2 \Theta} \quad (5)$$

Dengan mengeliminasi  $\varphi$  dan  $\psi$  pada persamaan energi (pers. [3]), diperoleh

$$E' = \frac{I_1'}{2} (\dot{\Theta})^2 + U_{sz \text{ ef}}(\Theta)$$

dengan relasi

$$E' = E - \frac{M_3^2}{I_3} - \mu g l, \quad U_{sz \text{ ef}}(\Theta) = \frac{(M_z - M_3 \cos \Theta)^2}{2I_1' \sin^2 \Theta} - \mu g l (1 - \cos \Theta) \quad (6)$$

Dengan menentukan  $\Theta$  dan memisahkan variabel, selanjutnya akan didapat persamaan

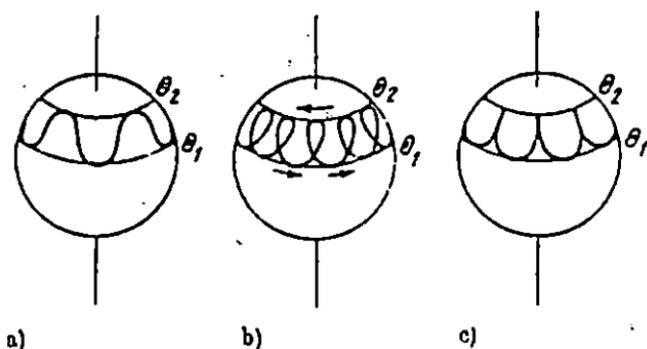
$$t = \int \frac{d\Theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1'} (E' - U_{ef}(\Theta))}} \quad (7)$$

(integral pada pers. [7] adalah integral eliptik). Dengan petolongan pers. [4] dan pers. [5] sudut-sudut  $\varphi$  dan  $\psi$  dapat ditentukan dalam variabel  $\Theta$  pangkat dua.

Variasi sudut  $\Theta$  ketika gasing dalam keadaan bergerak dapat ditentukan dari ketidaksamaan  $E' \geq U_{ef}(\Theta)$ . Fungsi  $U_{ef}(\Theta)$  akan berubah menjadi  $\infty$  (untuk kasus  $M_3 \neq M_2$ ) pada  $\Theta = 0$  dan  $\Theta = \pi$  dan mempunyai harga minimum antara dua titik tersebut. Kesamaan  $E' = U_{ef}(\Theta)$  mempunyai dua akar yang menentukan kemiringan sumbu figur antara sudut  $\Theta_1$  dan  $\Theta_2$  terhadap sumbu vertikal.

Apakah tanda dari  $\dot{\varphi}$  pada penurunannya berubah atau tidak, jika harga sudut  $\Theta$  "berjalan" dari  $\Theta_1$  hingga  $\Theta_2$ , ditentukan oleh tanda

dari  $M_2 - M_3 \cos \Theta$  berubah atau tidak. Jika tidak ada perubahan tanda dari  $j$ , berarti bahwa sumbu figur gasing akan mengalami gerak presesi secara monoton terhadap sumbu vertikal dan terjadi getaran ke atas dan ke bawah (disebut *nutasi*) (lihat gbr. [49a] garis menunjukkan trayektori atau lintasan, sumbu figur digambarkan



Gambar 49:

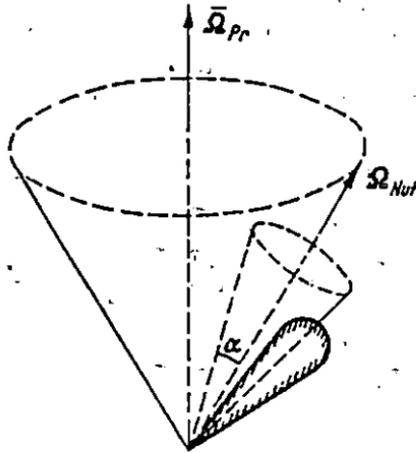
berada di permukaan bola dengan titik tengah adakah titik tetap gasing). Dengan berubahnya tanda  $\varphi$ , arah gerak presesi pada kedua batas lingkaran menjadi berlawanan arah sehingga gerak sumbu figur terhadap sumbu vertikal dapat digambarkan sebagai kurva melingkar (lihat gbr [49b]). Jika pada akhirnya antara dua harga  $\Theta_1$  dan  $\Theta_2$ , harga perbedaan  $M_2 - M_3 \cos \Theta = 0$ , pada batas lingkaran yang digambarkan pada gbr [49] harga  $\varphi$  dan  $\psi$  juga sama dengan nol, lintasan gerak sumbu figur persis seperti digambarkan pada gbr. [49c].

$$U_{\text{ef}} \approx \left( \frac{M_3^2}{8 I_1'} - \frac{\mu g l}{2} \right) \Theta^2.$$

di mana berlaku syarat  $M_3^2 > 4 I_1' \mu g l$  atau didapat hubungan sebagai berikut

$$\Omega_3^2 > \frac{4 I_1' \mu g l}{I_3^2}.$$

atau didapat hubungan, sebagai berikut



Gambar 50:

**Contoh 72:** Tentukan gerak sebuah gasing untuk kasus energi kinetik rotasi eigennya adalah besar dibanding dengan energi medan gravitasi (gasing seperti ini disebut pula sebagai "gasing cepat").

**Penyelesaian:** Apabila untuk pendekatan pertama gaya berat diabaikan, gerak gasing berhubungan dengan gerak presesi sumbu figur pada arah sesuai dengan arah vektor  $M$  (dalam hal ini gerak berhubungan dengan kasus nutasi gasing); gerak tersebut adalah sesuai dengan pers. [33.5], dengan kecepatan sudut :

$$\Omega_{nut} = \frac{M}{T_1}$$

Untuk pendekatan selanjutnya terjadi perlambatan gerak presesi momentum angular  $M$  pada arah vertikal (gbr [50]). Untuk menentukan kecepatan presesi demikian bagi persamaan gerak pada pers. [34.3]

$$\frac{dM}{dt} = K$$

dengan periode nutasi. Momen dari gaya berat yang bekerja pada

gasing adalah  $\mathbf{K} = \mu [\mathbf{n}_3 \mathbf{g}]$ , dengan  $\mathbf{n}_3$  adalah vektor satuan pada arah sumbu figur. Dengan dasar simetri sebagai hasil perata-rataan  $\mathbf{K}$  terhadap "kerucut nutasi", diketahui bahwa  $\mathbf{n}_3$  dapat digantikan dengan proyeksinya,  $\cos \alpha \mathbf{M}/M$ , pada arah  $\mathbf{M}$  ( $\alpha$  adalah sudut antara  $\mathbf{M}$  dan sumbu figur). Dengan demikian, diperoleh persamaan:

$$\frac{dM}{dt} = -\cos \alpha \frac{\mu l}{M} [g M].$$

Persamaan ini mengandung pengertian bahwa vektor  $\mathbf{M}$  terhadap arah  $\mathbf{g}$  (vertikal) mengalami precesi dengan kecepatan sudut sebesar

$$\Omega_{pr} = -\frac{\mu l \cos \alpha}{M} g$$

( $\Omega_{pr}$  adalah kecil dibanding dengan  $\Omega_{nut}$ )

Pada pendekatan yang dibicarakan di atas besaran yang ditulis pada pers. [1] dan [2],  $M$  dan  $\cos \alpha$  adalah konstanta (walaupun keduanya bukan merupakan integral gerak). Keduanya mempunyai hubungan erat dengan integral gerak  $E$  dan  $M_3$  untuk pendekatan yang sama, dalam bentuk

$$M_3 = M \cos \alpha, \quad E \approx \left( \frac{\cos^2 \alpha}{I_3} + \frac{\sin^2 \alpha}{I_1} \right)$$

### 36. Persamaan Euler

Pada § 34 telah dibahas persamaan gerak yang berlaku untuk sistem koordinat diam turunan dari  $d\mathbf{P}/dt$  dan  $d\mathbf{M}/dt$  pada pers. [34.1] dan [34.3] menyatakan perubahan vektor  $\mathbf{P}$  dan  $\mathbf{M}$  dalam sistem koordinat tersebut. Hubungan antara komponen-komponen momentum angular  $\mathbf{M}$  benda tegar dan komponen-komponen kecepatan sudut lebih sederhana lagi dapat diperoleh dari sistem koordinat bergerak, dengan sumbu-sumbunya adalah sama dengan sumbu prinsipal sendiri. Untuk mendapatkan hubungan ini harus dilakukan transformasi koordinat sistem koordinat diam ke sistem koordinat bergerak  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $x_3$ .

Diasumsikan bahwa  $dA/dt$  adalah kecepatan perubahan suatu vektor  $A$  sembarang dalam sistem koordinat diam. Jika vektor  $A$  tetap konstan dalam sistem koordinat yang mengalami rotasi, setelah dilakukan transformasi untuk perbedaan faktor rotasi dibanding dengan harga  $A$  untuk sistem koordinat diam; perbedaan tersebut dapat ditulis

$$\frac{dA}{dt} = [\Omega A]$$

(lihat §9, seperti diketahui pada pers. [9.1] dan [9.2] bahwa relasi di atas berlaku untuk vektor sembarang). Secara umum pada ruas kanan persamaan ini harus ditambahkan perubahan kecepatan vektor  $A$  dalam sistem koordinat bergerak; misalnya perubahan kecepatan tersebut ditulis  $d'A/dt$  sehingga didapat relasi:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d'A}{dt} + [\Omega A]. \quad (36.1)$$

Dengan pertolongan rumusan umum ini maka pers. [34.1] dan [34.3] diubah dalam bentuk

$$\frac{d'P}{dt} + [\Omega P] = F, \quad \frac{d'M}{dt} + [\Omega M] = K. \quad (36.2)$$

Persamaan di atas menyatakan turunan terhadap waktu besaran  $P$  dan  $M$  dalam sistem koordinat bergerak. Dengan demikian, dapat dilakukan proyeksi sumbu-sumbu sistem ini secara langsung dan ditulis sebagai:

$$\left( \frac{d'P}{dt} \right)_i = \frac{dP_i}{dt} \dots, \quad \left( \frac{d'M}{dt} \right)_i = \frac{dM_i}{dt} \dots,$$

dengan indeks 1, 2, dan 3, masing-masing melambangkan sumbu  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $x_3$ . Substitusikan  $P = mV$  pada pers. [36.2] sehingga didapat

$$\mu \left( \frac{dV_1}{dt} + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2 \right) = F_1, \dots$$

$$\begin{aligned} \mu \left( \frac{dV_2}{dt} + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3 \right) &= F_2, \\ \mu \left( \frac{dV_3}{dt} + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1 \right) &= F_3. \end{aligned} \quad (36.3)$$

Dengan mengandaikan bahwa sumbu-sumbu  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $x_3$  adalah sebagai sumbu prinsipal persamaan kedua pada pers. [36.2] ditulis  $M_1 = I_1 \Omega$  dan seterusnya, didapat

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2) \Omega_2 \Omega_3 &= K_1, \\ I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3) \Omega_3 \Omega_1 &= K_2, \\ I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1) \Omega_1 \Omega_2 &= K_3. \end{aligned} \quad (36.4)$$

Pers. [36.4] disebut sebagai *persamaan Euler*.

Untuk rotasi bebas berlaku  $K = 0$  sehingga persamaan Euler menjadi

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_1}{dt} + \frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_2 \Omega_3 &= 0, \\ \frac{d\Omega_2}{dt} + \frac{I_1 - I_3}{I_2} \Omega_3 \Omega_1 &= 0, \\ \frac{d\Omega_3}{dt} + \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_1 \Omega_2 &= 0. \end{aligned} \quad (36.5)$$

Sebagai contoh persamaan di atas akan digunakan untuk gerak rotasi bebas gasing simetri. Dengan mensubstitusikan  $I_1 = I_2$ , dari persamaan ketiga didapat relasi  $\dot{\Omega}_3 = 0$ , berarti bahwa  $\Omega_3 = \text{konstan}$ . Kemudian dari dua persamaan lainnya diperoleh pula:

$$\dot{\Omega}_1 = -\omega \Omega_2, \quad \dot{\Omega}_2 = \omega \Omega_1$$

dengan konstanta

$$\Omega = \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_2}. \quad (36.6)$$

Kalikan kedua persamaan ini dengan  $i$  dan tambahkan ke persamaan pertama, diperoleh

$$\frac{d}{dt}(\Omega_1 + i\Omega_2) = \Omega_1 + i\Omega_2$$

dan penyelesaian persamaan diferensial adalah

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = A e^{i\omega t}$$

dan penyelesaian persamaan diferensial adalah

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = A e^{i\omega t}$$

dengan  $A$  adalah konstanta sembarang; solusi real dari persamaan ini (sesuai dengan pemilihan waktu awal; real) adalah

$$\Omega_1 = A \cos \omega t, \quad \Omega_2 = A \sin \omega t. \quad (36.7)$$

Hasil perhitungan di atas menunjukkan bahwa proyeksi kecepatan sudut pada bidang yang tegak lurus terhadap sumbu figur dan pada bidang ini pula mengalami rotasi dengan kecepatan sudut  $\omega$ , mempunyai harga konstan,  $\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} = A$ . Demikian pula proyeksi  $\Omega_3$  pada sumbu figur adalah konstan. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa vektor  $\Omega$  secara keseluruhan mengalami rotasi dengan kecepatan sudut  $\omega$  secara beraturan, karena terdapat relasi antara momentum angular  $M$  dan  $\Omega$ .  $M_1 = I_1 \Omega_1$ ,  $M_2 = I_2 \Omega_2$ ,  $M_3 = I_3 \Omega_3$ , maka akibatnya vektor  $M$  juga akan mengalami gerak yang sama (terhadap sumbu figur gasing).

Gambaran gerak yang dibicarakan di atas, tentunya hanya menggambarkan gerak dalam aspek yang berbeda dari gerak gasing yang sama yang telah dibahas pada §33 dan §35 dalam sistem koordinat diam. Kecepatan sudut rotasi dari vektor  $M$  (sumbu  $Z$  pada gbr. [8]) terhadap arah dari  $x_3$  misalnya dalam sudut Euler tidak dapat dikatakan sama dengan kecepatan sudut  $-\psi$ . Dari pers. [35.4] diperoleh

$$\psi = \frac{M \cos \Theta}{I_3} - \dot{\varphi} \cos \Theta = M \left( \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right)$$

atau

$$\dot{\psi} = \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1}$$

yang tidak lain sesuai dengan pers [36.6].

### 37. Gasing Tidak Simetri

Dalam pembahasan ini akan dibahas penggunaan persamaan Euler untuk kasus lebih kompleks, yaitu gerak suatu gasing tidak simetri, yang mempunyai ketiga momen kelembaman tidak sama. Untuk menyederhanakan pembahasan dianggap bahwa

$$I_3 > I_2 > I_1 \quad (37.1)$$

Dua integral persamaan Euler telah dikenal pada pembahasan sebelumnya. Keduanya mengikuti hukum kekekalan energi dan momentum angular dan ditulis dalam bentuk

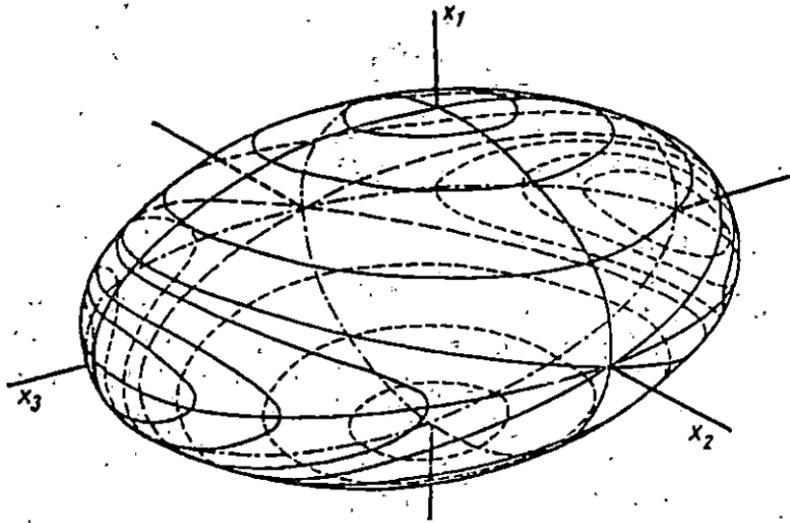
$$\left. \begin{aligned} I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2 &= 2E, \\ I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2 + I_3^2 \Omega_3^2 &= M^2, \end{aligned} \right\} \quad (37.2)$$

dengan  $E$  adalah energi dan  $M$  adalah momentum angular, keduanya konstan. Jika dinyatakan dalam komponen-komponen vektor  $M$ , kedua persamaan di atas dapat ditulis kembali dalam bentuk.

$$\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} = 2E. \quad (37.3)$$

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2. \quad (37.4)$$

Dari persamaan di atas dapat disimpulkan beberapa karakter gerak gasing. Untuk kepentingan ini terlihat, bahwa pers. [37.3] dan [37.4] dalam sistem sumbu  $M_1, M_2, M_3$  secara geometris merupakan persamaan permukaan suatu elipsoida dengan sumbu



Gambar 51:

$$\sqrt{2 E I_1}, \quad \sqrt{2 E I_2}, \quad \sqrt{2 E I_3}$$

dan persamaan bola dengan jari-jari sama dengan  $M$ . Jika arah vektor  $M$  mengalami perubahan, (terhadap sumbu kelembaman gasing) ujung bawah gasing akan bergerak sepanjang garis perpotongan dari permukaan yang disebutkan di atas (gambar [51] menggambarkan sederetan garis perpotongan suatu elipsoida dan bola yang digambarkan dengan jari-jari yang berbeda). Syarat bahwa kedua permukaan tersebut benar-benar berpotongan, jika

$$2 E I_1 < 2 E I_2 < 2 E I_3; \quad (37.5)$$

secara geometris berarti bahwa jari-jari lingkaran pada pers. [37.4] terletak antara sumbu terpanjang dan terpendek dari elipsoida pers. [37.3].

Selanjutnya akan ditelusuri lebih jauh karakter dari "lintasan" ujung bawah vektor  $M^{(1)}$  jika besaran  $M$  berubah (energi  $E$  diketahui).

1) Kurva analog yang mengabarkan ujung bawah vektor  $\Omega$  disebut sebagai *polhodian*.

Jika  $M^2$  sedikit lebih besar dari  $2EI_1$ , bola akan memotong elipsoida dalam dua kurva kecil dan tertutup, di mana  $x_1$  melalui dua sumbu elipsoida (untuk  $M^2 \rightarrow 2E I_2$  kurva ini akan mengkerut menjadi titik yang berada di kedua kutub). Dengan memperbesar harga  $M^2$  kurva akan "mengembang" dan pada  $M^2 = 2E I_1$  terpecah menjadi dua kurva berbentuk elips yang memotong sumbu  $x_2$  dikutub elipsoida. Jika  $M^2$  diperbesar lagi, akan didapat dua kurva tertutup yang terpisah satu sama lain dengan kutub elipsoida melingkupi sumbu  $x_3$ ; pada  $M^2 \rightarrow 2E I_3$  kurva akan mengkerut menjadi titik.

Patut pula dicatat bahwa sifat tertutup kurva memberikan arti suatu periodisitas perubahan  $M$  tertutup benda gasing; sementara suatu periode menggambarkan vektor suatu permukaan kerucut dan kembali ke "keadaan" semula.

Selanjutnya lihat karakter penting yang berbeda dari lintasan dekat kutub elipsoida. Dekat sumbu  $x_1$  dan  $x_2$  lintasan terletak secara sempurna dekat kutub, sebaliknya lintasan akan menjauhi kutub, terdapat sangat rapat kutub dan melalui sumbu  $x_2$  dan lintasan selanjutnya akan menjauhi kutub. Sesuai dengan gambaran ini, terdapat karakter berbeda dari stabilitas rotasi gasing terhadap ketiga sumbu kelbamannya. Rotasi terhadap sumbu  $x_1$  dan  $x_3$  (sesuai dengan momen kelembaman terbesar dan terkecil) adalah stabil dalam pengertian, bahwa gasing dengan penyimpangan yang kecil dari keadaan ini menyebabkan suatu gerak yang terletak di dekat titik awalnya. Rotasi terhadap sumbu  $x_2$  sebaliknya tidak stabil; cukup dengan adanya simpangan kecil menyebabkan timbulnya gerak yang menyebabkan gasing berada jauh dari titik awalnya.

Untuk menentukan ketergantungan  $\Omega$  terhadap waktu (komponen  $M$  yang proporsional terhadapnya) digunakan persamaan Euler, pers. [36.5]. Dengan pertolongan pers. [37.2] dan [37.3],  $\Omega_1$ ,  $\Omega_3$  dan  $\Omega_2$  dinyatakan dalam persamaan, sebagai berikut

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1^2 &= \frac{1}{I_1(I_3 - I_1)} \{ (2E I_3 - M^2) - I_2(I_3 - I_2) \Omega_2^2 \}, \\ \Omega_3^2 &= \frac{1}{I_3(I_3 - I_1)} \{ (M^2 - 2E I_1) - I_2(I_2 - I_1) \Omega_2^2 \}, \end{aligned} \right\} \quad (37.6)$$

substitusikan persamaan ini ke pers. [36.5], diperoleh,

$$\left. \begin{aligned} \lambda \cdot \frac{d\Omega_1}{dt} &= \frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega_1 \Omega_3 \\ &= \frac{1}{I_2 \sqrt{I_1 I_3}} \left\{ [2 E I_3 - M^2 - I_2 (I_3 - I_2) \Omega_2^2] \times \right. \\ &\quad \left. [(M^2 - 2 E I_1) - I_1 (I_2 - I_1) \Omega_2^2] \right\}^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (37.7)$$

Dengan memisahkan variabel pada persamaan ini dan mengintegrasikannya, didapat fungsi  $t(\Omega_2)$  dalam bentuk integral eliptik. Dengan mengembalikan bentuk integral eliptik ke bentuk standarnya, diandaikan bahwa

$$M^2 > 2 E I_2 \quad (37.7a)$$

(jika tidak diandaikan demikian persamaan berikut harus dilakukan penukaran indeks 1 dan 3). Selain  $t$  dan  $\Omega_2$  diperkenalkan suatu variabel lain, yaitu

$$\tau = t \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(M^2 - 2 E I_1)}{I_1 I_2 I_3}}, \quad s = \Omega_2 \sqrt{\frac{I_1 (I_3 - I_2)}{2 E I_3 - M^2}} \quad (37.8)$$

dan suatu parameter positif  $k^2 < 1$  yang didefinisikan

$$k^2 = \frac{(I_2 - I_1)(2 E I_3 - M^2)}{(I_3 - I_2)(M^2 - 2 E I_1)} \quad (37.9)$$

Maka diperoleh

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}}$$

(waktu awal dipilih sehingga berlaku  $\Omega_2(t=0) = 0$ ). Kebalikan integral ini akan menghasilkan fungsi yang telah dikenal, yaitu fungsi eliptik Jacobi:

$$s = \operatorname{sn} \tau$$

yang memberikan ketergantungan  $\Omega_2$  terhadap waktu. Fungsi  $\Omega_1(t)$ ,  $\Omega_3(t)$  secara aljabar dapat dinyatakan dalam  $\Omega_2(t)$  dengan menggunakan pers. [37.6]. Jika definisi untuk dua persamaan eliptik lainnya mempunyai bentuk

$$\operatorname{cn} \tau = \sqrt{1 - \sin^2 \tau}, \quad \operatorname{dn} \tau = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}.$$

akan diperoleh rumusan akhir, sebagai berikut

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \sqrt{\frac{2 E I_3 - M^2}{I_1(I_3 - I_1)}} \operatorname{cn} \tau, \\ \Omega_2 &= \sqrt{\frac{2 E I_3 - M^2}{I_2(I_3 - I_2)}} \operatorname{sn} \tau, \\ \Omega_3 &= \sqrt{\frac{M^2 - 2 E I_1}{I_3(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn} \tau. \end{aligned} \quad (37.10)$$

Fungsi pada pers. [37.10], adalah periodis dengan periodenya terhadap variabel  $\tau$  diketahui dengan harga sama dengan  $4K$  dengan  $K$  adalah integral eliptik orde pertama, atau

$$K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}}. \quad (37.11)$$

Periode tambahan diperoleh pula

$$T = 4K \sqrt{\frac{I_1 I_2 I_3}{(I_3 - I_1)(M^2 - 2 E I_1)}}. \quad (37.12)$$

Dengan berjalannya waktu vektor  $\Omega$  akan kembali ke keadaan semula sesuai dengan sumbu gasing (posisi gasing sendiri dalam hal ini tidak menambah posisinya dalam koordinat diam; lihat penjelasan di bawah).

Untuk kasus  $I_1 = I_2$  pers. [37.10] akan menjadi rumusan gasing simetri yang telah dibahas pada bab sebelumnya. Untuk  $i_1 \rightarrow i_2$ , harga

$k_2 \rightarrow 0$  sehingga fungsi eliptik mengalami degenerasi menjadi fungsi lingkaran, sebagai berikut

$$\operatorname{sn} \tau \rightarrow \sin \tau, \operatorname{cn} \tau \rightarrow \cos \tau, \quad \text{dan} \quad \operatorname{dn} \tau \rightarrow 1$$

dan didapat kembali pers. [36.7].

Untuk  $M^2 = 2 E I_3$  didapat bahwa  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$  dan  $\Omega_3 = \text{konstan}$ , berarti bahwa vektor  $\Omega$  adalah vektor konstanta dengan arah sesuai dengan sumbu  $x_3$ . Analog untuk kasus  $M^2 = 2 E I_1$  (dalam hal ini  $\tau = 0$ ) terjadi rotasi beraturan terhadap sumbu  $x_1$ .

Sekarang akan dihitung rotasi absolut (rotasi terhadap sistem koordinat diam  $X, Y$ , dan  $Z$ ) dari gasing dalam ruang sebagai fungsi waktu. Untuk keperluan itu sudut Euler  $y, j$ , dan  $Q$  masing-masing merupakan sudut antara sumbu gasing  $x_1, x_2, x_3, X, Y, Z$ , dan sumbu  $Z$  dipilih sebagai sumbu tetap vektor momentum angular yang konstan  $M$ . Sudut polar dan azimuth pada arah  $Z$ , terhadap sumbu  $x_1, x_2$ , dan  $x_3$ , yaitu

$$M \sin \Theta \sin \psi = M_1 = I_1 \Omega_1$$

$$M \sin \Theta \cos \psi = M_2 = I_2 \Omega_2 \quad (37.13)$$

$$M \cos \Theta = M_3 = I_3 \Omega_3$$

Dari persamaan ini diperoleh relasi

$$\cos \Theta = \frac{I_3 \Omega_3}{M} \quad \tan \psi = \frac{I_1 \Omega_1}{I_2 \Omega_2} \quad (37.14)$$

dan dengan menggunakan pers. [37.10], didapat

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \sqrt{\frac{I_2(M^2 - 2 E I_1)}{M^2(I_3 - I_1)}} \operatorname{cn} \tau, \\ \tan \psi &= \sqrt{\frac{I_1(I_3 - I_2) \operatorname{cn} \tau}{I_2(I_3 - I_1)}} \frac{\operatorname{cn} \tau}{\operatorname{dn} \tau}. \end{aligned} \quad (37.15)$$

Dengan demikian, diperoleh ketergantungan  $\Theta$  dan  $\psi$  terhadap waktu; persamaan tersebut menggambarkan, komponen vektor  $\Omega$ , merupakan fungsi periodik dengan periode sama dengan rumusan pada pers. [37.12].

Sudut  $\varphi$  yang dinyatakan pada pers [37.13] adalah tidak berlaku lagi dan untuk menghitungnya kembali harus digunakan pers. [35.1], dengan komponen  $\Omega$  dinyatakan dalam turunan sudut Euler. Dengan mengeliminasi  $\Theta$  dari persamaan

$$\Omega_1 = \dot{\varphi} \sin \Theta \sin \psi + \dot{\Theta} \cos \psi,$$

$$\Omega_2 = \dot{\varphi} \sin \Theta \cos \psi - \dot{\Theta} \sin \psi$$

diperoleh

$$\dot{\varphi} = \frac{\Omega_1 \sin \psi + \Omega_2 \cos \psi}{\sin \Theta},$$

dan dengan pertolongan pers. [37.13] didapat

$$\frac{d\varphi}{dt} = M \frac{I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2}{I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2} \quad (37.16)$$

Fungsi  $\varphi(t)$  dapat ditentukan dengan mengintegrasikan persamaan di atas walaupun diketahui bahwa integrand mempunyai bentuk yang kompleks. Dengan sederetan *trick* perubahan integral ini dapat dinyatakan dalam fungsi yang disebut sebagai *fungsi theta*. Dalam pembahasan ini tidak akan dilakukan perhitungan<sup>2)</sup> dan hanya terlihat hasil akhir.

Fungsi  $\varphi(t)$  dapat dinyatakan dalam penjumlahan (hingga penambahan konstanta sembarang) dua suku

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) \quad (37.17)$$

2) Perhitungan untuk ini, misalnya telah dibahas oleh E. Whittaker dalam buku berjudul *Analytical Dynamics*. University press. Cambridge 1927

Salah satu suku persamaan  $\varphi(t)$  diperoleh dari relasi

$$e^{2i\varphi_1(t)} = \frac{\vartheta_{01} \left( \frac{2t}{T} - i\alpha \right)}{\vartheta_{01} \left( \frac{2t}{T} + i\alpha \right)} \quad (37.18)$$

dengan  $\vartheta_{01}$  sebagai fungsi theta dan  $\alpha$  adalah konstanta real yang diperoleh dari persamaan

$$\sin(i2\alpha K) = i \sqrt{\frac{I_3(M^2 - 2, EI_1)}{I_1(2, EI_3 - M^2)}} \quad (37.19)$$

( $K$  dan  $T$  dapat diperoleh dari pers. [37.11] dan [37.12]. Ruas kanan pers. [37.18] merupakan fungsi periodik dengan periode  $T/2$ , berarti bahwa pada saat  $T$  fungsi  $\varphi_1$  bergeser sebesar  $2\pi$ . Penjumlahan kedua pada pers. [37.17] dapat diperoleh dari

$$\varphi_2(t) = 2\pi \frac{1}{T}, \quad \frac{1}{T'} = \frac{M}{2\pi I_1} = -\frac{i}{\pi T} \frac{\vartheta'_{01}(i\alpha)}{\vartheta_{01}(i\alpha)} \quad (37.20)$$

Fungsi ini akan bertambah sebesar  $2\pi$  adalah waktu  $T'$ . Perubahan terhadap waktu dari fungsi  $\varphi$  merupakan tumpang tindih (*overlap*) dari dua fungsi periodik, dengan salah satu periode ( $T$ ) akan sama dengan periode perubahan sudut  $\psi$  dan  $\Theta$ . Sementara yang kedua ( $T$ ) dibandingkan dengan yang pertama tidak dapat diukur. Peristiwa seperti ini memberikan arti bahwa gerak gasing dianggap tidak akan pernah kembali ke titik asalnya.

**Contoh 73:** Tentukan rotasi bebas sebuah gasing terhadap sebuah sumbu yang terletak di dekat sumbu  $x_2$  atau  $x_1$ .

**Penyelesaian:** Andaikan sumbu  $x_3$  terletak di dekat arah vektor  $M$ . Maka komponen  $M_1$  dan  $M_2$  akan berharga kecil,  $M_3 \approx M$  (hingga pendekatan orde pertama). Dengan ketepatan yang sama dua persamaan Euler pertama mempunyai bentuk, sebagai berikut:

$$\frac{dM_1}{dt} = \left(1 - \frac{I_3}{I_2}\right) \Omega_0 M_2, \quad \frac{dM_2}{dt} = \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right) \Omega_0 M_1.$$

dengan  $\Omega_0 = MI_3$  adalah konstan. Dengan cara yang umum solusi  $M_1$  dan  $M_2$  dapat diselesaikan sebanding dengan faktor  $e^{i\omega t}$ , dengan  $\omega$  adalah

$$\omega = \Omega_0 \sqrt{\left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right) \left(\frac{I_3}{I_2} - 1\right)} \quad (1)$$

dan besaran  $M_1$  dan  $M_2$  diperoleh

$$M_1 = M \alpha \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \cos \omega t.$$

$$M_2 = M \alpha \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} \sin \omega t.$$

$$\omega = \Omega_0 \sqrt{\left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right) \left(\frac{I_3}{I_2} - 1\right)}$$

dengan  $\alpha$  adalah suatu konstanta yang kecil. Persamaan ini menentukan rumusan gerak vektor  $\mathbf{M}$  terhadap gasing; pada ilustrasi yang digambarkan pada gambar [51] ujung akhir vektor  $\mathbf{M}$  dilukiskan sebagai elips di sekitar kutub pada sumbu  $x_3$  (dengan frekuensi  $\omega$ ).

Untuk menghitung gerak absolut gasing di dalam ruang digunakan sudut Euler. Dalam kasus ini sudut kemiringan  $\Theta$  dari sumbu  $x_3$  terhadap sumbu  $Z$  (arah vektor  $\mathbf{M}$ ) adalah kecil, berdasarkan pers. [37.14], diperoleh

$$\tan \nu = \frac{M_1}{M_2}.$$

$$\Theta^2 \approx 2(1 - \cos \Theta) = 2 \left(1 - \frac{M_1}{M_2}\right) \approx \frac{M_1^2 + M_2^2}{M^2}.$$

Dengan mensubstitusikan persamaan ini ketiga pada pers. [2], diperoleh

$$\tan \nu = \sqrt{\frac{I_1(I_3 - I_2)}{I_2(I_3 - I_1)}} \cos \omega t.$$

$$\Theta^2 = a^2 \left[ \left( \frac{I_3}{I_2} - 1 \right) \cos^2 \omega t + \left( \frac{I_3}{I_1} - 1 \right) \sin^2 \omega t \right]. \quad (3)$$

Pada perhitungan sudut  $\varphi$  pandang bahwa dari persamaan ketiga pada pers. [35.1], untuk  $\Theta \ll 1$  berlaku:

$$\Omega_0^a \approx \Omega_3^a \psi + \varphi$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\varphi = \Omega_0 t - \psi$$

(konstanta integrasi diabaikan).

Gambaran yang lebih jelas lagi dari karakter gerak gasing dapat diperoleh jika perubahan ketiga sumbu kelembaman gasing diamati (vektor satuan sumbu-sumbu ini dituliskan sebagai  $n_1$ ,  $n_2$ , dan  $n_3$ ). Vektor  $n_1$  dan  $n_2$  mengalami rotasi beraturan pada bidang  $X - Y$  dengan frekuensi  $\Omega_0$ , secara bersamaan terjadi pula rotasi melintang dengan frekuensi  $\omega$ . Getaran ini dapat diperoleh dari komponen kedua vektor pada arah sumbu  $Z$ , yaitu

$$n_{1Z} \approx \frac{M_1}{M} = a \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \cos \omega t,$$

$$n_{2Z} \approx \frac{M_2}{M} = a \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} \sin \omega t.$$

Untuk vektor  $n_3$  dapat diperoleh dengan ketelitian yang sama, yaitu

$$n_{3x} \approx \Theta \sin \varphi, \quad n_{3y} \approx -\Theta \cos \varphi, \quad n_{3z} \approx 1$$

(sudut polar dan azimuth yang menyatakan arah vektor  $n_3$  terhadap sumbu  $X$ ,  $Y$ , dan  $Z$  adalah  $\sin \Theta$  dan  $\varphi - \pi/2$ ; lihat catatan kaki pada §35). Selanjutnya tuliskan (dengan menggunakan pers. [37.13])

$$\begin{aligned} n_{3x} &= \Theta \sin(\Omega_0 t - \psi) = \Theta \sin \Omega_0 t \cos \psi - \Theta \cos \Theta \sin \psi \\ &= \frac{M_2}{M} \sin \Omega_0 t - \frac{M_1}{M} \cos \Omega t \\ &= a \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} \sin \Omega_0 t \sin \omega t - a \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \cos \Omega_0 t \cos \omega t \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} n_{3x} &= -\frac{a}{2} \left( \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} + \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \right) \cos(\Omega_0 + \omega) t \\ &\quad + \frac{a}{2} \left( \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} - \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \right) \cos(\Omega_0 - \omega) t. \end{aligned}$$

analog untuk

$$\begin{aligned} n_{3y} &= -\frac{a}{2} \left( \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} + \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \right) \sin(\Omega_0 + \omega) t \\ &\quad + \frac{a}{2} \left( \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} - \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \right) \sin(\Omega_0 - \omega) t. \end{aligned}$$

Dari perhitungan di atas terlihat bahwa gerakan vektor  $n_3$  merupakan tumpang tindih dua gerak rotasi terhadap sumbu  $Z$  dengan frekuensi  $\Omega_0 \pm \omega$ .

**Contoh 74:** Tentukan rotasi bebas sebuah gasing untuk kasus  $M^2 = 2EI_2$ .

**Penyelesaian:** Kasus ini sesuai dengan gambaran lintasan yang terdapat di ujung vektor  $M$  pada gbr. [47], yang melalui kutub dan sumbu  $x_2$ .

Pers. [37.7] dalam kasus ini, menjadi

$$\frac{ds}{dt} = 1 - s^2, \quad \tau = t \sqrt{\frac{I_2(I_3 I_2)}{I_1(I_3 - I_1)}} \Omega_0, \quad s = \frac{\Omega_2}{\Omega_0}$$

dengan  $\Omega_0 = MI/I_2 = 2E/M$ . Integrasikan persamaan ini dan gunakan pers. [37.6], maka didapat

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega_0 \sqrt{\frac{I_2(I_3 I_2)}{I_1(I_3 - I_1)}} \frac{1}{\cosh \tau}, \\ \Omega_2 &= \Omega_0 \tanh \tau, \\ \Omega_3 &= \Omega_0 \sqrt{\frac{I_2(I_2 I_1)}{I_3(I_3 - I_1)}} \frac{1}{\cosh \tau}. \end{aligned} \quad (1)$$

Untuk menyelesaikan gerak absolut gasing gunakan persamaan Euler, dengan menganggap  $Q$  adalah sudut antara sumbu  $Z$  (arah dari vektor  $M$ ) dan sumbu kelembaman  $x_2$  gasing (bukan  $x_3$  seperti yang dituliskan dalam penjelasan, sebelumnya). Pada pers [37.14] dan [37.16] yang menyatakan hubungan vektor  $\Omega$  dan sudut Euler haruslah dilakukan penukaran komponen 123  $\rightarrow$  312. Jika dalam rumus ini disubstitusikan pers. [1], didapat

$$\cos \Theta = \tanh \tau, \quad \varphi = \Omega_0 t + \text{konstanta}$$

$$\tan \psi = \sqrt{\frac{I_3(I_2 - I_1)}{I_1(I_3 - I_2)}}$$

Dari rumus ini diketahui bahwa vektor  $\Omega$  adalah asimtotik (untuk  $t \rightarrow \infty$ ) dekat sumbu  $x_2$ , terhadap sumbu  $Z$  yang tetap juga asimtotik.

### 38. Kontak Benda Tegar

Syarat kesetimbangan benda tegar seperti diketahui dari pers. [34.1] dan [34.3], sama artinya dengan seluruh gaya dan momen yang bekerja pada benda sama dengan nol

$$F = \sum f = 0, \quad K = \sum [r f] = 0. \quad (38.1)$$

Penjumlahan pada persamaan ini mempunyai arti terhadap seluruh gaya-gaya luar yang bekerja pada benda.  $r$  adalah vektor jari-jari dari titik acuan koordinat ke titik gaya bekerja pada benda; dalam hal ini titik acuan koordinat dan titik momen gaya dapat bekerja secara sembarang karena untuk  $\sum F = 0$  harga  $K$  tidak akan bergantung pada pemilihan titik tersebut (lihat pers. [34.5]).

Jika persoalan berhubungan dengan gesekan sistem benda tegar, maka seluruh syarat kesetimbangan yang dikemukakan pada pers. [38.1] harus dipenuhi. Dalam hal ini harus pula diamati gaya-gaya yang bekerja pada sisi benda yang mengalami gesekan. Gaya-gaya ini bekerja di titik yang bersinggungan (titik yang mengalami gesekan) dan disebut sebagai gaya reaksi<sup>3)</sup> Untuk dua benda yang bersinggungan terdapat "pertukaran" gaya-gaya reaksi pada masing-masing benda karena benda lainnya, biasanya besar gaya tersebut sama, tetapi saling berlawanan arah.

Secara umum di samping gaya-gaya reaksi muncul pula gaya lain, jika kedua benda bergerak relatif satu sama lain, yaitu gaya yang mempunyai karakter dissipatif yang disebut sebagai gaya gesek.

Terdapat dua macam gerak yang mungkin terjadi pada benda tegar dalam keadaan kontak (bersinggungan), yaitu gerak meluncur dan gerak menggelinding. Pada gerak meluncur gaya-gaya reaksi berada tegak lurus terhadap permukaan benda yang bersinggungan, sedangkan gaya gesek berada pada arah tangensial.

3) Sering pula disebut sebagai reaksi saja atau gaya paksaan.

Gerak menggelinding murni dikarakteristikan sebagai gerak yang tidak mempunyai gerak relatif pada titik-titik singgung benda tegar; dengan perkataan lain bahwa benda tegar yang mengalami gerak menggelinding setiap saat terikat erat pada titik singgungnya. Untuk kasus ini posisi gaya reaksi adalah sembarang, yaitu tidak harus berada tegak lurus terhadap permukaan singgung. Gaya gesek untuk gerak ini akan menyebabkan adanya momen pusat tambahan, yang melawan gerak menggelinding.

Jika pada gerak meluncur terdapat gaya gesek yang kecil, tidak perlu diamati atau dapat diabaikan, di mana permukaan benda meluncur disebut sebagai *permukaan licin sempurna*. Sebaliknya hanya gerak menggelinding murni tidak memungkinkan adanya keadaan meluncur sama sekali; untuk kasus ini gaya gesek dapat diabaikan dan permukaan benda mengalami gerak demikian disebut sebagai *permukaan kasar absolut*.

Dalam kedua kasus di atas gaya gesek tidak muncul secara eksplisit dalam membahas gerak benda sehingga persoalan merupakan kasus mekanis murni. Sebaliknya jika dalam suatu gerak sifat nyata (konkrit) gesekan dominan, persoalan tidak lagi berhubungan dengan kasus mekanis murni (lihat §25).

Kontak benda dengan benda lain akan mengurangi derajat kebebasannya dibandingkan dengan gerak bebas. Hingga pembahasan di sini, pengamatan persoalan mekanika selalu menggunakan sistem koordinat yang sesuai dengan jumlah derajat kebebasan yang ada. Akan ditunjukkan nantinya, bahwa untuk persoalan benda yang mengalami gerak menggelinding pemilihan seperti yang dilakukan biasanya tidak memungkinkan.

Syarat yang dibolehkan untuk benda bergerak menggelinding adalah kesamaan kecepatan titik-titik singgung (untuk kasus menggelinding benda haruslah tetap berada pada permukaan sehingga kecepatan titik

singgung haruslah sama dengan nol). Untuk kasus lebih umum syarat tersebut dinyatakan melalui *persamaan ketergantungan* dalam bentuk

$$\sum c_{\alpha i} q_i = 0$$

dengan  $c_{\alpha i}$  hanya bergantung pada koordinat (indeks  $\alpha$  memberikan numerasi *persamaan ketergantungan*). Jika ruas kanan persamaan bukan merupakan turunan total terhadap waktu dari sembarang fungsi koordinat, persamaan-persamaan tersebut tidak dapat diintegrasikan. Dengan perkataan lain, persamaan tersebut tidak hanya menyatakan ketergantungan terhadap koordinat yang dapat digunakan, tetapi menentukan posisi benda yang dinyatakan dalam jumlah kecil koordinat yang sesuai dengan derajat kebebasan yang ada. Syarat seperti ini disebut sebagai *nonholonomik* (sebaliknya disebut *ketergantungan holonomik* yang hanya bergantung pada koordinat sistem).

Sebagai contoh lihat gerak menggelinding dari sebuah bola pejal pada suatu bidang datar. Seperti biasanya, kecepatan translasi dilambangkan dengan  $V$  (kecepatan titik pusat bola) dan kecepatan sudut rotasi disimbolkan dengan  $\Omega$ . Kecepatan titik-titik singgung bola dengan permukaan dinyatakan melalui  $r - an$  dalam rumusan umum, sebagai berikut:  $v = V + [\Omega r]$  ( $a$  adalah jari-jari bola,  $n$  adalah vektor satuan normal yang terletak tegak lurus terhadap bidang datar). Relasi yang dicari untuk kondisi tanpa gerak meluncur dapat diberikan melalui persamaan, sebagai berikut

$$V - a [\Omega r] = 0 \quad (38.3)$$

Persamaan ini tidak dapat diintegrasikan. Kecepatan  $V$  merupakan turunan total dari vektor jari-jari titik pusat bola terhadap waktu, sedangkan kecepatan sudut bukan merupakan turunan total dari suatu sistem koordinat tertentu. Berarti bahwa pers. [38.3] adalah nonholonomik<sup>4)</sup>.

4) Diandaikan terdapat ketergantungan yang sama dari gerak menggelinding sebuah selinder. Dalam kasus ini arah sumbu notasi pada keadaan gerak menggelinding adalah tetap di dalam ruang, sehingga  $\Omega = d\varphi/dt$  adalah turunan total dari koordinat selinder  $\varphi$  terhadap sumbunya. Relasi pada pers. [38.3] dapat diintegrasikan sehingga terdapat hubungan antara koordinat titik pusat massa dan sudut  $j$ .

Oleh karena itu, persamaan ketergantungan tidak dapat digunakan untuk mengurangi jumlah koordinat, untuk kasus adanya ketergantungan tersebut, dengan terpaksa, harus digunakan koordinat, yang tidak independen semuanya. Untuk menggambarkan persamaan Lagrange kasus ini, menggunakan prinsip aksi terkecil.

Ketergantungan dalam bentuk pers. [38.2] mempunyai arti adanya batasan {*constrain*} tertentu untuk variasi koordinat. Jika persamaan ini dimultiplikasi dengan  $\delta t$ , diperoleh, bahwa variasi  $\delta\phi$  tidak independen, tetapi mempunyai hubungan satu sama lain, seperti

$$\sum c_{\alpha} \delta q_i = 0 \quad (38.4)$$

Keadaan ini harus diperhatikan melalui variasi aksi. Berdasarkan metode umum Lagrange untuk menentukan harga ekstrimum haruslah terdapat syarat tambahan agar integrasi variasi dari aksi

$$\delta S = \int \sum \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) dt$$

dapat dilakukan, yaitu dengan mengalikan faktor tak tertentu  $\lambda$  (yang bergantung pada koordinat) ruas kanan pers. [38.4] sehingga diperoleh harga integral sama dengan nol. Dalam hal ini semua variasi  $\delta q_i$  dapat dilihat tidak bergantung pada persamaan sebagai berikut

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} c_{\alpha i} \quad (38.5)$$

Bersama-sama dengan persamaan ketergantungan pers [38.2] dapat dibentuk sistem persamaan sempurna dengan besaran-besaran yang tidak diketahui  $q_i$  dan  $\lambda_{\alpha}$ .

Pada metode yang dikemukakan tidak muncul gaya-gaya reaksi sama sekali; keadaan kontak benda secara keseluruhan diamati melalui persamaan ketergantungan. Terdapat pula metode lain untuk mencari

persamaan gerak benda dalam keadaan kontak, di mana gaya reaksi dinyatakan secara eksplisit. Hal terpenting dari metode ini (mengandung prinsip D'Alembert), bahwa setiap benda yang mengalami kontak ditulis, dalam persamaan

$$\frac{dP}{dt} = \sum f, \quad \frac{dM}{dt} = \sum [r f]. \quad (38.6)$$

dengan gaya  $f$  yang bekerja pada benda termasuk pula gaya reaksi; gaya ini belum diketahui dan akan diperoleh bersama-sama dengan penyelesaian persamaan gerak. Metode ini dapat digunakan baik untuk kasus gerak holonomik maupun nonholonomik.

**Contoh 75:** Dengan pertolongan prinsip D'Alembert tentukan persamaan gerak sebuah bola pejal yang berada dalam pengaruh gaya luar  $F$  dan momen gaya  $K$  menggelinding pada bidang datar.

**Penyelesaian:** Persamaan ketergantungan, pers. [38.3], telah dijelaskan dalam teks. Misalnya, gaya reaksi yang bekerja di titik singgung bola dan bidang datar disimbolkan dengan  $R$  dan tuliskan pers. [38.6], dalam bentuk

$$\mu \frac{dV}{dt} = F + R, \quad (1)$$

$$I \frac{d\Omega}{dt} = K - a [n R] \quad (2)$$

(dalam hal ini patut diperhatikan pula bahwa  $P = \mu V$  dan untuk gasing bola  $M = I\Omega$ ). Tentukan pers. [38.3] terhadap waktu, didapat

$$\dot{V} = a[\dot{\Omega} n],$$

Substitusikan persamaan di atas ke pers. [1], eliminasi  $\Omega$  dengan pertolongan pers. [2] sehingga diperoleh persamaan

$$\frac{1}{\mu} (F + R) = [K n] - a R + a n(n R),$$

dengan gaya reaksi berhubungan dengan  $F$  dan  $K$ . Jika persamaan ini ditulis dalam komponen-komponennya dan substitusikan harga  $I = 2/5\mu a^2$  (lihat contoh 62b pada §32), diperoleh

$$R_x = \frac{5}{7a} \left( F_x + \frac{K_y}{a} \right), \quad R_y = -\frac{5}{7a} K_x - \frac{2}{7} F_y, \quad R_z = -F_z$$

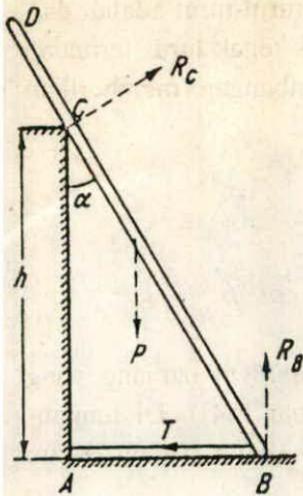
(sebagai bidang  $x - y$  dipilih bidang di mana bola menggelinding). Akhirnya substitusikan persamaan di atas ke pers. [1] dan sebagai persamaan gerak sekarang hanya tinggal diberikan secara eksplisit gaya luar dan momen gaya adalah

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{5}{7\mu} \left( F_x + \frac{K_y}{a} \right), \quad \frac{dV_y}{dt} = \frac{5}{7\mu} \left( F_y + \frac{K_x}{a} \right).$$

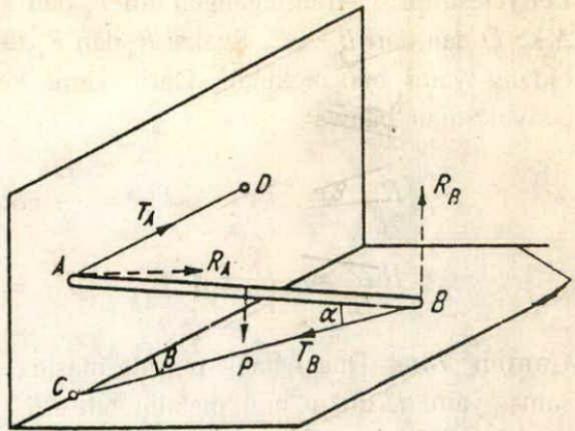
Komponen-komponen kecepatan sudut  $\Omega_x$  dan  $\Omega_y$  akan diperoleh dari syarat pada pers. [38.3] sebagai fungsi dari  $V_x$  dan  $V_y$  dan untuk  $\Omega_z$  didapat

$$\Omega_z = \frac{2}{5} \mu a^2 \frac{d\Omega_z}{dt} = K_z$$

**Contoh 76:** buah batang homogen  $D$  dengan berat  $P$  dan panjang disandarkan pada dinding seperti diilustrasikan gbr. [52] ujung bawahnya itahan erat dengan seutas tali  $AB$ . Tentukan reaksi pada titik tumpu dan tegangan tali.



Gambar 52:



Gambar 53:

yaitu sebagai komponen  $z$  dari pers. [1].

**Penyelesaian :** Berat batang adalah juga gaya yang bekerja di tengah-tengah batang dan mengarah tegak lurus ke bawah. Gaya reaksi  $R_B$  terletak vertikal ke atas, sementara  $R_C$  terletak tegak lurus terhadap batang; tegangan tali  $T$  bekerja dari  $B$  ke  $A$ . Dari persamaan ketegantungan, pers. [38.1], didapat

$$R_C = \frac{Pl}{4h} \sin 2\alpha, \quad R_B = P - R_C \sin \alpha, \quad T = R_C \cos \alpha.$$

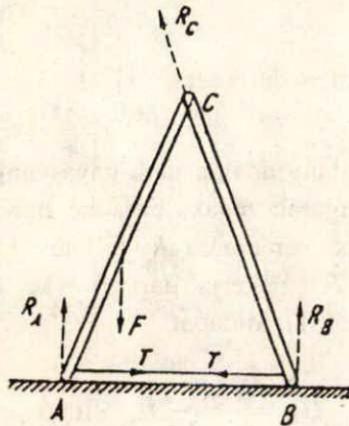
**Contoh 77:** Ujung sebuah batang homogen  $AB$  dengan berat  $P$  berada dalam keadaan kontak dengan bidang datar pada arah horizontal dan vertikal (gambar [53]) dan pada posisi demikian batang ditumpu dengan dua tali, yaitu  $AD$  dan  $BC$  dihubungkan pada bidang vertikal dan batang  $AB$ , sedangkan  $AD$  dengan bidang horizontal. Tentukan gaya reaksi pada titik tumpu batang dan tegangan tali.

**Penyelesaian:** Arah tegangan tali  $T_A$  dan  $T_B$  berturut-turut adalah dari  $A$  ke  $D$  dan dari  $B$  ke  $C$ . Reaksi  $R_A$  dan  $R_B$  terletak tegak lurus terhadap bidang yang bersangkutan. Dari syarat kesetimbangan memberikan penyelesaian bahwa

$$R_B = P, \quad T_B = \frac{P}{2} \cot \alpha,$$

$$R_A = T_B \sin \beta, \quad T_A = T_B \cos \beta.$$

**Contoh 78:** Dua batang masing-masing mempunyai panjang yang sama, yaitu  $l$ , diikat erat melalui tali  $AB$  (gambar [54]). Di tengah-tengah salah satu batang bekerja sebuah gaya  $F$  (berat batang dalam hal ini diabaikan). Tentukan gaya reaksi!



Gambar 54:

**Penyelesaian:** Tegangan tali  $T$  pada titik  $A$  bekerja dari titik  $A$  ke  $B$  dan pada titik  $B$  dari  $B$  ke  $A$ . Gaya-gaya reaksi  $R_A$  dan  $R_B$  di masing-masing titik  $A$  dan  $B$  terletak tegak lurus terhadap bidang datar di mana kedua batang diletakkan. Gaya reaksi yang bekerja pada titik  $C$  digambarkan oleh garis putus-putus dan disimbolkan dengan  $R_C$ ; pada batang  $AC$  bekerja gaya reaksi  $-R_C$ . Syarat bahwa jumlah pada batang haruslah sama dengan nol (syarat kesetimbangan). Maka akan diperoleh bahwa vektor  $R_C$  terletak pada arah  $BC$ . Syarat kesetimbangan lain

untuk masing-masing batang) akan menghasilkan persamaan untuk gaya reaksi dan tegangan, sebagai berikut

$$R_A = \frac{3}{4} F, \quad R_B = \frac{F}{4},$$

$$R_C = \frac{F}{\sin \alpha}, \quad T = \frac{1}{4} F \cot \alpha.$$

### 39. Gerak dalam Sistem Acuan Dipercepat

Pada analisa gerak suatu sistem mekanis sembarang hingga pembahasan di sini selalu digunakan sistem inersial. Hanya dalam sistem inersial, misalnya fungsi Lagrange dari sebuah partikel yang berada di dalam medan luar dinyatakan dalam

$$L_0 = \frac{m v_0^2}{2} - U, \quad (39.1)$$

dan persamaan gerak sesuai dengan persamaan

$$m \frac{dv_0}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial r_0},$$

dalam pembahasan di sini besaran yang berhubungan dengan suatu sistem inersial disimbolkan dengan indeks 0).

Pokok perhatian dalam pembahasan ini adalah mencari persamaan gerak dalam sistem acuan yang mengalami percepatan. Untuk mencari penyelesaian persamaan gerak tersebut akan digunakan prinsip aksi terkecil kembali karena penggunaannya selalu berkenaan dengan pemilihan sistem acuan. Dengan demikian, bentuk persamaan Lagrange dalam tetap berlaku, seperti.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial r}. \quad (39.2)$$

Akan tetapi, fungsi Lagrange tidak lagi seperti yang dinyatakan pada pers. [39.2], tetapi  $L$  harus ditransformasi dari sistem acuan inersia ( $L_0$ ) ke sistem acuan yang baru (sistem acuan dipercepat).

Transformasi dilakukan dalam dua langkah. Lihat suatu sistem acuan  $K'$ , yang bergerak relatif terhadap sistem acuan  $K_0$  dengan kecepatan  $V(t)$ . Kecepatan partikel  $v_0$  dan  $v'$  terhadap sistem acuan  $K$  dan  $K'$  satu sama lain mempunyai hubungan sebagai berikut

$$v_0 = v' + V(t) \quad (39.3)$$

Jika persamaan ini disubstitusikan pers. (39.1), diperoleh fungsi Lagrange dalam sistem acuan  $K'$ .

$$L' = \frac{m v'^2}{2} + m v' V + \frac{m}{2} V^2 - U.$$

$V^2(t)$  adalah suatu fungsi waktu ( $t$ ) yang telah diketahui sebelumnya fungsi ini dapat dinyatakan sebagai turunan total dari suatu fungsi lain sehingga suku ketika pada persamaan ini dapat dihilangkan. Selanjutnya berlaku pula  $v' = dr'/dt$ , yaitu kecepatan partikel di dalam sistem acuan  $K'$ . Maka didapat

$$m V(t) = m V \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} (m V r') - m r' \frac{dV}{dt}.$$

Jika pernyataan di atas disubstitusikan ke fungsi Lagrange dan diabaikan turunan total, diperoleh

$$L' = \frac{m v'^2}{2} - W(t) m r' - U, \quad (39.4)$$

dengan  $W = dV/dt$  yang menyatakan percepatan gerak translasi di dalam sistem acuan  $K'$ .

Persamaan Lagrange yang berhubungan dengan pers. [39.4] adalah

$$m \frac{dv'}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial r} - m W(t), \quad (39.5)$$

Akan dilihat bahwa persamaan gerak partikel dalam sistem acuan dipercepat adalah ekuivalen dengan munculnya suatu medan gaya homogen, dengan gaya yang timbul sama dengan perkalian massa partikel dan percepatan  $\mathbf{W}$ , yang arahnya berlawanan dengan arah  $\mathbf{W}(t)$ .

Misalnya, selain sistem acuan yang terdapat di atas, terdapat pula sistem acuan  $K$  yang mempunyai titik acuan sama dengan sistem acuan  $K'$  dan mengalami rotasi dengan kecepatan sudut sebesar  $\Omega(t)$ . Dalam sistem inersial  $K_0$ , sistem acuan  $K$  mengalami gerak translasi dan rotasi.

Kecepatan  $\mathbf{v}'$  dari partikel di dalam sistem  $K'$  mengandung penjumlahan kecepatan gerak translasi  $\mathbf{v}$  dalam sistem  $K$  dan kecepatan rotasi  $[\Omega \mathbf{r}]$  yang juga bersama dengan sistem  $K$ , maka

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + [\Omega \mathbf{r}]$$

(vektor  $\mathbf{r}$  dan  $\mathbf{r}'$  partikel masing-masing terhadap sistem acuan  $K$  dan  $K'$  adalah saling berimpit). Selanjutnya substitusikan persamaan ini ke dalam fungsi Lagrange pada pers.[39.4] dan didapat

$$L = \frac{m v^2}{2} + m [\Omega \mathbf{r}] + \frac{m}{2} [\Omega \mathbf{r}]^2 - m \mathbf{W} \cdot \mathbf{r} - U. \quad (39.6)$$

Pers [39.6] adalah bentuk umum fungsi Lagrange untuk sistem acuan yang mengalami percepatan sembarang. Perlu dicatat bahwa dengan merosoti sistem acuan menyebabkan timbulnya suatu suku berbentuk khusus di dalam fungsi Lagrange, yaitu suatu suku kecepatan partikel menjadi linier.

Untuk menghitung turunan-turunan dari fungsi-fungsi yang terdapat di dalam fungsi Lagrange, buat turunan total fungsi, tersebut sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 dL &= m \mathbf{v} d\mathbf{v} + m d\mathbf{v} [\Omega \mathbf{r}] + m \mathbf{v} [\Omega d\mathbf{r}] + m [\Omega \mathbf{r}] [\Omega d\mathbf{r}] \\
 &\quad - m W d\mathbf{r} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} \\
 &= m \mathbf{v} d\mathbf{v} + m d\mathbf{v} [\Omega \mathbf{r}] + m d\mathbf{r} [v \Omega] \\
 &\quad + m [[\Omega \mathbf{r}] \Omega] d\mathbf{r} - m W d\mathbf{r} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r}
 \end{aligned}$$

dengan menambah suku  $d\mathbf{n}$  dan  $d\mathbf{r}$ , diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} &= m \mathbf{v} + m [\Omega \mathbf{r}], \\
 \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} &= m [v \Omega] m [[\Omega \mathbf{r}] \Omega] - m W - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.
 \end{aligned}$$

Kemudian substitusikan persamaan ini ke pers. [39.2] maka didapat persamaan gerak yang dicari, yaitu

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} - m W + m [r \dot{\Omega}] + 2m [v \Omega] + m [[\Omega \mathbf{r}] \Omega]. \quad (39.7)$$

Terlihat bahwa gaya "kelembaman", yang timbul karena rotasi sistem acuan, terdiri dari tiga bagian (suku). Gaya  $m (\mathbf{r}\Omega)$  muncul akibat adanya rotasi yang tidak beraturan, sementara dua gaya lainnya juga muncul karena rotasi beraturan. Suku  $2m [v\Omega]$  disebut *gaya koriolis*; kebalikan dengan yang telah dibahas sebelumnya (gaya tidak dissipatif) gaya-gaya ini bergantung pada kecepatan partikel. Suku  $m [\Omega[r\Omega]]$  disebut sebagai *gaya sentrifugal*. Gaya ini bekerja pada bidang, melalui vektor  $\mathbf{r}$ , tegak lurus terhadap yang dilalui sumbu rotasi (yaitu tegak lurus  $\Omega$ ); besarnya adalah sama dengan  $m g \Omega^2$ , dengan  $g$  adalah jarak tegak lurus partikel terhadap sumbu rotasi.

Sekarang perhatikan kasus gerak rotasi beraturan suatu sistem

koordinat acuan tanpa percepatan translasi. Jika pada pers. [39.6] dan [39.7] dibuat  $W = \text{konstan}$  dan  $W_0 = 0$ , diperoleh fungsi Lagrange sebagai berikut :

$$L = \frac{m dv}{dt} + m v [\Omega r] + \frac{m}{2} [\Omega r]^2 - U \quad (39.8)$$

dan persamaan gerak

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial r} + 2 m [v \Omega] + [\Omega [r \Omega]]. \quad (39.9)$$

Untuk menghitung energi total sistem, dalam kasus ini, pertama-tama perlu mencari:

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = m v + m [\Omega r] \quad (39.10)$$

dan gantikan  $E = p v - L$ , sehingga diperoleh

$$E = \frac{m v^2}{2} - \frac{m}{2} [\Omega r]^2 + U. \quad (39.11)$$

Perlu dicatat bahwa di dalam rumusan energi di atas tidak muncul suku yang mengandung kecepatan linier. Rotasi sistem acuan menimbulkan suku tambahan dalam rumusan energi, yang hanya bergantung pada koordinat partikel dan sebanding dengan kecepatan sudut. Energi potensial tambahan adalah  $-m/2[\Omega r]^2$  disebut sebagai *energi entrifugal*.

Kecepatan partikel  $v$  dalam sistem acuan yang mengalami rotasi seragam mempunyai hubungan dengan kecepatan sistem acuan inersial  $v_0$ , sebagai berikut:

$$v_0 = v + [\Omega r]. \quad (39.12)$$

Oleh karena itu, momentum partikel  $p$  dalam sistem acuan  $K$ , berdasarkan pers. [39.10], akan sama atau berimpit dengan momentum  $p_0 = m v_0$ .

dari sistem acuan inersial ( $K_0$ ). Secara bersamaan momentum anglar  $M_0 = [r_p \Omega]$  dan  $M = [r\Omega]$  akan mempunyai harga yang sama. Sebaliknya energi partikel untuk sistem acuan  $K$  dan  $K_0$  mempunyai harga berbeda. Jika  $n$  dari pers. [39.12] disubstitusikan ke pers. [39.11], didapat persamaan energi sebagai berikut

$$E = \frac{m v_0^2}{2} - m v_0 [\Omega r] + U = \frac{m v_0^2}{2} + U - m v_0 [r v_0] \Omega.$$

Kedua suku pertama pada persamaan di atas menyatakan energi  $E_0$  dalam sistem  $K_0$ . Dengan mengubah suku terakhir,  $M = [r v_0]$  sebagai momentum angular partikel maka pernyataan energi dirumuskan kembali menjadi:

$$E = E_0 - M\Omega. \quad (39.13)$$

Pers. [39.13] merupakan persamaan transformasi energi dari suatu sistem acuan ke sistem acuan yang mengalami rotasi beraturan. Dalam hal ini hanya dilakukan penurunan untuk satu partikel. Akan tetapi untuk sistem yang mengandung sejumlah partikel pers. [39.13] tetap digunakan.

**Contoh 79:** Hitung pebelokan partikel yang jatuh bebas pada arah vertikal dari atas permukaan bumi yang mengalami gerak rotasi (kecepatan rotasi bumi dianggap kecil).

**Penyelesaian:** Di dalam medan gaya berat  $U = -m g g$ , dengan  $g$  sebagai vektor percepatan gravitasi; dengan mengabaikan gaya sentrifugal pada pers. (39.9) yang mengandung kuadrat  $\Omega$  maka diperoleh persamaan gerak, sebagai berikut

$$\dot{v} = 2[v\Omega] + g. \quad (1)$$

Penyelesaian pers [1] dilakukan dengan menggunakan metode pendekatan suksesif. Untuk keperluan ini substitusikan  $v = v_1 + v_2$  dengan  $v_1$  merupakan solusi dari persamaan  $v_1 = g$  atau mempunyai solusi sebagai  $v_1 = g t + v_0$  ( $v_0$  adalah kecepatan awal). Jika  $v = v_1 + v_2$  disubstitusikan ke pers. [1] dan pada ruas kanan hanya diperhatikan

suku  $v$  (menggantikan  $v_1$  dalam persamaan yang telah diselesaikan), diperoleh persamaan gerak untuk  $v_2$ , sebagai berikut

$$v_2 = 2 [v_1 \Omega] = 2t [g \Omega] + 2 [v_0 \Omega]$$

Dengan mengintegrasikan persamaan di atas, diperoleh

$$r = h + v_0 t + \frac{g t^2}{2} + \frac{t^3}{3} [g \Omega] + t^2 [v_0 \Omega]. \quad (2)$$

dengan  $h$  melukiskan vektor posisi awal dari partikel.

Pilihan sumbu  $z$  sebagai sumbu vertikal dan sumbu  $x$  adalah arah meridian ke kutub, maka berlaku

$$g_x = g_y = 0, \quad g_z = -g.$$

$$\Omega_x = \Omega \cos \lambda, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = \Omega \sin \lambda;$$

$\lambda$  adalah sudut lintang (dianggap sudut lintang agak sedikit ke arah utara). Jika pada pers. [2] disubstitusikan harga  $v_0 = 0$ , didapat

$$x = 0, \quad y = -\frac{t^3}{3} g \Omega \cos \lambda.$$

(tanda negatif pada  $y$  sesuai dengan penyimpangan partikel ke arah selatan).

**Contoh 80:** Hitung pembelokan partikel yang dilemparkan ke udara dari suatu bidang datar dengan kecepatan awal  $v_0$  !

**Penyelesaian:** Bidang  $x - y$  dipilih, di mana kecepatan  $v_0$  terdapat padanya. Misalkan, ketinggian awal  $h = 0$ . Untuk pembelokan menyamping dapat diperoleh dari pers. [1] contoh .79)

$$y = -\frac{t^3}{3} g \Omega_x + t^3 (\Omega_x c_{0z} - \Omega_z c_{0x})$$

atau dengan mensubstitusikan waktu di mana partikel mengudara (waktu terbang)  $t \approx 2v_{0z}g$ .

$$y \approx -\frac{4v_{0z}^2}{g^2} \left( \frac{1}{3} v_{0z} \Omega_z = v_{0z} \Omega_z \right).$$

**Contoh 81:** Hitung penyimpangan getaran kecil suatu bandul aksi rotasi bumi (disebut sebagai bandul Foucault) !

**Penyelesaian:** Jika amplitudo getaran vertikal dari bandul dianggap kecil karena merupakan besaran turunan kedua, dapat diasumsikan bahwa bandul hanya mengalami getaran pada bidang horizontal, yaitu  $x = y$ . Kemudian hilangkan pula suku yang mengandung  $\Omega^2$  (dianggap kecepatan rotasi bumi kecil) sehingga diperoleh persamaan gerak sebagai berikut

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\Omega_z \dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = -2\Omega_z \dot{x},$$

dengan  $\omega$  adalah frekuensi getaran bandul tanpa memperhatikan rotasi bumi. Multiplikasi persamaan kedua dengan  $i$ , kemudian tambahkan dengan persamaan pertama sehingga diperoleh hanya satu persamaan berikut

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega_z \dot{\xi} + \omega^2 \xi = 0$$

dengan  $\xi = x + iy$  sebagai variabel kompleks. Untuk kasus  $\Omega_z \ll \omega$ , penyelesaian persamaan di atas menjadi

$$\xi \approx e^{i\Omega_z t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t})$$

atau

$$x + iy \approx e^{i\Omega_z t} (x_0 + iy_0),$$

dengan fungsi  $x_0(t)$  dan  $y_0(t)$  adalah lintasan bandul tanpa memandang rotasi bumi. Selanjutnya dapat disimpulkan bahwa rotasi bumi menyebabkan lintasan bandul mengalami rotasi terhadap sumbu vertikal dengan kecepatan sudut sebesar  $\Omega_z$ .

## Bab VII

# Persamaan Kanonik

### 40 Persamaan Hamilton

Rumusan persoalan mekanika dengan pertolongan fungsi Lagrange (mencari penurunan persamaan Lagrange) keadaan mekanis dijelaskan dengan menggunakan koordinat dan kecepatan diperumum. Akan tetapi, sayangnya penjelasan demikian bukanlah satu-satunya alternatif yang dapat digunakan. Sederetan keuntungan, khususnya dalam mengamati persoalan-persoalan mekanika, disediakan koordinat dan momentum diperumum dari sistem. Dari hal ini muncul pertanyaan, bagaimana persamaan gerak dapat diperoleh dari formulasi persoalan mekanika yang bersesuaian.

Perubahan dari suatu fungsi total yang tidak bergantung pada variabel menjadi variabel lainnya dapat dilakukan dengan cara transformasi, yang didalam matematika dikenal dengan menggunakan transformasi Legendre. Untuk kasus ini berarti pula. Turunan total fungsi Lagrange sebagai fungsi koordinat dan kecepatan adalah

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i$$

Pernyataan di atas dapat ditulis dalam bentuk

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i \quad (40.1)$$

dengan turunan  $\partial L/\partial \dot{q}_i$  berdasarkan definisi sama dengan momentum diperumum  $p_i$  karena persamaan Lagrange berlaku  $\partial L/\partial \dot{q}_i = p_i$

Selanjutnya rumuskan kembali suku kedua pers. [40.1], menjadi:

$$\sum p_i d\dot{q}_i = d \left( \sum p_i \dot{q}_i \right) - \sum \dot{q}_i p_i$$

dan ubah turunan total  $d(\sum p_i \dot{q}_i)$  pada ruas kiri persamaan dan pertukarkan semua tanda maka pers. [40,1], diperoleh

$$d \left( \sum p_i \dot{q}_i - L \right) = - \sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i$$

Besaran yang diberi tanda turunan menyatakan energi sistem (lihat §6); Dinyatakan dalam koordinat dan momentum disebut *persamaan Hamilton* dari sistem, yaitu

$$H(p, q, t) = \sum p_i \dot{q}_i - L, \quad (40.2)$$

Dari relasi

$$dH = - \sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i \quad (40.3)$$

antara turunan, di mana koordinat dan momentum dianggap tidak saling bergantung pada satu sama lain, diperoleh relasi

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (40.4)$$

Persamaan di atas merupakan persamaan gerak dalam variabel  $p$  dan  $q$ ; disebut sebagai persamaan Hamilton dan akan membentuk  $2s$  persamaan diferensial orde pertama untuk  $2s$  fungsi  $p(t)$  dan  $q(t)$  yang belum diketahui ( $s$  adalah jumlah derajat kebebasan). Karena sifat persamaan yang lebih sederhana dan mempunyai sifat simetri, persamaan ini disebut pula sebagai *persamaan kanonik*.

Turunan total terhadap waktu dari fungsi Hamilton adalah

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i.$$

Dengan mensubstitusikan  $q_i$  dan  $p_i$  dari pers [40-,4] maka turunan total fungsi Hamilton (disebut Hamiltonian) terhadap waktu dapat ditulis kembali, menjadi

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (40.5)$$

Jika Hamiltonian tidak bergantung pada waktu secara eksplisit,  $dH/dt = 0$ , dan diperoleh kembali pengertian hukum kekekalan energi yang telah diketahui.

Di samping variabel dinamis  $q$ ,  $q$  dan  $q$ ,  $p$  fungsi Lagrange dan Hamilton mempunyai pula parameter lain yang berbeda, yaitu parameter yang mengkarakterkan sistem mekanis itu sendiri atau gaya luar yang bekerja padanya. Misalnya parameter tersebut disimbolkan dengan  $\lambda$ . Jika parameter ini dianggap sebagai variabel, turunan total fungsi Lagrange selain yang dituliskan pada pers. [40,1] dapat pula mempunyai bentuk sebagai berikut.

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda,$$

dengan menggunakan pers [40,2], kemudian diperoleh pula

$$dH = - \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda.$$

Maka diperoleh relasi

$$\left( \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_{p,q} = - \left( \frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)_{\dot{q},q} \quad (40.6)$$

menyatakan hubungan antara turunan parsial fungsi Hamilton dan Lagrange, dinyatakan dalam parameter  $\lambda$  indeks pada turunan menyatakan bahwa turunan dikakukan pada harga  $p$  dan  $q$  konstan dan untuk hubungan lainnya pada harga  $q$  dan  $q$  konstan.

Hasil tersebut dapat pula dinyatakan dalam konteks lain. Andaikan fungsi Lagrange berbentuk  $L = L_0 + L'$ , dengan  $L'$  adalah suku tambahan dari fungsi  $L_0$ . Maka akan terdapat hubungan antara suku tambahan fungsi Hamilton  $H = H_0 + H'$  dan suku tambahan fungsi Lagrange sebagai berikut

$$(H')_{p,q} = -(L')_{q,q} \quad (40.7)$$

Patut pula dicatat bahwa transformasi pada pers. [40,1] ke pers. [40,3] mengandung suku  $dt$ , di mana harus diperhatikan bahwa fungsi Lagrange bergantung pada waktu secara eksplisit, yang dapat penulisan tidak dituliskan, dan dalam pengamatan ini suku tersebut hanya berperan dalam perubahan harga parameter, tetapi tidak mempunyai hubungan sama sekali dengan transformasi. Analog dengan pers. [40,6] turunan parsial dari  $L$  dan  $H$  terhadap waktu, diberikan melalui

$$\left( \frac{\partial H}{\partial t} \right)_{p,q} = - \left( \frac{\partial L}{\partial t} \right)_{\dot{q},q} \quad (40.8)$$

**Contoh 82:** Tentukan fungsi Hamilton untuk tiap titik massa dalam koordinat kartesian, selinder dan bola !

**Penyelesaian :** Dalam koordinat kartesian

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z).$$

Dalam koordinat selinder

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + U(r, \varphi, z).$$

Dalam koordinat bola

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\Theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \Theta} \right) + U(r, \Theta, \varphi).$$

**Contoh 83:** Tentukan fungsi Hamilton sebuah titik massa yang berada di dalam sistem koordinat yang mengalami rotasi beraturan!

**Penyelesaian:** Jika kecepatan  $v$  pada pers. [39.11] yang menyatakan energi diubah dalam momentum  $p$  dengan menggunakan pers [39.10], didapat

$$H = \frac{p^2}{2m} - \Omega [r p] + U.$$

**Contoh 84:** Tentukan fungsi Hamilton suatu sistem yang mengandung partikel bermassa  $M$  dan  $n$  partikel bermassa  $m$  tanpa memandang adanya gaya berat (lihat contoh pada § 13) !

**Penyelesaian:** Energi  $E$  dapat diperoleh dari fungsi Lagrange dari contoh pada § 13 dengan mengubah tanda energi potensial  $U$  (negatif menjadi positif). Momentum diperumum, menjadi

dengan

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial v_a} = m \sum v_a - \frac{m^2}{\mu} \sum_{a'} v_{a'}$$

$$v_a = \frac{p_a}{m} + \frac{1}{M} \sum_{a'} p_{a'}$$

Substitusikan ke  $E$  sehingga didapat persamaan sebagai berikut.

$$H = \frac{1}{2m} \sum_a p_a^2 + \frac{1}{M} \left( \sum_{a'} p_{a'} \right)^2 + U.$$

#### 41 Fungsi Routh

Dalam beberapa kasus seluruh kecepatan diperumum tidak dapat diubah menjadi variabel baru dalam momentum diperumum, tetapi hanya sebagian darinya. Transformasi tersebut adalah analog dengan yang telah dibahas pada bab sebelumnya.

Untuk menyederhanakan persoalan diandaikan bahwa hanya terdapat dua koordinat yang dilambangkan dengan  $q$  dan  $\xi$ ; akan dilakukan transformasi dari koordinat  $q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi}$  ke  $q, \xi, p, \dot{\xi}$ , di mana  $p$  adalah momentum diperumum yang berhubungan dengan koordinat  $q$ .

Turunan fungsi Lagrange  $L(q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi})$  adalah

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi}$$

$$= \dot{p} dq + p d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi},$$

atau dapat ditulis

$$d(L - p\dot{q}) = \dot{p}dq - \dot{q}dp + \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi}.$$

Didefinisikan suatu fungsi yang disebut *fungsi Routh* sebagai berikut

$$R(q, p, \dot{\xi}, \xi) = p\dot{q} - L \quad (41.1)$$

dengan menyatakan kecepatan  $\dot{q}$  dalam momentum  $p$  yang diperoleh dari  $p = \partial L / \partial \dot{q}$ . Diferensial dari  $R$  adalah

$$dR = -\dot{p}dq + \dot{q}dp - \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi}. \quad (41.2)$$

Selanjutnya diperoleh hubungan

$$\dot{q} = \frac{\partial R}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial R}{\partial q}. \quad (41.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = -\frac{\partial R}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}. \quad (41.4)$$

Jika persamaan terakhir disubstitusikan ke persamaan Lagrange, yaitu koordinat  $\xi$ , diiperoleh

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial R}{\partial \xi}. \quad (41.5)$$

Berarti bahwa fungsi Routh adalah sama dengan fungsi Hamilton untuk koordinat  $q$  (pers. [4.13]) dan fungsi Lagrange untuk koordinat  $\xi$  (pers. [14.5]).

Dari definisi umum dari energi suatu sistem maka

$$E = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{\xi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - L = p\dot{q} + \dot{\xi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - L.$$

Dengan mensubstitusikan kembali pers [41.4] ke pers. [41.1] diperoleh pernyataan energi dalam fungsi Raouth, sebagai berikut

$$E = R - \xi \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}. \quad (41.6)$$

Penggunaan rumusan di atas secara umum adalah untuk kasus sistem koordinat.

Penggunaan fungsi Routh, dalam sistem muncul koordinat siklik. Koordinat siklik tidak secara eksplisit baik dalam fungsi Lagrange, maupun fungsi Routh, sehingga akhirnya hanya bergantung pada  $p$ ,  $\xi$ , dan  $\dot{\xi}$ , Momentum  $p$  yang berhubungan dengan koordinat yang bersangkutan adalah konstan (diperoleh dari persamaan kedua pada pers. [41.3], yang dalam pengertian ini tidak memberikan hal baru). Dengan mensubstitusikan momentum  $p$  pada pers. [41.5] melalui harga konstanta yang telah diketahui sebelumnya, maka fungsi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R(p, \xi, \dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial R(p, \xi, \dot{\xi})}{\partial \xi}.$$

hanya mengandung variabel  $\xi$  sehingga koordinat siklik dapat secara lengkap dieliminasi. Jika fungsi ini "lenyap" dan hanya ditemukan fungsi  $\xi(t)$ , setelah  $\xi(t)$  disubstitusikan pada ruas kanan persamaan, diperoleh

$$q = \frac{\partial R(p, \xi, \dot{\xi})}{\partial p},$$

yaitu fungsi  $q(t)$  dapat diperoleh dengan mengintegrasikan secara langsung.

**Contoh 85:** Tentukan fungsi Routh untuk gasing simetri yang terdapat di dalam medan luar  $U(\varphi, \Theta)$  dengan mengeliminasi koordinat siklik  $\psi$  ( $\psi$ ,  $\varphi$ , dan  $\Theta$  adalah sudut-sudut Euler).

**Penyelesaian:** Fungsi Lagrange untuk gasing simetri adalah

$$L = \frac{I_1'}{2} (\dot{\Theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \Theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi}^2 + \dot{\psi} \cos \Theta)^2 - U(\varphi, \Theta).$$

(bandingkan dengan contoh 64 pada §35). Dengan demikian, maka fungsi Routh diperoleh

$$R = p_\psi \dot{\psi} - L = \frac{p_\psi^2}{2I_3} - p_\psi \dot{\psi} \cos \Theta - \frac{I_1'}{2} (\dot{\Theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \Theta) + U(\varphi, \Theta);$$

suku pertama pada persamaan di atas adalah suatu konstanta yang dapat diabaikan.

## 42. Tanda Kurung Poisson

Misalkan  $f(p, q, t)$  adalah suatu fungsi koordinat, momentum dan waktu. Turunan total fungsi ini terhadap waktu adalah

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right).$$

Substitusikan pernyataan untuk  $\dot{q}_k$  dan  $\dot{p}_k$  dari persamaan Hamilton pers. [40.4], sehingga diperoleh

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\}, \quad (42.1)$$

dengan relasi  $\{Hf\}$  didefinisikan

$$\{Hf\} = \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right). \quad (42.2)$$

Pers. [42.2] disebut sebagai *tanda kurung Poisson* untuk variabel  $H$  dan  $f$ .

Fungsi-fungsi yang mengandung variabel dinami yang pada gerak suatu sistem tetap konstan disebut sebagai *integral gerak*. Dari pers. [42.1] dapat dilihat bahwa syarat bahwasanya besaran  $f$  adalah suatu integral gerak adalah ( $df/dt = 0$ ), ditulis dalam bentuk

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{H f\} = 0. \quad (42.3)$$

Jika integral gerak tidak bergantung eksplisit terhadap waktu,

$$\{H f\} = 0 \quad (42.4)$$

berarti bahwa tanda kurung Poisson dari  $f$  dan  $H$  harus sama dengan nol.

Tanda kurung Poisson untuk dua besaran sembarang  $f$  dan  $g$  adalah analog dengan pers. [42.2], yaitu

$$\{f g\} = \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right). \quad (42.5)$$

Tanda kurung Poisson mempunyai sifat yang dari definisinya dapat dengan mudah diturunkan.

Jika kedua fungsi di atas saling dipertukarkan satu sama lain, tanda kurung akan berubah tanda; jika salah satu fungsi sama dengan konstanta  $c$ , tanda kurung akan berharga nol

$$\{f g\} = - \{g f\} \quad (42.6)$$

$$\{f c\} = 0 \quad (42.7)$$

Selanjutnya berlaku pula

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}. \quad (42.8)$$

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2 g\} + f_2 \{f_1 g\}. \quad (42.9)$$

Dengan menurunkan pers. [42.5] secara parsial terhadap waktu diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f \frac{\partial g}{\partial t} \right\}. \quad (42.10)$$

Jika salah satu fungsi  $f$  atau  $g$  merupakan momentum atau koordinat, tanda kurung Poisson akan mengalami reduksi melalui turunan parsial, yaitu

$$\{f q_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}. \quad (42.11)$$

$$\{f p_k\} = \frac{\partial f}{\partial q_k}. \quad (42.12)$$

Pers. [42.11] misalnya didapat pada pers. [42.5] diambil harga  $g = q_k$ ; seluruh penjumlahan semua akan menjadi satu suku karena

$$\frac{\partial q_k}{\partial q_l} = \delta_{kl}$$

dan

$$\frac{\partial q_k}{\partial p_l} = 0.$$

Jika fungsi  $f$  pada pers. [42.11] dan [42.12] diganti dengan  $q_i$  atau  $p_i$  didapat hubungan, sebagai berikut

$$\{q_i q_k\} = 0 \quad \{p_i p_k\} = 0, \quad \{p_i q_k\} = \delta_{ik} \quad (42.13)$$

Antara dua tanda kurung Poisson yang dibentuk oleh tiga fungsi, terdapat hubungan

$$\{f \{g h\}\} + \{g \{h f\}\} + \{h \{f g\}\} = 0; \quad (42.14)$$

relasi ini disebut sebagai *identitas Jacobi*.

Untuk membuktikan pandang hal berikut ini. Dari definisi pada pers. (42.5) tanda kurung Poisson untuk  $\{f g\}$  merupakan fungsi homogen biliner turunan pertama dari  $f$  dan  $g$ . Oleh karena itu, sebagai contoh  $\{h \{f g\}\}$  merupakan turunan kedua dari  $f$  dan  $g$ . Seluruh ruas kiri pers [42.14] merupakan turunan kedua fungsi homogen untuk seluruh fungsi  $f$ ,  $g$ , dan  $h$ . Kemudian kumpulkan semua suku yang mengandung turunan kedua dari  $f$ . Pada tanda kurung pertama tidak terdapat apapun, padanya hanya muncul turunan pertama dari  $f$ . Jumlah tanda kurung kedua dan ketiga ditulis dalam bentuk simbolis dengan mendefinisikan operator linier turunan  $D_1$  dan  $D_2$ , sebagai berikut

$$D_1(\varphi) = \{g\varphi\}, \quad D_2(\varphi) = \{h\varphi\}.$$

Maka didapat hubungan

$$\begin{aligned} \{g \{h f\}\} + \{h \{f g\}\} &= \{g \{h f\}\} - \{h \{g f\}\} \\ &= D_1(D_2(f)) - D_2(D_1(f)) \\ &= (D_1 D_2 - D_2 D_1) f. \end{aligned}$$

Dalam hal ini mudah dilihat bahwa kombinasi operator diferensial linier tidak dapat mengandung turunan kedua dari  $f$ . Oleh karena itu, operator diferensial linier ini mempunyai bentuk umum, sebagai berikut

$$D_1 = \sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad D_2 = \sum_k \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

dengan  $\xi_k$  dan  $\eta_k$  adalah fungsi sembarang dari variabel  $x_1, x_2, x_3$ . Dengan demikian, maka

$$D_1 D_2 = \sum_{k,l} \xi_k \eta_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k,l} \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

$$D_2 D_1 = \sum_{k,l} \eta_k \xi_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k,l} \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

dan selisih dari kedua perkalian operator di atas memberikan hasil sebagai berikut

$$D_1 D_2 - D_2 D_1 = \sum_{k,l} \left( \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_l}$$

merupakan operator yang hanya mengandung turunan pertama. Hal ini berarti bahwa turunan kedua dari  $f$  pada ruas kiri pers. [42.14] akan saling menghilangkan. Tentunya hal yang sama juga berlaku untuk fungsi  $g$  dan  $h$ , yaitu semua pertanyaannya adalah sama dengan nol.

Suatu sifat tanda kurung Poisson yang penting adalah, tanda kurung dibentuk dari dua integral gerak  $f$  dan  $g$ , sebagai hasilnya akan diperoleh kembali integral gerak, yaitu

$$\{f g\} = \text{konstan.} \quad (42.15)$$

Pers. [42.15] disebut sebagai *teorema Poisson*.

Pembuktian teorema ini adalah amat sederhana jika dua fungsi  $f$  dan  $g$  bukan merupakan suatu fungsi terhadap waktu secara eksplisit. Jika dimisalkan identitas Jacobi  $h = F$ , diperoleh

$$\{H \{f g\}\} + \{f \{g H\}\} + \{g \{H f\}\} = 0$$

Dalam hal ini terlihat bahwa dari pembuktian sebelumnya  $\{h f\} = 0$  menyebabkan  $\{H \{f g\}\} = 0$ .

Jika integral gerak  $f$  dan  $g$  bergantung pada waktu secara eksplisit, berdasarkan pers. [42.1] ditulis

$$\frac{d}{dt} \{f g\} = \frac{\partial}{\partial t} \{f g\} + \{H \{f g\}\}.$$

Dengan rumusan pada pers [42.10] dengan mensubstitusikan tanda kurung  $\{H \{f g\}\}$  melalui dua identitas Jacobi yang berbeda, diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{f g\} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} g \right\} + \left\{ f \frac{\partial g}{\partial t} \right\} - \{f \{g H\}\} - \{g \{g f\}\} \\ &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \{H f\}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{H g\} \right\} \end{aligned}$$

atau

$$\frac{d}{dt} \{f g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} g \right\} + \left\{ f \frac{\partial g}{\partial t} \right\},$$

dari hasil ini dapat dibuktikan teorema Poisson berlaku untuk kasus umum.

Penggunaan teorem Poisson tentunya tidak selalu akan menimbulkan integral gerak yang baru karena jumlahnya yang terbatas (terdapat sebanyak  $2s - 1$  macam, dengan  $s$  adalah derajat kebebasan). Dalam beberapa hal teorema ini dapat pula menghasilkan hasil yang trivial sehingga menyebabkan tanda kurung Poisson menjadi konstanta. Untuk kasus lainnya dapat ditunjukkan bahwa integral gerak yang baru sebagai fungsi dari integral peralihan dari  $f$  ke  $g$ . Jika kasus tidak sesuai dengan salah satu dari kasus yang disebutkan di atas, tanda kurung Poisson akan memberikan integral gerak yang baru.

**Contoh 86:** Tentukan tanda kurung Poisson yang dibentuk dari momentum  $p$  dan momentum angular  $M = [r p]$  dalam koordinat kartesian.

**Penyelesaian:** Dengan pertolongan pers. [42.12] didapat

$$\{M_x p_y\} = -\frac{\partial M_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (y p_z - z p_y) = p_z$$

analog dengan perhitungan di atas diperoleh pula

$$\{M_x p_x\} = 0, \quad \{M_x p_z\} = p_y$$

Tanda kurung untuk besaran momentum anular dan momentum lainnya dapat dicari melalui penukaran indeks  $x, y, z$ .

**Contoh 87:** Tentukan tanda kurung Poisson yang dibentuk dari komponen momenutm angular  $\mathbf{M}$  (dalam koordinat kartesian).

**Penyelesaian:** Perhitungan langsung dari pers. [42.5] menghasilkan

$$\{M_x M_y\} = -M_z, \quad \{M_y M_z\} = -M_x, \quad \{M_z M_x\} = -M_y.$$

Dalam hal ini momentum dan koordinat dari partikel berbeda yang merupakan variabel independen satu sama lain, dapat dengan mudah diperoleh dengan memperhatikan persamaan yang didapat dari contoh 86 dan 87; rumusan tersebut juga berlaku untuk momentum total dan momentum angular total dari partikel sembarang.

**Contoh 88:** Tunjukkan bahwa berlaku hubungan

$$\{\phi M_x\} = 0.$$

$\phi$  adalah fungsi skalar sembarang dari koordinat dan momentum partikel.

**Penyelesaian:** Suatu fungsi skalar dari vektor  $\mathbf{r}$  dan  $\mathbf{p}$  hanya bergantung pada kombinasi  $r^2, p^2, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$ . Oleh karena itu, berlaku

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial (r)^2} 2r + \frac{\partial \varphi}{\partial (pr)} p$$

demikian pula untuk  $\partial \varphi / \partial p$ . Relasi yang dicari dapat dihitung langsung dari pers. [42.5] dengan memperhatikan aturan diferensial yang ada.

**Contoh 89:** Tunjukkan bahwa berlaku hubungan

$$\{f, M_z\} = \{fn\}$$

dengan  $f$  adalah suatu fungsi koordinat dan momentum partikel dan  $n$  menggambarkan vektor satuan pada arah  $z$ .

**Penyelesaian:** Vektor sembarang  $f(r, p)$  dapat ditulis dalam bentuk

$$f = r \varphi_1 + p \varphi_2 + [r p] \varphi_3$$

dengan  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , dan  $\varphi_3$  adalah fungsi skalar. Relasi yang dicari dapat dihitung langsung dari pers. [42.9], [42.11], [42.12], dan diverifikasi dengan menggunakan persamaan pada contoh 88.

### 43. Aksi Sebagai Fungsi Koordinat

Pada formulasi prinsip aksi terkecil telah diketahui integral indeks

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (43.1)$$

yang menyatakan integral sepanjang dua lintasan  $q^{(1)}$  dan  $q^{(2)}$  yang dilalui sistem dalam interval waktu  $t_1$  dan  $t_2$ . Pada variasi aksi harga integral di atas untuk lintasan yang bertetangga dibandingkan dengan satu harga  $q(t_1)$  dan  $q(t_2)$ . Hanya salah satu dari lintasan ini yang sesuai dengan gerak sebenarnya, yaitu lintasan yang mempunyai harga integral  $S$  berharga minimum.

Akan dibahas pengertian aksi dalam sudut pandang berbeda. Yaitu  $S$  dipandang sebagai suatu besaran, yang mengkarakterkan lintasan gerak sebenarnya dan dengan membandingkan harga lintasan yang mempunyai syarat batas yang sama, yaitu  $q(t_1) = q^{(1)}$ . Akan tetapi, mempunyai posisi akhir yang berbeda pada waktu  $t_2$ . Dengan perkataan lain, integral, yaitu batas integrasi yang telah diberikan di atas.

Perubahan aksi dalam peralihan dari suatu lintasan ke lintasan tetangganya (lintasan berdekatan) dapat dinyatakan menurut pers. [2.5] adalah (misalnya untuk kasus satu derajat kebebasan)

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial t} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt.$$

Dalam hal ini lintasan sebenarnya dari gerak adalah memenuhi persamaan Lagrange, sehingga integral yang muncul akan sama dengan nol. Pada suku pertama dianggap bahwa batas bawah  $\delta q(t_1) = 0$  dan tuliskan harga  $\delta q(t) = 0$  dan tuliskan harga  $\delta q(t_2)$  hanya sebagai  $\delta q$ . Selanjutnya substitusikan  $\partial L / \partial \dot{q}$  dengan  $p$  maka akhirnya didapat  $\delta S = p \delta q$ ; untuk kasus lebih umum dengan beberapa derajat kebebasan berlaku

$$\delta S = \sum_i p_i \delta q_i. \quad (43.2)$$

Dari relasi ini diketahui bahwa turunan parsial aksi terhadap koordinat adalah sama dengan momentumnya

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \quad (43.3)$$

Analog di atas, aksi dapat pula secara eksplisit sebagai fungsi waktu jika diperhatikan lintasan yang pada saat awal  $t_1$  bermula pada posisi  $q^{(1)}$  dan berakhir pada  $q^{(2)}$  pada saat akhir  $t_2 = t$ . Untuk kasus demikian turunan parsial  $\partial S / \partial t$  dapat dicari dari variasi integral. Secara sederhana turunan parsial tersebut dapat dicari dengan menggunakan pers [43.3] dan gunakan tata cara berikut:

Berdasarkan definisi aksi diketahui bahwa turunan totalnya sepanjang lintasan adalah

$$\frac{dS}{dt} = L. \quad (43.1)$$

Jika  $S$  sebagai fungsi koordinat dan waktu, dengan mengambil tolak ukur penjelasan di atas dan menggunakan pers. [43.3], turunan total  $S$  menjadi

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i.$$

Bandingkan kedua rumusan di atas maka didapat relasi

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i$$

dan akhirnya dapat pula disimpulkan bahwa

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H. \quad (43.5)$$

Pers. [43.3] dan [43.5] dapat disimpulkan dalam satu rumusan, yaitu:

$$dS = \sum_i p_i \dot{q}_i - H dt \quad (43.6)$$

yang tidak lain merupakan turunan total aksi fungsi koordinat dan waktu dengan batas integrasi seperti diberikan pada pers. [43.1]. Selanjutnya diandaikan bahwa tidak hanya koordinat (dan waktu) akhir yang dianggap sebagai variabel, tetapi juga koordinat (dan waktu) awal. Dengan demikian, rumusan pada pers. [43.6] dapat diberikan sekali lagi dalam bentuk perbedaan antara dua batas integral yang bersangkutan.

$$dS = \sum_i p_i^{(2)} \dot{q}_i^{(2)} dt^{(2)} - H^{(2)} dt^{(2)} - \sum_i p_i^{(1)} \dot{q}_i^{(1)} dt^{(1)} - H^{(1)} dt^{(1)}. \quad (13.7)$$

Relasi di atas sekaligus menunjukkan bahwa keadaan akhir sistem bukan merupakan fungsi sembarang dari keadaan awalnya; misalnya dalam keadaan bergerak sistem dipengaruhi oleh pengaruh luar; hanya gerak demikian yang mungkin terjadi, yaitu gerak yang dinyatakan oleh turunan total aksi pada ruas kanan pers. [43.7]. Dengan demikian, maka seluruh gerak sistem telah dapat diselesaikan dengan hanya menggunakan prinsip aksi terkecil, tanpa harus mempersoalkannya dengan fungsi Lagrange. Sebagai contoh misalnya dapat dibuat sederetan aturan umum (tanpa memandang adanya gaya luar) untuk membahas sejumlah partikel yang dipancarkan dari satu titik di dalam ruang. Pembahasan aturan demikian merupakan dasar dari optika geometri.

Hal yang menarik perhatian di sini adalah secara formal persamaan Hamilton dapat diturunkan dari prinsip aksi terkecil, yaitu jika pers. [43.6] dituliskan dalam bentuk integral sebagai berikut

$$S = \int \left( \sum_i p_i \dot{q}_i - H dt \right). \quad (13.8)$$

dan koordinat dan momentum dianggap sebagai variabel yang saling independen. Dengan cara sederhana dan singkat penurunan ini dapat dibahas dengan mengandaikan bahwa secara keseluruhan terdapat hanya koordinat dan momentum. Maka variasi aksi menjadi

$$\delta S = \int \left\{ \delta p dq + dp \delta q - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q dt - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p dt \right\},$$

dan ubah suku kedua (dengan mengintegrasikannya secara parsial) sehingga didapat

$$\delta S = \int \delta p \left( dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt \right) + p \delta q \Big| - \int \delta q \left( dp + \frac{\partial H}{\partial q} dt \right).$$

Pada batas integrasi harga  $\delta q = 0$  sehingga suku yang mengandung integral dapat dihilangkan. Suku-suku lainnya hanya dapat berharga nol untuk harga  $\delta p$  dan  $\delta q$  sembarang melalui syarat tertentu, yaitu apabila kedua integral menjadi nol sehingga diperoleh relasi

$$dq = \frac{\partial H}{\partial p} dt, \quad dp = -\frac{\partial H}{\partial q} dt.$$

berarti bahwa persamaan Hamilton akan diperoleh dengan membagi ruas kiri dengan  $dt$ .

#### 44. Prinsip Maupertius

Melalui prinsip aksi terkecil gerak sistem mekanis dapat ditentukan dengan sempurna karena melalui penyelesaian yang didasari prinsip ini, persamaan gerak dapat dinyatakan baik dalam bentuk lintasan, maupun waktu di mana titik-titik yang menyatakan keadaan sistem setiap saat "berjalan".

Jika yang menjadi pokok perhatian hanya bentuk dari lintasan (trayektori), bagian yang mengandung waktu dari persoalan, prinsip aksi terkecil dapat dirumuskan lebih sederhana lagi.

Diasumsikan bahwa fungsi Lagrange dan Hamilton sistem tidak mengandung waktu secara eksplisit sehingga energi sistem merupakan besaran yang kekal:  $H(p, q) = E = \text{konstan}$ .

Berdasarkan prinsip aksi terkecil, variasi aksi yang diberikan melalui koordinat awal dan akhir, demikian juga dengan waktu awal dan akhir ( $t_0$  dan  $t$ ) sama dengan nol. Jika waktu akhir  $t$  divariasikan koordinat awal dan akhir dapat ditentukan, diperoleh bahwa (lihat pers. [43.3])

$$\delta S = -H \delta t. \quad (44.1)$$

Selanjutnya tidak dilakukan perbandingan lintasan dari gerak virtual sistem, tetapi hanya lintasan yang memenuhi hukum kekekalan energi. Untuk lintasan demikian,  $H$  pada pers. [44.1] dapat ditambahkan dengan konstanta  $E$ , yaitu

$$\delta S + E\delta t = 0. \quad (44.2)$$

Jika aksi ditulis dalam bentuk seperti pada pers [43.8] dan fungsi  $H$  diganti dengan konstanta  $E$ , akan didapat persamaan sebagai berikut

$$S = \int_i -p_i dq_i - E(t - t_0). \quad (44.3)$$

Suku pertama persamaan di atas sama dengan

$$S_0 = \int p_i dq_i \quad (44.4)$$

kadang-kadang disebut sebagai *aksi tersingkat*. Substitusikan pers.[44.3] ke [44.2], maka diperoleh

$$\delta S_0 = 0 \quad (44.5)$$

Aksi tersingkat mempunyai minimum untuk semua lintasan yang memenuhi hukum kekekalan energi dan dalam waktu sembarang akan melalui titik akhir. Untuk merumuskan prinsip variasi demikian, seluruh momentum yang terdapat pada pers. [44.4] harus dinyatakan dalam  $q$  dan  $dq$ . Untuk itu didefinisikan persamaan

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L \left( q, \frac{dq}{dt} \right); \quad (44.6)$$

yaitu sebagai momentum dan gunakan kekekalan energi

$$E \left( q, \frac{dq}{dt} \right) = E. \quad (44.7)$$

Jika pada rumusan terakhir  $dt$  dinyatakan sebagai fungsi dari koordinat  $q$  dan gunakan turunan  $dq$ , kemudian substitusikan ke pers. [44.6], akan diperoleh pernyataan momentum  $p$  dalam  $q$  dan  $dq$ , di mana energi  $E$  berperan hanya sebagai parameter. Prinsip variasi yang dirumuskan demikian, menentukan lintasan sistem; prinsip ini sering disebut sebagai *prinsip Maupertius* (walaupun formulasi yang dikemukakannya berasal dari rumusan Euler dan Lagrange).

Fungsi Lagrange biasanya mempunyai bentuk seperti diberikan pada pers. [5.5], yaitu

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q),$$

mengandung perbedaan energi kinetik dan potensial. Selanjutnya akan dibahas kasus di atas secara eksplisit. Dalam hal ini untuk momentum berlaku

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k a_{ik}(q) \dot{q}_k$$

dan untuk energi

$$E = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k + U(q).$$

Dari persamaan terakhir didapat bahwa

$$dt = \sqrt{\frac{\sum a_{ik} dq_i dq_k}{2(E - U)}} \quad (44.8)$$

dan disubstitusikan pada persamaan

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{dq_k}{dt} dq_i$$

diperoleh aksi tersingkat dalam bentuk

$$S_0 = \int \sqrt{2(E - U) \sum_{i,k} a_{ik} dq_i dq_k} \quad (44.9)$$

sebuah titik masa, misalnya mempunyai energi kinetik

$$T = \frac{m}{2} \left( \frac{dl}{dt} \right)^2$$

dengan  $m$  adalah massa partikel dan  $dl$  adalah elemen lintasannya), dan prinsip variasi untuk menentukan bentuk lintasan partikel adalah

$$\delta \int \sqrt{2(E - U)} dt = 0, \quad (44.10)$$

dengan integral antara dua titik yang diketahui di dalam ruang. Bentuk lembaran yang dirumuskan oleh Jacobi.

Pada gerak bebas sebuah partikel harga  $U = 0$  dan pers. [44.10] akan menghasilkan solusi trivial  $\delta \int dl = 0$ , berarti bahwa partikel bergerak dengan lintasan terpendek berbentuk garis lurus.

Kembali ke persamaan aksi pada pers. [44.3] dan buat pula variasi untuk aksi dengan parameter  $E$ .

$$\delta S = \frac{\partial S_0}{\partial E} \delta E - (t - t_0) \delta E - E \delta t$$

Berdasarkan pers. [44.2] selanjutnya didapat bahwa:

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = t - t_0. \quad (44.11)$$

Untuk aksi tersingkat pada pers. [44.9] akan didapat relasi sebagai berikut.

$$\int \sqrt{\frac{\sum a_{ik} d\dot{q}_i d\dot{q}_k}{2(E-U)}} = t - t_0, \quad (44.12)$$

yang tidak lain merupakan integral pada pers. [44.8]. Bersama-sama dengan persamaan lintasan persamaan ini juga turut melengkapi penyelesaian gerak.

**Contoh 90:** Turunkan persamaan diferensial lintasan dari prinsip variasi pada pers. [44.10]!

**Penyelesaian:** Dari prinsip variasi diketahui bahwa

$$\delta \int \sqrt{E-U} dt = - \int \left\{ \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\delta r}{2\sqrt{2(E-U)}} dt - \sqrt{E-U} \frac{dr}{dt} d\delta r \right.$$

Pada suku kedua diamati bahwa  $d^2r = \dot{r}^2$  sehingga  $d\delta r = dr$ ; selanjutnya integrasikan suku ini secara parsial, substitusikan koefisien  $\delta r$  pada integran sama dengan nol maka diperoleh persamaan diferensial

$$2\sqrt{E-U} \frac{d}{dt} \left( \sqrt{E-U} \frac{dr}{dt} \right) = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

Dengan menghitung turunan pada ruas kiri persamaan di atas dan gantikan  $-\partial U/\partial r = F$  maka persamaan di atas dapat dibentuk menjadi

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{F - (Ft)t}{2(E-U)}$$

dengan  $t = dr/dl$ , yaitu sebagai vektor satuan pada arah tangensial lintasan. Selisih  $F - (Ft)t$  memberikan komponen normal gaya terhadap lintasan. Turunan  $d^2e/dl^2 = dt/dl$ , seperti telah diketahui dari geometri turunan adalah sama dengan  $n/R$  dengan  $R$  adalah jari-jari kelengkungan.

dan  $n$  adalah vektor satuan dari vektor normal utama. Jika selanjutnya  $E - U$  digantikan dengan energi kinetik  $mn^2/2$ , didapat

$$\ddot{n} = \frac{m \cdot c^2}{R} = F_n$$

tidak lain sesuai dengan pernyataan yang telah diketahui untuk suatu percepatan normal dari gerak dengan lintasan melengkung.

#### 45. Transformasi Kanonik

Pemilihan koordinat  $q$  dibatasi oleh kondisi terbatas; dapat digunakan  $s$  besaran sembarang yang menentukan posisi sistem di dalam ruang dengan jelas. Bentuk persamaan Lagrange pada pers [2.6] tidak bergantung pada pemilihan ini, hal ini dapat dikatakan bahwa persamaan Lagrange adalah invarian terhadap transformasi dari koordinat  $q_1, q_2, q_3, \dots$  menjadi koordinat sembarang yang baru. Koordinat baru  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q$  adalah fungsi dari koordinat lama  $q$ , di mana terdapat kemungkinan bahwa dalam koordinat yang baru ini dapat saja muncul waktu secara eksplisit. Hal demikian adalah berhubungan dengan transformasi sebagai berikut.

$$Q_i = Q_i(q, t) \quad (45.1)$$

(transformasi seperti ini biasanya disebut sebagai transformasi titik).

Selain persamaan Lagrange, tentunya persamaan Hamilton juga akan tetap tidak berubah karena transformasi pers. [45.1] (invarian). Akan tetapi, untuk kasus persamaan Hamilton terdapat transformasi yang lebih besar dibanding persamaan Lagrange. Hal ini terletak bahwa metode Hamilton diturunkan dengan dasar memperlakukan  $p$  dan  $q$  sebagai besaran yang saling tidak bergantung dan berlaku sama. Oleh karena itu, pengertian transformasi untuk persamaan Hamilton harus ditambahkan, yaitu melakukan transformasi sebanyak 2 besaran, misalnya dari koordinat  $q, p$  ke koordinat  $Q, P$  berdasarkan persamaan

$$Q_i = Q_i(p, q, t) \quad P_i = P_i(p, q, t) \quad (45.2)$$

Penambahan transformasi yang diperbolehkan menggambarkan suatu keuntungan tersendiri dari metode Hamilton di dalam mekanika.

Bentuk kanonik persamaan gerak tidak lagi dapat dipertahankan untuk sembarang bentuk transformasi. Selanjutnya akan diturunkan syarat agar transformasi harus memenuhi persamaan gerak dalam bentuk

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} \quad (45.3)$$

dengan  $H'(P, Q)$  adalah fungsi Hamilton yang baru. Transformasi demikian disebut sebagai *transformasi kanonik*.

Untuk merumuskan transformasi kanonik dapat dilakukan cara sebagai berikut. Pada akhir §43, telah ditunjukkan bahwa persamaan Hamilton dapat diturunkan dari prinsip aksi terkecil, jika bentuk integral;

$$\delta \int \left( \sum_i p_i dq_i - H dt \right) = 0 \quad (45.4)$$

(koordinat dan momentum pada persamaan di atas divariasikan saling tidak bergantung). Agar besaran  $P$  dan  $Q$  memenuhi pula persamaan Hamilton, maka untuk kedua variabel tersebut ( $P$  dan  $Q$ ) harus pula memenuhi prinsip aksi terkecil sebagai berikut

$$\delta \int \left( \sum_i P_i dQ_i - H' dt \right) = 0 \quad (45.5)$$

Kedua prinsip yang dinyatakan pada pers. [45.4] dan [45.5] adalah hanya untuk syarat tertentu menjadi ekuivalen, yaitu masing-masing integral yang terdapat di dalamnya paling tidak haruslah merupakan

turunan total dari suatu fungsi  $F$  terhadap koordinat, momentum dan waktu<sup>1)</sup> karena perbedaan kedua integral adalah nol. Dalam hal ini variasi suatu konstanta (perbedaan dari harga  $E$  pada batas integrasi) akan sama dengan nol. Oleh karena itu berlaku

$$\sum p_i dq_i - H dt = \sum \dot{p}_i dQ_i - H' dt + dF.$$

Setiap transformasi kanonik dikarakteristikan oleh fungsi  $F$  yang disebut sebagai fungsi pembukti transformasi<sup>2)</sup>.

Apabila persamaan terakhir dirumuskan kembali menjadi

$$dF = \int \sum \dot{p}_i dq_i - \sum P_i dQ_i + (H' - H) dt, \quad (45.6)$$

diperoleh

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = \frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}; \quad (45.7)$$

dalam hal ini diandaikan bahwa fungsi pembukti bergantung pada koordinat lama dan baru (juga terhadap waktu tentunya)  $F = F(q, Q, t)$ . Untuk suatu fungsi  $F$ , pers. [45.7] merupakan suatu penghubung antara besaran lama ( $p, q$ ), dan baru ( $P, Q$ ). Selain itu, akan menghasilkan pula fungsi Hamilton yang baru.

Hal penting yang patut diperhatikan adalah apabila fungsi

- 1) Dalam hal ini tidak dibicarakan transformasi trivial  $P_i = a p_i$ ,  $Q_i = q_i$ ,  $H' = a H$ , dengan  $a$  adalah suatu konstanta sembarang dari integran pada pers. [45.4] dan [45.5] hanya dibedakan dengan faktor konstanta  $a$ .
- 2) Fungsi  $F$  disebut pula sebagai fungsi sembarang dalam H. Goldstein *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 1964.

pembukti tidak dinyatakan dalam variabel lama  $q$  dan variabel baru  $Q$ , melainkan oleh variabel lama  $q$  dan variabel baru  $P$ . Untuk menurunkan rumusan transformasi kanonik, dalam hal ini relasi pada pers. [45.6] haruslah dilakukan transformasi Legendre. Untuk itu tulis pers. [45.6] dalam bentuk sebagai berikut:

$$d\left(F - \sum P_i Q_i\right) = \sum_i p_i dq_i + \sum Q_i dP_i + (H' - H) dt.$$

Suku yang mengandung turunan pada ruas kiri adalah sebagai fungsi pembukti yang baru dalam variabel  $q$  dan  $P$ . Misalnya, fungsi tersebut disimbolkan dengan  $\Phi(q, P, t)$  dan diperoleh<sup>3)</sup>:

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (45.8)$$

Dengan cara analog formulasi transformasi kanonik untuk fungsi pembukti tergantung dari  $p$  dan  $Q$  atau  $p$  dan  $P$  dapat pula dirumuskan.

Hal penting yang harus diingat adalah antara fungsi Hamilton baru dan lama terdapat "kandungan" yang sama: Perbedaan antara  $H' - H$  adalah sama dengan turunan fungsi pembukti terhadap waktu. Jika fungsi tersebut bukan merupakan fungsi yang bergantung pada waktu secara eksplisit, akan diperoleh pula bahwa  $H' = H$ . Untuk kasus demikian fungsi Hamilton dapat diperoleh dengan mudah, yaitu hanya

- 3) Patut dicatat bahwa fungsi pembukti dalam bentuk:

$$\Phi = \sum f_i(q, t) P_i$$

( $f_i$  adalah fungsi sembarang) yang digunakan dalam transformasi tersebut mengandung koordinat baru yang diberikan sebagai  $Q_i = f_i(q, t)$ , hanya bergantung pada koordinat lama (tetapi tidak bergantung pada momentum). Transformasi ini disebut sebagai transformasi titik yang tentunya merupakan khusus dari transformasi kanonik.

dengan menukarkan variabel  $q$  dan  $p$  dalam koordinat yang baru  $Q$  dan  $P$ .

Bentuk yang demikian umum dan transformasi kanonik maka dalam metode Hamilton pengertian tentang koordinat diperumum menjadi kabur sama sekali. Oleh karena itu, transformasi yang dituliskan pada pers. [54.2] mengandung pernyataan variabel  $P$  dan  $Q$ , baik sebagai fungsi  $q$  maupun  $p$  variabel  $Q$  dalam hal ini bukan lagi mempunyai arti sebagai koordinat ruang. Perbedaan antara dua kelompok variabel tersebut secara mendasar hanya merupakan persialan nomenklatur. Hal yang lebih jelas, misalnya dalam transformasi  $Q_i = p_i, P_i = -q_i$ <sup>4)</sup> yang tentunya tidak mengandung perubahan sifat kanonik variabel, hanya merupakan perubahan nama dari koordinat menjadi momentum.

Oleh karena itu, pengertian penamaan variabel tidak memberikan arti yang jelas dalam metode Hamilton maka variabel seringkali disebut sebagai *besaran konyugat kanonik*.

Syarat untuk konyugat kanonik dapat dirumuskan secara sederhana dengan menggunakan tanda kurung Poisson. Untuk itu akan dibuktikan terlebih dahulu sifat invarian tanda kurung Poisson terhadap transformasi kanonik.

Diasumsikan  $\{f, g\}_{p,q}$  adalah tanda kurung Poisson untuk variabel  $f$  dan  $g$ , yaitu diturunkan terhadap variabel  $p$  dan  $q$ , misalnya  $\{f, g\}_{p,Q}$  adalah tanda kurung Poisson untuk besaran yang sama, diturunkan terhadap  $P$  dan  $Q$ . Maka berlaku hubungan

$$\{f, g\}_{p,q} = \{f, g\}_{P,Q} \quad (45.9)$$

Kebenaran relasi ini dapat dibuktikan secara langsung dengan menggunakan rumusan transformasi kanonik. Akan tetapi, perhitungan

---

4) Transformasi ini sesuai dengan fungsi pembukti  $F = \sum q_i Q_i$ .

dapat pula dilakukan dengan pertolongan rumusan berikut. Dari pers. [45.7] dan [45.5] diketahui bahwa waktu mempunyai peran penting pada parameter. Jika teorema untuk besaran-besaran yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap waktu [pers. [45.9)] dibuktikan, rumusan akan berlaku pula untuk kasus yang lebih umum. Selanjutnya, misalnya fungsi  $g$  adalah sebagai fungsi Hamilton dari suatu sistem fiktif. Maka berdasarkan pers [42.1]  $\{fg\}_{p,q} = -df/dt$ . Turunan  $df/dt$  hanya bergantung pada sifat gerak sistem fiktif sendiri, tidak tergantung kepada pemilihan variabel. Sehubungan dengan hal ini tanda kurung Poisson  $\{fg\}$  pada perubahan (transformasi) untuk koordinat yang baru tidak akan mengalami perubahan.

Dari pers. [42.13] dan teorema pada pers. [45.9] didapat

$$\{Q_i, Q_k\}_{p,q} = 0, \quad \{P_i, P_k\}_{p,q} = 0, \quad \{P_i, Q_k\}_{p,q} = \delta_{ik}. \quad (45.10)$$

Persamaan ini merupakan syarat yang diperoleh dari tanda kurung Poisson yang harus dipenuhi oleh variabel yang baru, agar transformasi dari  $p, q \longrightarrow P, Q$  adalah kanonik.

Hal yang menarik untuk diperhatikan adalah bahwa besaran-besaran  $p$  dan  $q$  sendiri dapat dipandang sebagai transformasi kanonik dalam suatu peristiwa gerak. Arti dari pengertian ini adalah sebagai berikut, misalnya  $q_t, p_t$  adalah harga-harga variabel kanonik pada saat  $t$  dan  $q_{t+\tau}, p_{t+\tau}$  adalah harga kedua besaran tersebut untuk waktu yang lain,  $t + \tau$ . Harga variabel terakhir adalah sebagai fungsi harga pertama (dan dari ukuran interval sebagai parameter), berarti

$$q_{t+\tau} = q(q_t, p_t, \tau), \quad p_{t+\tau} = p(q_t, p_t, \tau).$$

Jika persamaan di atas dianggap sebagai transformasi dari koordinat  $q_t, p_t$  ke koordinat  $q_{t+\tau}, p_{t+\tau}$ , transformasi ini disebut sebagai transformasi kanonik juga. Pernyataan ini dapat diturunkan dari rumusan  $dS = \sum (p_{t+\tau} dq_{t+\tau} - p_t dq_t)$ , yaitu sebagai turunan dari  $S(q_{t+\tau}, q_t)$  yang dipandang sepanjang trayektori untuk waktu  $t$  dan  $t + \tau$ , melalui titik  $q_t$  dan  $q_{t+\tau}$ .

(lihat pers. [43.7]). Dengan membandingkan rumusan ini dengan pers. [45.6] dapat disimpulkan bahwa  $-S$  merupakan fungsi pembukti dari transformasi.

#### 46. Teorema Lioville

Kepentingan interpretasi geometri dari fenomena mekanis seringkali digunakan istilah *ruang fase*, yaitu suatu ruang dimensi  $2s$ , dinyatakan dalam  $s$  koordinat dan  $s$  momentum diperumum. Setiap titik di dalam ruang ini menggambarkan keadaan mekanis suatu sistem. Setiap gerak di dalam suatu sistem digambarkan oleh sebuah titik sesuai dengan kurva tertentu yang disebut sebagai *lintasan fase*.

Hasil kali turunan koordinat dan momentum diperumum berikut

$$d\Gamma = dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s$$

dapat diandaikan sebagai "elemen volume" ruang fase. Selanjutnya integral  $\int dG$  yang dibatasi oleh suatu daerah di dalam ruang fase adalah menggambarkan kandungan yang terdapat dalamnya. Akan ditunjukkan pula bahwa besaran ini mempunyai sifat invarian terhadap transformasi kanonik. Jika suatu transformasi kanonik dilakukan dari besaran  $p, q$  ke  $P, Q$ , besarnya volume untuk daerah tertentu yang terkandung untuk masing-masing ruang yang dinyatakan oleh  $p, q$  dan  $P, Q$  adalah sama, seperti

$$\int \dots \int dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s = \int \dots \int dQ_1 \dots dQ_s dP_1 \dots dP_s \quad (46.1)$$

Suatu transformasi variabel yang dinyatakan dalam integral jamak dapat dicari melalui rumusan yang telah diketahui, yaitu

$$\int \dots \int dQ_1 \dots dQ_s dP_1 \dots dP_s = \int \dots \int D dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s$$

dengan

$$D = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)} \quad (46.2)$$

yang disebut sebagai determinan fungsional dari transformasi. Oleh karena itu, dari teorema pada pers. [16.1] dapat pula ditunjukkan bahwa determinan fungsional suatu transformasi kanonik sembarang adalah sama dengan 1

$$D = 1 \quad (46.3)$$

Dengan menggunakan sifat determinan fungsional yang diketahui, yaitu dengan memperlakukannya seperti memperlakukan bilangan pecahan "pembagian pembilang dan penyebut" dengan  $\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$ , didapat hubungan

$$D = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)} / \frac{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)}$$

Dari aturan lain yang diketahui, determinan fungsional akan mengalami reduksi dalam "pembilang" dan "penyerbu" maka akan muncul harga yang sama sehingga jumlah variabel menjadi lebih sedikit. Kemudian dengan menurunkan seluruhnya, turunan besaran yang mempunyai harga sama dapat dianggap sebagai konstanta. Oleh karena itu, berlaku relasi

$$D = \left\{ \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s)} \right\}_{P=\text{konst.}} / \left\{ \frac{\partial(p_1, \dots, p_s)}{\partial(P_1, \dots, P_s)} \right\}_{q=\text{konst.}} \quad (46.4)$$

Selanjutnya perhatikan determinan fungsional pada pembilang persamaan ini. Berdasarkan definisi determinan ini mempunyai orde sebanyak  $s$ , terdiri dari elemen  $\partial Q / \partial q_k$  (elemen titik potongan dai baris ke  $i$  dan kolom ke  $k$ ). Bayangkan transformasi kanonik dengan

bertolongan fungsi yang timbul  $\Phi(q, P)$  dalam bentuk pers. [45.8] dan didapat

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial q_k \partial P_i}$$

Dengan cara yang sama diperoleh elemen  $(i, k)$  dari determinan tersebut pada pers [46.4] sama dengan  $\partial^2 \Phi / \partial q_i \partial P_k$ . Berarti bahwa kedua determinan tersebut hanya berbeda dari pertukaran tanda baris dan kolom. Oleh karena itu, keduanya sama sehingga perbandingan yang terdapat pada pers. [46.4] menjadi sama dengan satu.

Selanjutnya perhatikan bahwa setiap titik yang terdapat di dalam daerah tertentu, di dalam ruang fase akan mengalami pergeseran terhadap waktu sesuai dengan persamaan gerak sistem mekanis bersangkutan. Dengan demikian seluruh daerah akan mengalami pergeseran. Akan tetapi, volume tetap tidak berubah, atau

$$\int d\Gamma = \text{konstan} \quad (46.5)$$

Teorema LIOVILLE ini diturunkan secara langsung dari invariansi volume dengan menggunakan transformasi kanonik sehingga perubahan  $p$  dan  $q$  sendiri dapat dipandang sebagai transformasi kanonik pula seperti telah ditunjukkan pada akhir pembahasan §45).

Dengan cara analog seperti di atas dapat pula dibuktikan sifat invarian dari integral berikut

$$\int \int \Sigma dq_i dp_i$$

$$\int \int \int \int \Sigma dq_i dp_i dq_k dp_k$$

.....

yaitu integrasi ruang fase dalam dua, tiga, dan empat, dimensi.

#### 47. Persamaan Diferensial Hamilton-Jacobi

Pada § 43 telah dibahas pengertian aksi sebagai fungsi dari koordinat dan waktu. Telah pula ditunjukkan bahwa turunan partial dari  $S(q, t)$  terhadap waktu mempunyai hubungan dengan fungsi Hamilton sebagai berikut:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, p, t) = 0$$

dan turunan parsialnya terhadap koordinat adalah sama dengan turunan parsialnya terhadap momentum. Jika momentum  $p$  dari fungsi Hamilton dinyatakan dalam turunan  $\partial S/\partial q$ , diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) = 0 \quad (47.1)$$

yang harus memenuhi fungsi  $S(q, t)$ . Persamaan ini adalah persamaan diferensial orde satu dan disebut sebagai *persamaan diferensial Hamilton-Jacobi*.

Selain persamaan Lagrange dan kanonik, persamaan Hamilton-Jacobi juga merupakan dasar metode umum untuk mencari integrasi persamaan gerak sistem mekanis. Untuk membahas lebih lanjut metode ini, perlu diingat kembali bahwa setiap persamaan diferensial orde satu haruslah mempunyai solusi yang bergantung pada suatu fungsi sembarang. Penyelesaian demikian disebut sebagai integral umum persamaan. Dalam penggunaan praktis untuk membahas persoalan mekanik, integral persamaan Hamilton-Jacobi tidak mempunyai peran utama, tetapi apa yang disebut sebagai *integral sempurna*. Dengan demikian, suatu penyelesaian yang dimaksud dari persamaan diferensial dapat terselesaikan, yang justru mengandung sejumlah konstanta dan variabel yang saling independen.

Pada persamaan diferensial Hamilton-Jacobi koordinat dan waktu dianggap sebagai variabel independen. Oleh karena itu, integral sempurna persamaan yang mengandung  $s$  variabel ini juga akan mengandung  $s + 1$  konstanta sembarang. Pada persamaan diferensial hanya terdapat turunan dari fungsi  $S$ , salah satu dari konstanta sembarang dapat ditambahkan atau dengan perkataan lain integral sempurna dari persamaan diferensial Hamilton-Jacobi mempunyai bentuk, sebagai berikut

$$S = f(t, q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s) + A. \quad (47.2)$$

dengan  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ , adalah melambangkan konstanta sembarang<sup>1)</sup>

Selanjutnya akan dijelaskan hubungan antara integral sempurna dari persamaan diferensial Hamilton-Jacobi dan penyelesaian persamaan gerak yang menjadi pokok perhatian. Untuk itu diperkenalkan transformasi kanonik dari besaran  $q$ , dan  $p$  menjadi variabel baru; dengan menganggap  $f(t, q, \alpha)$  sebagai fungsi pembukti dan  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  dipilih sebagai

- 1) Walaupun integral umum dari persamaan diferensial Hamilton-Jacobi tidak diperlukan. Akan tetapi tidak, ada salahnya untuk diketahui dan dicatat bahwa persamaan tersebut dapat diselesaikan jika diketahui integral sempurna. Untuk itu konstanta  $A$  dapat dianggap sebagai suatu fungsi dari konstanta-konstanta yang diketahui, yaitu

$$S = f(t, q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s) + A(\alpha_1, \dots, \alpha_s).$$

Jika konstanta  $\alpha_i$  digantikan dengan fungsi koordinat dan waktu, memenuhi  $s$  syarat

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0,$$

akan diperoleh integral umum yang bergantung pada fungsi konstanta bebas  $A(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$  sehingga untuk fungsi  $S$  yang dicari berlaku pula

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \left( \frac{\partial S}{\partial q_i} \right)_{\alpha} + \sum_k \left( \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} \right)_q \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i} = \left( \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} \right)_{\alpha}$$

Besaran  $(\partial S / \partial q_i)_{\alpha}$  memenuhi persamaan diferensial Hamilton-Jacobi karena fungsi  $S(t, q, \alpha)$  merupakan integral sempurna ini. Oleh karena itu, turunan  $\partial S / \partial q_i$  juga memenuhi.

momentum yang baru. Koordinat baru disimbolkan dengan  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ . Dalam hal ini karena fungsi pembukti bergantung dari koordinat lama dan momentum baru maka haruslah digunakan pers. [45.8] sehingga diperoleh

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \quad H' = H + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Dalam hal ini fungsi  $f$  memenuhi persamaan diferensial Hamilton-Jacobi, maka fungsi Hamilton yang identik akan lenyap

$$H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Oleh karena itu, persamaan kanonik untuk variabel yang baru adalah dalam bentuk  $\alpha_i = 0, \beta_i = 0$  sehingga didapat pula bahwa

$$\alpha_i = \text{konstan} \quad \beta_i = \text{konstan} \quad (47.3)$$

Selain itu, didapat pula kemungkinan persamaan

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i$$

untuk  $s$  koordinat  $q$  melalui  $2s$  konstanta  $\alpha$  dan  $\beta$ . Dengan cara demikian akan diperoleh penyelesaian persamaan gerak.

Untuk menyelesaikan persoalan gerak suatu sistem mekanis berdasarkan metode Hamilton-Jacobi dapat dilakukan melalui operasi berikut.

Dengan fungsi Hamilton persamaan diferensial Hamilton-Jacobi dapat diperoleh dan integral sempurna pada pers. [47.2] dapat pula ditentukan. Penurunan tersebut adalah dengan menggunakan konstanta sembarang  $\alpha$ , di mana variabel baru  $\beta$  dapat ditentukan pula; maka

sistem dapat dinyatakan dalam  $s$  persamaan aljabar, yaitu

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i. \quad (47.4)$$

Penyelesaian persamaan ini akan menghasilkan koordinat  $q$  sebagai fungsi waktu dan  $s$  konstanta sembarang. Selanjutnya dapat pula diperoleh ketergantungan momentum terhadap waktu menurut persamaan:

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

Jika diketahui suatu integral sempurna dari persamaan diferensial Hamilton-Jacobi, yang hanya bergantung pada  $2s$  variabel, dengan hanya menggunakan persamaan tersebut, tidak akan dapat ditentukan integral persamaan gerak secara langsung walaupun perhitungan seperti ini lebih mudah dilakukan. Jika suatu fungsi  $S$  yang mengandung sejumlah konstan  $\alpha_i$  yang baru diketahui, diperoleh relasi

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \text{konstan.}$$

yaitu merupakan persamaan yang mengandung hubungan antara  $q_r$ , ...,  $q_s$  dan  $t^2$ .

Persamaan diferensial Hamilton-Jacobi akan mempunyai bentuk lebih sederhana jika di dalam fungsi  $H$  tidak terdapat waktu secara eksplisit, atau dengan perkataan lain jika sistem merupakan sistem konservatif. Ketergantungan aksi terhadap waktu menyebabkan penjumlahan aksi berkurang sebesar  $-E t$

$$S = S_0(q) - E t \quad (47.5)$$

(lihat §44), dan pernyataan di atas disubstitusikan ke pers. [47.1] maka

---

2) Pada penyelesaian selanjutnya jumlah variabel akan berkurang.

persamaan diferensial Hamilton-Jacobi akan menghasilkan aksi tersingkat  $S_0(q)$  dalam bentuk

$$H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = E. \quad (47.6)$$

#### 48. Separasi Variabel

Dalam sederetan kasus penting integral sempurna dari persamaan diferensial Hamilton-Jacobi dapat ditentukan dengan pertolongan *separasi variabel*. Metode ini mengandung tata cara sebagai berikut

Diasumsikan suatu koordinat yang disimbolkan dengan  $q_1$  dan turunan yang berhubungan dengannya  $\partial S/\partial q_1$ , dalam persamaan diferensial Hamilton-Jacobi hanya dalam kombinasi

$$\varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)$$

yang tidak mengandung koordinat lain (juga waktu) dan turunan koordinat yang bersangkutan sehingga persamaannya menjadi

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S}{\partial q_i}, \frac{\partial S}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right\} = 0. \quad (48.1)$$

dengan  $q_i$  menyimbolkan semua koordinat yang ada, kecuali  $q_1$ .

Selanjutnya akan dicari penyelesaian persamaan ini dalam bentuk penambahan, sebagai berikut

$$S = S'(q_r, t) + S_1(q_1).$$

Dengan mensubstitusikan pers. [48.2] ke pers. [48.1] diperoleh

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)\right\} = 0. \quad (48.3)$$

kemudian penyelesaian pers. [48.2] telah diperoleh. Maka pers. [48.3]

setelah disubstitusikan ke pers. [48.2], akan menjadi identitas yang berlaku untuk semua koordinat  $q_i$ . Suatu perubahan dari variabel  $q_i$  hanya akan berpengaruh pada fungsi  $\varphi$ , karena pers. [48.3] sekarang terpenuhi secara identik, maka fungsi  $\varphi$  haruslah merupakan konstanta. Dengan demikian, pers. [48.3] dapat dipecah menjadi dua bagian, yaitu

$$\varphi \left( q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1} \right) = \alpha_1 \quad (48.4)$$

$$\Phi \left\{ q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \alpha_s \right\} = 0. \quad (48.5)$$

dengan  $\alpha_1$  adalah konstanta sembarang. Persamaan pertama dari dua persamaan di atas merupakan persamaan diferensial biasa (ordiner) sehingga dari persamaan ini dapat ditentukan  $s_1(q_1)$ . Persamaan kedua adalah persamaan diferensial parsial dengan kandungan variabel berkurang satu.

Jika  $s$  koordinat dan waktu dapat ditentukan dengan cara pemisahan suksesif seperti ini, maka penentuan integral sempurna dari persamaan diferensial Hamilton-Jacobi dapat direduksi menjadi persamaan kuadrat. Untuk kasus sistem konservatif hal ini berhubungan dengan separasi dari  $s$  variabel (koordinat) pada pers. [47.6] dan pada separasi sempurna integral yang dicarai menjadi

$$S = \sum_k (q_k; \alpha_1, \dots, \alpha_s) - E(\alpha_1, \dots, \alpha_s) t, \quad (48.6)$$

dengan  $S_k$  hanya bergantung pada satu variabel; energi  $E$  hanya sebagai fungsi konstanta sembarang  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  dan dapat dicari dengan mensubstitusikan  $S_0 = \sum S_k$  pada pers. [47.6].

Kasus khusus dari separasi variabel adalah berhubungan dengan adanya suatu variabel siklik  $q_i$ . Hal ini tidak muncul secara eksplisit di dalam fungsi Hamilton dan tentunya juga pada persamaan diferensial Hamilton-Jacobi. Fungsi  $\varphi (q_i, \partial S/\partial q_i)$  dalam hal ini mengalami reduksi

lebih sederhana menjadi  $\partial S/\partial q_1$ , sehingga dari pers. [48.4] menghasilkan  $S_1 = a_1 q_1$ , maka

$$S = S'(q_1, t) + \alpha_1 q_1 \quad (48.7)$$

Konstanta  $\alpha_1$  dalam hal ini tidak lain merupakan suatu konstanta dari momentum  $p_1 = \partial S/\partial q_1$ , yang ditentukan oleh koordinat siklik. Patut pula dicatat bahwa pemisahan waktu dalam suku penambahan  $-Et$  untuk sistem konservatif merupakan separasi suatu "variable siklik"  $t$ .

Dengan cara ini semua persamaan integrasi persamaan gerak yang telah diketahui sebelumnya, dengan menggunakan variabel siklik dari metode separasi variabel pada persamaan diferensial Hamilton-Jacobi menjadi lebih sederhana. Untuk ini terdapat pula sejumlah kasus, di mana separasi variabel dapat dilakukan walaupun tidak mengandung koordinat siklik. Dengan demikian, metode Hamilton-Jacobi ini dapat dipandang sebagai instrumen terbaik untuk mencari penyelesaian umum persamaan gerak.

Pemilihan koordinat adalah penting dalam penggunaan metode separasi variabel untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial Hamilton-Jacobi. Di bawah ini akan dibahas suatu contoh untuk metode separasi variabel dalam berbagai sistem koordinat yang sering digunakan dalam menggambarkan persoalan gerak titik massa yang terpengaruh oleh medan gaya luar.

1. **Koordinat Bola.** Dalam sistem koordinat bola, posisi suatu titik ditentukan dalam  $(r, \Theta, \varphi)$ ; maka fungsi Hamilton menjadi:

$$H = \frac{1}{2m} \left( \frac{p_r^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \Theta} \right) + U(r, \Theta, \varphi).$$

separasi variabel mungkin dilakukan jika berlaku:

$$U = a(r) + \frac{b(\Theta)}{r^2}. \quad (18.8)$$

Untuk kasus ini persamaan diferensial Hamilton-Jacobi dari fungsi  $S_0$  adalah

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr} \left[ \left( \frac{\partial S_0}{\partial \Theta} \right)^2 + 2mb(\Theta) \right] + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \Theta} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \varphi} \right)^2 = E$$

Dalam hal ini variabel  $\varphi$  adalah siklik karena penyelesaian yang dicari dapat ditulis dalam bentuk

$$\left( \frac{\partial S_2}{\partial \Theta} \right)^2 + a(r) + 2mb(\Theta) + \left( \frac{\partial S_0}{\partial \varphi} \right)^2 = \beta$$

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + a(r) + \frac{\beta}{2mr^2} = E$$

Integrasi persamaan ini menghasilkan

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int \sqrt{\beta - 2mb(\Theta) - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \Theta}} d\Theta + \int \sqrt{2m[E - a(r)] - \frac{\beta}{r^2}} dr. \quad (48.9)$$

Konstanta bebas dalam hal ini adalah  $p_\varphi$ ,  $\beta$ , dan  $E$  jika turunan terhadap konstanta ini dihitung, akan diperoleh konstanta baru sehingga akan diperoleh penyelesaian persamaan gerak.

**2. Koordinat Parabola.** Perubahan dari koordinat selindr (yang dalam pembahasan ini disimbolkan dengan variabel  $q$ ,  $\varphi$ , dan  $z$ ) menjadi koordinat parabola  $\xi$ ,  $\eta$ , dan  $\varphi$  dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \varrho = \sqrt{\xi \eta}. \quad (48.10)$$

Koordinat  $\xi$  dan  $\eta$  mempunyai harga dari 0 hingga  $\infty$ ; permukaan  $\zeta = \text{konstan}$  dan  $\eta = \text{konstan}$  menggambarkan dua permukaan dari rotasi paraboloida (sumbu  $z$  sebagai sumbu simetri). Relasi pada pers. [48.10] dapat pula ditulis dalam bentuk berbeda jika dinyatakan dalam jarak

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2} = \frac{1}{2} (\xi + \eta), \quad (48.11)$$

Maka didapat hubungan

$$\zeta = r + z, \quad \eta = r - z \quad (48.12)$$

Selanjutnya persamaan Lagrange suatu titik massa yang dinyatakan dalam koordinat  $\zeta$ ,  $\eta$ , dan  $\varphi$  dapat dicari dengan menurunkan pers. [48.10] terhadap waktu dan substitusikan dalam

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho} + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, \varphi, z)$$

(fungsi Lagrange dalam koordinat selinder) dan diperoleh

$$L = \frac{m}{8} (\xi + \eta) \left( \frac{\dot{\xi}^2}{\xi} + \frac{\dot{\eta}^2}{\eta} \right) + \frac{m}{2} \xi \eta \dot{\varphi}^2 - U(\xi, \eta, \varphi). \quad (48.13)$$

Momentum dalam sistem koordinat parabola menjadi:

$$p_{\xi} = \frac{m}{4\xi} (\xi + \eta) \dot{\xi}, \quad p_{\eta} = \frac{m}{4\eta} (\xi + \eta) \dot{\eta}, \quad p_{\varphi} = m \cdot \xi \eta \dot{\varphi}.$$

sehingga fungsi Hamilton menjadi:

$$H = \frac{2}{m} \frac{\xi p_{\xi}^2 + \eta p_{\eta}^2}{\xi + \eta} + \frac{p_{\varphi}^2}{2m \xi \eta} + U(\xi, \eta, \varphi). \quad (48.14)$$

Hal yang menarik dalam separasi variabel untuk koordinat ini adalah jika energi potensial berbentuk

$$U = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta} = \frac{a(r+z) + b(z-r)}{2r} \quad (18.15)$$

Maka berlaku

$$\frac{2}{m(\xi + \eta)} \left[ \xi \left( \frac{\partial S_0}{\partial \xi} \right)^2 + \eta \left( \frac{\partial S_0}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{1}{2m\xi\eta} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta} = E.$$

Koordinat siklik  $\varphi$  dapat dipisahkan dalam bentuk  $p_\varphi \varphi$ . Kemudian multiplikasi persamaan di atas dengan  $(\xi + \eta)$ , kelompokkan semua suku yang sama dan diperoleh

$$2\xi \left( \frac{\partial S_0}{\partial \xi} \right)^2 + m a(\xi) - m E \xi + \frac{p_\varphi^2}{2\xi} = \beta$$

$$2\eta \left( \frac{\partial S_0}{\partial \eta} \right)^2 + m b(\eta) - m E \eta + \frac{p_\varphi^2}{2\eta} = -\beta$$

integrasikan persamaan ini sehingga diperoleh

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int \sqrt{\frac{mE}{2} + \frac{\beta}{2\xi} - \frac{m a(\xi)}{2\xi} - \frac{p_\varphi^2}{4\xi^2}} d\xi + \int \sqrt{\frac{mE}{2} - \frac{\beta}{2\eta} - \frac{m b(\eta)}{2\eta} - \frac{p_\varphi^2}{4\eta^2}} d\eta \quad (18.16)$$

dengan konstanta sembarang  $p_\varphi \beta$ , dan  $E$ .

**3. Koordinat Elips.** Koordinat  $\xi$ ,  $\eta$ , dan  $\varphi$  dapat diubah dalam koordinat elips dari persamaan transformasi, sebagai berikut

$$\rho = \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \quad z = \sigma \xi \eta, \quad (48.17)$$

Konstanta  $\sigma$  adalah parameter transformasi. Koordinat  $\xi$  berharga dari 0 hingga  $\infty$ ,  $\eta$  dan  $-1$  hingga  $+1$ . Secara geometris dapat lebih jelas terlihat jika jarak  $r_1$  dan  $r_2$  dibuat dari titik  $A_1$  dan  $A_2$  pada sumbu  $z$  dengan koordinat  $z = +\alpha$  dan  $z = -\alpha$ .

Dengan mensubstitusikan pers. [48.17] ke  $r_q = \sqrt{(z - \sigma)^2 + \rho^2} = \sqrt{(z + \sigma)^2 + \rho^2}$  didapat

$$r_1 = \sigma(\xi - \eta), \quad r_2 = \sigma(\xi + \eta)$$

$$\xi = \frac{r_2 + r_1}{2\sigma}, \quad \eta = \frac{r_2 - r_1}{2\sigma}. \quad (48.18)$$

Melalui transformasi dari fungsi Lagrange untuk koordinat selinder menjadi elips diperoleh

$$L = \frac{m\sigma}{2}(\xi^2 - \eta^2) \left( \frac{\dot{\xi}}{\xi^2 - 1} + \frac{\dot{\eta}}{1 - \eta^2} \right) + \frac{m\sigma}{2}(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)\dot{\varphi}^2 - U(\xi, \eta, \varphi) \quad (48.19)$$

dan fungsi Hamilton menjadi

$$H = \frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2)} \left[ (\xi^2 - 1)p_\xi^2 + (1 - \eta^2)p_\eta^2 + \left( \frac{1}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{1 - \eta^2} \right) p_\varphi^2 \right] + U(\xi, \eta, \varphi). \quad (48.20)$$

3) Garis dengan  $\xi = \text{konstanta}$  akan membentuk permukaan elipsoida

$$\frac{z^2}{\sigma^2 \xi^2} + \frac{\rho^2}{\sigma^2(\xi^2 - 1)} = 1$$

dengan fokus pada  $A_1$  dan  $A_2$ ; garis dengan  $\eta = \text{konstan}$  merupakan permukaan hiperboloida

$$\frac{z^2}{\sigma^2 \eta^2} + \frac{\rho^2}{\sigma^2(1 - \eta^2)} = 1$$

dengan titik fokus yang sama

Secara fisis hal yang menarik perhatian dalam separasi variabel jika potensial berbentuk

$$U = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi^2 - \eta^2} = \frac{\sigma^2}{r_1 r_2} \left\{ a \left( \frac{r_2 + r_1}{2\sigma} \right) + b \left( \frac{r_2 - r_1}{2\sigma} \right) \right\} \quad (48.21)$$

dengan  $a(\xi)$  dan  $b(\eta)$  sebagai fungsi sembarang. Hasil perhitungan separasi variabel persamaan diferensial Hamilton-Jacobi adalah

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int \sqrt{2m\sigma^2 E^2 + \frac{\beta - 2m\sigma^2 a(\xi)}{\xi^2 - 1} - \frac{p_\varphi^2}{(\xi^2 - 1)^2}} d\xi + \int \sqrt{2m\sigma^2 E^2 - \frac{\beta + 2m\sigma^2 b(\eta)}{1 - \eta^2} - \frac{p_\varphi^2}{(1 - \eta^2)^2}} d\eta. \quad (48.22)$$

**Contoh 91:** Tentukan integral sempurna dari persamaan diferensial Hamilton-Jacobi untuk gerak sebuah partikel di dalam medan-medan potensial sebagai berikut

$$U = \frac{\alpha}{r} - Fz$$

(tumpang tindih medan Coulumb dan medan homogen)

**Penyelesaian:** Medan potensial yang diberikan adalah sesuai dengan pers. [48.15], sehingga berlaku

$$a(\xi) = \alpha - \frac{F}{2} \xi^2. \quad b(\eta) = \alpha + \frac{F}{2} \eta^2.$$

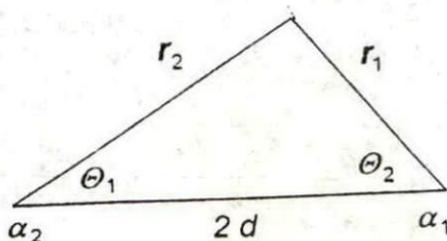
Integral sempurna dari persamaan diferensial Hamilton-Jacobi dapat dihitung dari pers. [48.16] dengan menggunakan  $a(\xi)$  dan  $b(\eta)$ .

Untuk menjelaskan arti dari koordinat  $\beta$ , tuliskan persamaan berikut

$$2\xi p_\xi^2 + m a(\xi) - m E \xi + \frac{p_\rho^2}{2\xi} = \beta$$

$$2\eta p_\eta^2 + m b(\eta) - m E \eta + \frac{p_\rho^2}{2\eta} = -\beta.$$

Kurangkan kedua persamaan di atas satu sama lain dan gantikan momentum  $p_\xi = \partial S / \partial \xi$  dan  $p_\eta = \partial S / \partial \eta$  dengan  $p_\rho = \partial S / \partial \rho$  dan



Gambar 55:

$p_z = \partial S / \partial z$  dalam koordinat selinder sehingga diperoleh

$$\beta = -m \left[ \frac{\alpha z}{r} + \frac{p_\rho}{m} (z p_\rho - \rho p_z) + \frac{p_\phi^2}{m \rho^2} z \right] - \frac{m}{2} F \rho^2.$$

Rumusan di dalam tanda kurung segi empat menggambarkan integral persamaan gerak spesifik karena medan Coulomb (komponen  $z$  vektor pada pers. [15.17]).

**Contoh 92:** Pertanyaan yang sama dengan contoh-91 untuk medan potensial:

$$U = \frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\alpha_2}{r_2}$$

(medan Coulomb berpusat ganda yang dipisahkan oleh jarak  $2\sigma$ ).

**Penyelesaian:** Medan potensial yang diberikan sesuai dengan pers. [48.21] sehingga berlaku

$$a(\xi) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sigma} \xi, \quad b(\eta) = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sigma} \eta.$$

Aksi  $s(\xi, \eta, \varphi, \text{ dan } t)$  diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan di atas ke pers. [48.22]. Arti dari konstanta  $\beta$  adalah analog dengan contoh 91. Konstanta ini berhubungan dengan besaran kekekalan integral gerak)

$$\beta = \sigma^2 \left( p_\varphi^2 + \frac{p_z^2}{\rho^2} \right) - M^2 + 2m\sigma(\alpha_1 \cos \Theta_1 + \alpha_2 \cos \Theta_2),$$

dengan

$$M^2 = [r p]^2 = p_\varphi^2 z^2 + p_z^2 \rho^2 + \frac{r^2 p_\varphi^2}{\rho^2} - 2z \rho p_z p_\varphi.$$

Sudut  $\Theta_1$  dan  $\Theta_2$  dijelaskan oleh gbr. [55].

## 19. Invarian Adiabatis

Pandang suatu sistem mekanis yang mengalami gerak satu dimensi dan terbatas (*finite*); sistem dikarakteristikan oleh parameter  $\lambda$  yang menentukan sifat sistem sendiri atau pengaruh medan gaya luar yang terdapat di dalam sistem <sup>4)</sup>.

Diasumsikan bahwa parameter ini karena pengaruh sesuatu penyebab dari luar, berubah terhadap waktu secara perlahan-lahan (fenomena seperti ini disebut sebagai adiabatis), "perlahan" atau lamban dalam hal ini mempunyai artia, bahwa selama sistem bergerak dalam periode  $T$ ,  $\lambda$  hanya mengalami sedikit perubahan, berarti.

$$T \frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda. \quad (49.1)$$

Seandainya harga  $\lambda$  konstan, sistem merupakan sistem tertutup dan gerak mempunyai periode tetap, energi sistem tetap  $E$  dan terdapat

4) Parameter ini digunakan untuk memudahkan pembahasan persoalan. Hasil perhitungan nantinya akan tetap berlaku walaupun terdapat sejumlah parameter.

harga  $T(E)$  tertentu. Sebaliknya jika  $\lambda$  berubah sistem bukan lagi sistem tertutup dan energinya menjadi tidak konstan. Perubahan  $\lambda$  sangat lambat maka perubahan energi terhadap waktu ( $E$ ) haruslah kecil. Selanjutnya dilakukan perata-rataan perubahan energi dalam waktu 1 periode  $T$  sehingga deviasi perubahan deviasi perubahan  $\bar{E}$  dalam satu periode ditulis sebagai  $E$  dan disebut sebagai kecepatan perubahan energi sistem. Perubahan energi terhadap waktu ini akan sebanding dengan perubahan parameter  $\lambda$  terhadap waktu  $\lambda$ . Dengan perkataan lain berarti bahwa perubahan  $E$  untuk sistem yang dipandang ini mempunyai kelakukan sama dengan perubahan parameter  $\lambda$ . Ketergantungan  $E$  terhadap  $\lambda$  ini dapat dinyatakan dalam kombinasi pernyataan tertentu yang konstan dari  $E$  dan  $\lambda$ . Besaran konstan demikian, yang pada perubahan yang lambat dari gerak suatu sistem disebut sebagai *invarian adiabatik*.

Misalkan  $H(q, p; \lambda)$  adalah fungsi Hamilton yang bergantung pada dari parameter  $\lambda$  dari suatu sistem. Dari pers. [40.5] turunan total energi terhadap waktu adalah

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt}. \quad (49.2)$$

Pernyataan pada ruas kanan persamaan di atas tidak hanya bergantung pada perubahan yang lambat dari parameter  $\lambda$ , tetapi juga bergantung pada perubahan cepat variabel  $q$  dan  $p$ . Oleh karena itu, yang menjadi perhatian hanya perubahan sistematis dari energi, maka dilakukan perata-rataan pers. [49.2] untuk satu periode. Perubahan  $\lambda$  yang lambat (tentunya juga  $\lambda$ ) maka tanda perata-rataan dari  $\lambda$  dapat dihilangkan sehingga persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \lambda}. \quad (49.3)$$

Pada fungsi yang dirata-ratakan  $\partial H/\partial \lambda$  hanya dipandang variabel  $q$  dan  $p$  saja, bukan parameter  $\lambda$ , berarti bahwa perata-rataan dilakukan sedemikian rupa, seolah gerak sistem berlangsung dengan variabel  $\lambda$  konstan.

Perata-rataan secara eksplisit dinyatakan

$$dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt.$$

Berdasarkan persamaan Hamilton diketahui bahwa  $\dot{q} = \partial H / \partial p$ , sehingga didapat

$$dt = \frac{dq}{\partial H / \partial p}.$$

Dengan pertolongan persamaan ini integrasi terhadap waktu dapat digantikan dengan integrasi terhadap konstanta, yaitu dengan menggantikan periode  $T$  dari persamaan

$$T = \int_0^T dt = \oint \frac{dq}{\partial H / \partial p}; \quad (19.4)$$

tanda  $\oint$  mempunyai arti integrasi terhadap perubahan sempurna dari koordinat ("bolak-balik") selama satu periode<sup>5)</sup>. Dengan demikian, diperoleh:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint \frac{\partial H / \partial \lambda}{\partial H / \partial p} dq}{\oint \frac{dq}{\partial H / \partial p}}. \quad (19.5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0$$

atau

$$\frac{\partial H / \partial \lambda}{\partial H / \partial p} = - \frac{\partial p}{\partial \lambda}.$$

5) Jika gerak suatu sistem menggambarkan suatu rotasi dan koordinat  $q$  tidak lain sama dengan sudut rotasi  $\phi$ , integrasi dari  $\phi$  haruslah dilakukan untuk satu "putaran penuh", yaitu dari 0 hingga  $2\pi$ .

Jika pernyataan di atas disubstitusikan ke pers. [49.5] dan integran ditulis dengan  $\partial p / \partial E$ , didapat

$$\frac{\overline{dE}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda} dq}{\oint \frac{\partial p}{\partial E} dq}$$

atau

$$\oint \left( \frac{\partial p}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) = 0.$$

Persamaan ini kemudian dapat ditulis dalam bentuk sebagai, berikut

$$\frac{dI}{dt} = 0, \quad (49.6)$$

dengan integral  $I$  didefinisikan

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq \quad (49.7)$$

yang berarti sebagai lintasan yang dibentuk oleh gerak untuk harga  $E$  dan  $\lambda$  tertentu. Hasil ini menyatakan bahwa besaran  $I$  untuk pendekatan yang dipandang adalah tetap konstan, atau menggambarkan invarian adiabatik.

Besaran  $I$  bergantung pada energi sistem (dan parameter  $\lambda$ ). Turunan parsialnya terhadap energi menentukan besarnya periode gerak sistem. Dengan memperhatikan kembali pers. [49.4] dapat pula diketahui bahwa

$$2\pi \frac{\partial I}{\partial E} = \oint \frac{\partial p}{\partial E} dq = T \quad (49.8)$$

atau berarti pula bahwa

$$\frac{\partial E}{\partial I} = \omega, \quad (49.9)$$

dengan  $\omega = 2\pi/T$  sebagai frekuensi getaran sistem.

Integral pada pers. [49.7] dapat dipandang secara geometris jika digunakan pengertian fase lintasan dari sistem. Dalam kasus yang dipandang ini (satu dimensi) ruang fase direduksi menjadi ruang dua dimensi  $q$  dan  $p$  dan lintasan fase untuk gerak periodik suatu sistem tertutup akan membentuk kurva tertutup pada bidang ini (bidang  $q, p$ ). Integral pada pers. [49.7] sepanjang kurva tersebut adalah sama dengan luas permukaan tertutup.

Persamaan ini dapat pula dinyatakan dalam integral ganda

$$I = \frac{1}{2\pi} \int dq dp. \quad (49.10)$$

Untuk contoh penggunaan invarian adiabatik misalnya sistem adalah osilator harmonik satu dimensi dengan Hamilton diberikan, sebagai berikut

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \quad (49.11)$$

dengan  $\omega$  adalah frekuensi eigen osilator. Persamaan lintasan fase dapat diberikan dari hukum kekekalan energi  $H(q, p) = E$ . Lintasan ini berbentuk elips dengan masing-masing sumbu  $\sqrt{2mE}$  dan  $\sqrt{2E/m\omega^2}$  dan luas (dibagi  $2\pi$ ) dapat dinyatakan menjadi

$$I = \frac{E}{\omega}. \quad (49.12)$$

Invarian adiabatik besaran ini mempunyai arti bahwa energi pada perubahan lambat dari parameter osilator ( $m$  atau  $k$  pada pers. [21.3]) sebanding dengan perubahan frekuensi.

## 50. Variabel Kanonik

Dalam pembahasan berikut akan dimisalkan parameter  $\lambda$  konstan, berarti bahwa sistem dipandang sebagai sistem tertutup.

Selanjutnya pandang suatu transformasi kanonik dari variabel  $p$  dan  $q$ , dengan besaran  $I$  dipandang sebagai besaran momentum yang baru. Peran fungsi aksi tersingkat  $S_0$  yang timbul dalam hal ini haruslah sebagai fungsi  $q$  dan  $I$ .  $S_0$  dihitung dari

$$S_0(p, E, \lambda) = \int p(p, E, \lambda) dq. \quad (50.1)$$

dengan harga untuk  $E$  (dan parameter  $\lambda$ ) diketahui. Untuk sistem tertutup  $I$  hanya bergantung pada energi sehingga  $S_0$  dapat dinyatakan dalam bentuk  $S_0(q, I; \lambda)$  dan turunan parsial  $(\partial S_0 / \partial q)_I$  pada harga  $I$  konstan adalah identik. Dengan demikian, berlaku

$$p = \frac{\partial S_0(q, I; \lambda)}{\partial q} \quad (50.2)$$

adalah sesuai dengan rumus pertama untuk transformasi kanonik pada pers [45.8]. Rumus kedua mendefinisikan "koordinat" baru yang disimbolkan dengan  $\omega$

$$\omega = \frac{\partial S_0(q, I; \lambda)}{\partial I}. \quad (50.3)$$

Variabel baru  $I$  dan  $\omega$  disebut sebagai *koordinat kanonik*;  $I$  dalam hubungan ini adalah sebagai *variabel aksi* dan  $\omega$  sebagai *variabel sudut*

Fungsi yang timbul  $s_0(q, I; \lambda)$  dalam transformasi ini tidak bergantung pada waktu secara eksplisit, sehingga fungsi Hamilton yang baru  $H'$ , dinyatakan dalam variabel yang baru, sesuai dengan fungsi Hamilton lama  $H$ . Dengan perkataan lain  $H'$  energi adalah sebagai variabel aksi, atau  $H' = E(I)$ . Sehubungan persamaan Hamilton untuk variabel kanonik dinyatakan

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\omega} = \frac{dE(I)}{dI}, \quad (50.4)$$

Dari persamaan pertama diperoleh, seperti  $I = \text{konstan}$ ; bersama-sama dengan energi  $E$ ,  $I$  dalam hal ini juga sebagai konstanta. Persamaan kedua menyatakan bahwa variabel sudut adalah sebagai fungsi linier dari waktu, berarti

$$\omega = \frac{dE(I)}{dI} t + \text{konstanta} = \omega(I) + \text{konstanta}. \quad (50.5)$$

Dengan demikian, variabel  $w$  menyatakan fase getaran

Aksi  $S_0(q, I; \lambda)$  tidak secara jelas sebagai fungsi koordinat. Setelah habis satu periode gerak fungsi ini tidak akan kembali ke harganya semula, tetapi mengalami penurunan

$$\Delta S_0 = 2\pi I. \quad (50.6)$$

Rumusan ini dapat pula diperoleh dari pers. [50.1] dan [49.7]. Secara bersamaan variabel sudut akan bertambah sesuai dengan persamaan

$$\Delta \omega_1 = \Delta \frac{\partial S_0}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I} S_0 = 2\pi. \quad (50.7)$$

Jika sebaliknya  $q$  dan  $p$  (atau fungsi sembarang  $F(q, p)$ ) dinyatakan dalam variabel kanonik, pada perubahan  $\omega$  sebesar  $2\pi$  (dengan  $I$  diketahui) fungsi ini akan mempunyai harga yang tetap. Dengan perkataan lain, setiap fungsi  $F(q, p)$  sebagai fungsi variabel kanonik secara eksplisit akan menggambarkan suatu fungsi periodik dari  $w$  dengan periode  $2\pi$ .

Untuk sistem terbuka di mana parameter  $\lambda$  bergantung pada waktu, persamaan gerak juga dapat dinyatakan dalam variabel kanonik pula. Transformasi untuk sistem ini dilakukan dengan menggunakan pers. [50.2] dan [50.3], dan menghitung  $S_0$  dari pers. [50.1]. Dalam hal ini fungsi  $S_0$  yang timbul dinyatakan dalam variabel  $I$  dan menggunakan integrasi pada pers. [49.7]. Dalam menghitung integral tidak tentu pers. [50.1] dan integral tertentu pada pers. [49.7] parameter  $\lambda(t)$  harus

diasumsikan mempunyai harga tertentu Dengan perkataan  $S_0(q, I; \lambda(t))$  sesuai dengan fungsi sebelumnya untuk parameter  $\chi$  konstan. Parameter  $\lambda$  dalam hal ini digantikan dengan  $\lambda(t)^6$ .

Fungsi yang muncul (bersama-sama dengan parameter  $z$ ) secara eksplisit bergantung waktu, sehingga fungsi Hamilton  $H'$  tidak lagi identik dengan fungsi yang lama, atau  $E(I)$ . Menurut persamaan umum untuk transformasi kanonik pers. [45.8] didapat hubungan

$$H' = E(I; \lambda) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = E(I; \lambda) + A \dot{\lambda}, \quad (50.8)$$

dengan

$$A = \left( \frac{\partial S_0}{\partial \lambda} \right)_{q, I} \quad (50.9)$$

Besaran  $A$  dalam hal ini (setelah mencari turunan  $\lambda$ ) haruslah dinyatakan dalam  $I$  dan  $\omega$  dengan pertolongan pers. [50.3].

Maka persamaan Hamilton menjadi

$$\dot{I} = -\frac{\partial H'}{\partial \omega} = -\left( \frac{\partial A}{\partial \omega} \right)_{I, \lambda} \quad (50.10)$$

$$\dot{\omega} = \frac{\partial H'}{\partial I} = \omega(I; \lambda) + \left( \frac{\partial A}{\partial I} \right)_{\omega, \lambda} \quad (50.11)$$

dengan  $\omega = (\partial E / \partial I)_I$  sebagai frekuensi getaran (yang dihitung pada  $\lambda$  tetap).

---

6) Patutu di ketahui bahwa fungsi  $S_0$  yang ditentukan tidak identik dengan fungsi aksi tersingkat yang dibicarakan terdahulu karena fungsi Hamilton bergantung pada waktu.

**Contoh 93:** Cari persamaan gerak osilator harmonik dalam variabel kanonik (dengan menggunakan fungsi Hamilton dari pers [49.11]) dengan frekuensi getaran bergantung pada waktu !

**Penyelesaian:** Pers. [50.1] hingga [50.3] dihitung untuk harga  $\lambda$  yang tetap (dalam hal ini harga  $\omega$  menurun terhadap waktu) maka terdapat hubungan  $q$  dan  $p$  terhadap  $\omega$  yang sama seperti kasus frekuensi tetap (jika  $\omega = \omega t$ )

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin \omega = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \sin \omega \quad p = \sqrt{2I\omega m} \cos \omega.$$

Dari persamaan di atas kemudian diperoleh

$$S_0 = \int p dq = \int p \left( \frac{\partial q}{\partial \omega} \right)_{I, \omega} d\omega = 2I \int \cos^2 \omega d\omega$$

Dengan demikian

$$A = \left( \frac{\partial S_0}{\partial \omega} \right)_{q, I} = \left( \frac{\partial S_0}{\partial \omega} \right)_I \left( \frac{\partial \omega}{\partial \omega} \right)_q = \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega.$$

Untuk persamaan gerak pada pers. [50.10] dan [50.11] didapat

$$\dot{I} = -I \frac{\dot{\omega}}{\omega} \cos 2\omega. \quad \dot{\omega} = \omega + \frac{\dot{\omega}}{2\omega} \sin 2\omega.$$

## 51. Ketelitian Kekekalan Invarian Adiabatik

Variabel aksi dari invarian adiabatik dapat ditunjukkan dengan pertolongan pers. [50.10].

Fungsi  $S_0(q, I; \lambda)$  bukan merupakan fungsi yang jelas dari  $q$ ; jika koordinat kembali mencapai harga semula, harga  $S_0$  akan semakin

besar, yaitu sebesar kelipatan dari  $2\pi I$ . Turunan dari pers. [50.9] sebaliknya merupakan fungsi yang jelas dari koordinat karena diturunkan pada harga  $I$  konstan sehingga suku tambahan yang disebutkan di atas dapat dihilangkan. Seperti halnya fungsi yang jelas dari koordinat, demikian pula  $A$  yang dinyatakan dalam variabel sudut  $w$  merupakan fungsi periodik dari variabel ini. Maka harga rata-rata dari turunan  $\partial A/\partial w$  sama dengan nol. Buat perata-rataan pers. [50.10] dan keluarkan  $\lambda$  dari tanda rata-rata (untuk kasus perubahan  $\lambda$  sangat lambat), maka didapat

$$\dot{I} = \overline{\left(\frac{\partial A}{\partial w}\right)} \dot{\lambda} = 0. \quad (51.1)$$

persis seperti yang diharapkan.

Dari pers. [50.10] dan [50.11] akan diturunkan derajat ketelitian di mana invarian adiabatik tetap konstan. Untuk itu dilakukan urutan perhitungan sebagai berikut. Parameter  $\lambda(t)$  akan menurun untuk  $t = -\infty$  dan  $t = +\infty$  masing-masing menjadi  $\lambda_-$  dan  $\lambda_+$ . Kemudian harga awal invarian untuk  $t = -\infty$  adalah  $I_-$ ; akan dicari perbedaan invarian adiabatik dari harga awal di atas menuju ke  $t = +\infty$ , yaitu  $\Delta I = I_+ - I_-$ .

Dari pers. [50.10] didapat relasi

$$\Delta I = - \int \frac{\partial A}{\partial w} \dot{\lambda} dt. \quad (51.2)$$

Seperti telah disebutkan di atas, besaran  $A$  adalah fungsi periodik dari variabel  $w$ , dengan periode  $2\pi$ . Selanjutnya deretkan  $A$  dalam fungsi Fourier, sebagai berikut

$$A = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{ilw} A_l \quad (51.3)$$

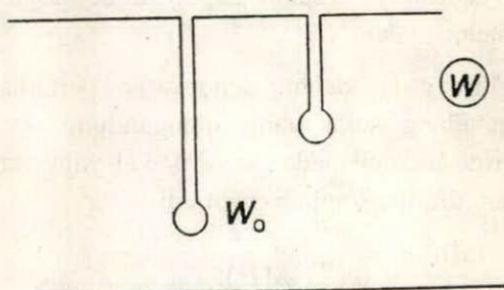
(harga  $A$  dalam hal ini adalah real untuk koefisien deret berlaku  $A_{-l} = A_l$ ). Untuk turunan  $\partial A/\partial w$  diperoleh

$$\frac{\partial A}{\partial \omega} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} il\omega e^{il\omega} A_l = 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{+\infty} il\omega e^{il\omega} A_l. \quad (51.4)$$

Untuk  $\lambda$  yang cukup kecil turunan  $\dot{\omega}$  adalah positif (tandanya sesuai dengan  $\omega$  pada pers. [50.11], berarti bahwa  $\omega$  adalah fungsi monoton terhadap waktu  $t$ . Oleh karena itu, batas integrasi tetap dari integrasi terhadap  $t$  pada pers. [51.2] menjadi integrasi terhadap  $\omega$ , tidak mengalami perubahan

$$\Delta I = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial A}{\partial \omega} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \frac{\partial I}{\partial \omega} d\omega. \quad (51.5)$$

Kemudian deret pada pers. [51.4] disubstitusikan pada integral dan dalam merumuskan kembali harus diperhatikan bahwa  $\omega$  secara formal



Gambar 56:

sebagai variabel kompleks. Dengan mengandaikan bahwa integran tidak mengandung singularitas untuk bilangan real  $\omega$  maka jalannya integrasi dapat digeser dari sumbu real  $w$  ke separuh bidang datar bagian atas variabel tersebut. Dalam hal ini kontur pada daerah singularitas dari integran akan tetap seperti adanya dan selanjutnya berpindah seperti diilustrasikan pada gbr. [56]. Misalnya,  $\omega_0$  adalah sumbu real yang terletak di sebelah titik singularitas, yaitu titik dengan bagian imajiner terkecil (positif). Harga integral yang diberikan pada pers. [51.5] dihasilkan dari singularitas, dengan setiap suku deret pers. [51.4]

mempunyai harga dalam faktor  $\exp(-l \operatorname{Im} \omega_0)$ . Kemudian pandang hanya suku yang hanya mengandung harga eksponensial negatif terkecil (yaitu suku yang mengandung  $l = 1$ )<sup>7)</sup>, maka didapat

$$\Delta I \sim -\exp(-\operatorname{Im} \omega_0). \quad (51.6)$$

Titik singular  $\omega_0$  mempunyai hubungan dengan waktu  $t_0$  (bilangan kompleks) menurut persamaan  $\omega(t) = \omega_0$ . Besarnya  $|t_0|$  umumnya sesuai dengan waktu karakteristik yang diperlukan untuk perubahan parameter sistem. Waktu ini disimbolkan dengan  $\tau$ <sup>8)</sup>. Besar eksponen pada pers. [51.6] dapat ditulis dalam persamaan.

$$\operatorname{Im} \omega_0 \sim \omega t \sim \frac{1}{\tau} \quad (51.7)$$

Dengan menganggap  $\tau \gg T$ , maka eksponensial akan menjadi besar. Oleh karena itu, perbedaan  $I_+ - I_-$  dalam eksponensial berharga kecil dengan mengecilnya parameter sistem<sup>9)</sup>.

Untuk menghitung  $\omega_0$  dalam pendekatan pertama sebagai  $t/t$  (yaitu hanya memandang suku yang mengandung  $\sim (t/\tau)^{-1}$  pada eksponen) maka harga terkecil pada pers. [50.11] yang mengandung  $\lambda$  dapat diabaikan dan ditulis kembali menjadi

$$\frac{dw}{dt} = \omega(T, \lambda(t)). \quad (51.8)$$

- 7) Dalam kasus khusus dapat terjadi bahwa deret pada pers. [51.4] tidak mengandung  $l = 1$  (lihat contoh pada bab ini); dalam setiap kasus harus diperhatikan suku deret dengan harga terkecil  $l$ .
- 8) Jika perubahan yang lambat dari parameter  $\lambda$  hanya bergantung pada persamaan  $\varepsilon = t/\tau$  dengan besaran  $\tau$  hanya bergantung pada waktu maka berlaku  $t = \pi$  dengan  $\zeta$  adalah titik sinularitas yang tidak bergantung pada  $t$  dari fungsi  $\lambda(\zeta)$ .
- 9) Jika harga awal dan akhir dari  $\lambda(t)$  adalah sama  $\lambda_+, \lambda_-$  maka tidak hanya perbedaan harga  $\Delta I$  menjadi kecil secara eksponensial. Akan tetapi, perbedaan harga energi awal dan akhir  $\Delta E = E_+ - E_-$ : menurut pers. [49.9] terdapat hubungan  $\Delta E = \omega \Delta I$

Dengan argumen  $I$  pada fungsi  $w(T, \lambda(t))$  adalah sebagai konstanta, sama dengan  $I$ . Maka didapat

$$\omega_0 = \int_{t_0}^{t_1} \omega(T, \lambda(t)) dt \quad (51.9)$$

(sebagai batas bawah dapat diambil harga real sembarang untuk  $t$ ; bagian imajiner tidak bergantung pada harga ini).

Integral pada pers [51.5] dan [51.8] (dan suku pertama deret pers. [51.4] untuk  $\partial L/\partial w$  selanjutnya mempunyai bentuk

$$\Delta I \sim \text{Re} \int i e^{i\omega} \frac{\lambda d\omega}{\omega(I, \lambda)}$$

Dari persamaan di atas terlihat bahwa khususnya untuk sumbu real pada titik singularitas selanjutnya (titi pengutuban, titik pencabangan) akan bermula dari fungsi  $\lambda^*(t)$ . Dalam hubungan ini patut pula diingat kembali bahwa kunci harga eksponensial yang kecil dari  $\Delta I$  dalam pengandaian ini bahwa fungsi yang bersangkutan tidak mengandung singularitas pada sumbu realnya.

**Contoh 94:** Ramalkan  $\Delta I$  untuk osilator harmonik yang mempunyai frekuensi, sebagai berikut

$$\omega^2 = \omega_0^2 \frac{1 + a e^{\alpha t}}{1 + e^{\alpha t}}$$

dan perlahan-lahan berubah dari  $\omega_- = \omega_0$  pada  $t = -\infty$  menjadi

$$\omega_+ = \sqrt{\omega_0^2} \text{ pada } t = +\infty \text{ (} a < 0, \alpha \ll \omega_0^{10}\text{)}$$

**Penyelesaian:** Gunakan  $w$  sebagai parameter  $\lambda$  sendiri. maka

10 Karakter hamonis dari osilator adalah berbeda dengan ketidakbergantungan frekuensi dari energi.

$$\frac{\dot{\lambda}}{\omega} = \frac{\alpha}{2} \left( \frac{a}{e^{-\alpha t} + a} - \frac{1}{e^{-\alpha t} + 1} \right).$$

Fungsi ini mempunyai kutub pada  $e^{-\alpha t} = -1$  dan  $e^{-\alpha t} = -a$ . Perhitungan integrasi  $\int \omega dt$  menunjukkan bahwa harga terkecil eksponensial untuk suku imajiner  $\text{Im} \omega_0$  dihasilkan dari salah satu kutub

$$\text{Im } \omega_0 = \begin{cases} \omega_0 \pi / \alpha & \text{untuk } a > 1 \\ \omega_0 \pi \sqrt{a} / \alpha & \text{untuk } a < 1. \end{cases}$$

Untuk osilator harmonik berlaku  $\Lambda \sim \sin 2\omega$  (lihat contoh pada §50), berarti pula bahwa deret pada pers. [51.3] dibatasi oleh dua suku (masing-masing dengan  $l = \pm 2$ ). Oleh karena itu, perbedaan yang dicari didapat sebagai berikut

$$\Delta I \sim \exp(-2 \text{Im} \omega_0)$$

## 52. Gerak Periodik Bersyarat

Pandang suatu sistem mengandung beberapa derajat kebebasan yang mengalami gerak terbatas (*finite*) dalam sistem semua koordinat. Anggap bahwa besaran-besaran dalam persoalan dapat dipisahkan menurut metode Hamilton-Jacobi. Hal ini berarti bahwa pada pemilihan koordinat sembarang fungsi karakteristik mengandung penjumlahan sejumlah fungsi

$$S_0 = \sum S_i(q_i) \quad (52.1)$$

dan masing-masing fungsi tersebut hanya bergantung pada koordinat.

Momentum diperumum dalam kasus ini didefinisikan menurut persamaan

$$p_i = \frac{\partial S_0}{\partial q_i} = \frac{\partial S_i}{\partial q_i},$$

maka setiap fungsi  $S_i$  dapat dinyatakan dalam bentuk

$$S_i = \int p_i dq_i \quad (52.2)$$

Fungsi-fungsi ini tidak jelas. Oleh karena itu gerak, terbatas maka setiap koordinat hanya dapat mempunyai harga dalam suatu interval tertentu. Jika  $q_i$  dalam interval tersebut membesar kemudian kembali mengecil (harga  $q_i$  berjalan maju dan mundur kembali), terdapat pertambahan aksi sebesar

$$\Delta S_0 = \Delta S = 2\pi I_i \quad (52.3)$$

dengan  $I_i$  sebagai integral

$$I_i = \oint p_i dq_i \quad (52.4)$$

berarti bahwa setiap perubahan dari  $q_i$  menyebabkan pertambahan <sup>11)</sup>.

Selanjutnya pandang transformasi kanonik, analog seperti telah dibahas pada §50 untuk satu derajat kebebasan. Variabel baru adalah  $I_i$  dan koordinat sudut

$$\omega_i = \frac{\partial S_0(q, I)}{\partial I_i} = \sum_k \frac{\partial S_k(q_k, I)}{\partial I_i} \quad (52.5)$$

dengan fungsi yang timbul merupakan aksi yang dinyatakan dalam koordinat baru dan besaran  $I_i$ ; persamaan gerak dalam variabel ini dapat ditulis menjadi

11) Patut diketahui bahwa hal ini berhubungan dengan perubahan koordinat  $q_i$  secara formal, dalam daerah interval yang diperbolehkan dan tidak berhubungan dengan perubahan selama bergerak dalam satu periode (seperti telah dibahas dalam gerak satu dimensi sebelumnya). Gerak terbatas sebenarnya suatu sistem yang mempunyai beberapa derajat kebebasan untuk kasus umumnya tidak hanya seluruhnya, tetapi untuk setiap koordinat tidak periodik (lihat penjelasan selanjutnya).

$$\dot{I}_i = 0, \quad \omega_i = \frac{\partial E(I)}{\partial I_i}$$

dan diperoleh

$$I_i = \text{konstan},$$

$$\omega_i = \frac{\partial E(I)}{\partial I_i} t = \text{konstanta}. \quad (52.6)$$

Selanjutnya diperoleh pula, analog seperti pada pers [50.7], bahwa suatu perubahan total dari variabel  $q_i$  (membesar dan mengecil kembali) akan menyebabkan penambahan  $\omega_i$  sebesar  $2\pi$  sesuai dengan

$$\Delta\omega_i = 2\pi \quad (52.7)$$

Dengan perkataan lain fungsi  $\omega_i(q, I)$  merupakan fungsi koordinat yang lebih jelas dan dapat mengalami perubahan kelipatan dari  $2\pi$ , dalam berlangsungnya gerak koordinat kembali ke harga semula. kenyataan ini merupakan sifat dari fungsi  $\omega_i(p, q)$  (dinyatakan dalam koordinat dan momentum) yang diformulasikan dalam ruang fase dari sistem. Oleh karena itu, fungsi  $I_i$  merupakan fungsi yang nyata dari  $p$  dan  $q$ , maka dengan mensubstitusikan  $I_i(p, q)$  akan diperoleh fungsi  $I_i(p, q)$  yang berlangsungnya gerak dapat mengalami perubahan kelipatan dari  $2\pi$  (atau nol) di dalam ruang fase.

Dari kenyataan ini bahwa setiap fungsi  $F(p, q)$  dari keadaan-keadaan sistem<sup>12)</sup>, dinyatakan melalui variabel kanonik yang menggambarkan

---

12) "Koordinat rotasi", sudut  $\phi$  (lihat catatan kaki pada §49) adalah tidak nyata berhubungan dengan keadaan sistem; dalam hal ini  $\phi$  yang saling berbeda  $2\pi$  satu sama lain menyatakan posisi sistem yang sama. Jika selain koordinat  $q$  terdapat pula koordinat sudut, fungsi  $F(p, q)$  koordinat sudut hanya dapat dinyatakan dalam  $\cos \phi$  atau  $\sin \phi$ , agar diperoleh hubungan nyata dengan keadaan sistem.

suatu fungsi terhadap sudut, dengan periode setiap variabel adalah sama dengan  $2\pi$ . Fungsi ini dapat dinyatakan dalam deret Fourier, seperti

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \dots l_s} e^{i(l_1 \omega_1 + \dots + l_s \omega_s)}$$

( $l_1, l_2, \dots, l_s$  adalah bilangan bulat). Dengan mensubstitusikan ke pers [52.6] diperoleh ketergantungan fungsi  $\mathcal{F}$  terhadap waktu sebagai berikut

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \dots l_s} \exp \left\{ i t \left( l_1 \frac{\partial E}{\partial l_1} \cdots l_s \frac{\partial E}{\partial l_s} \right) \right\} \quad (52.8)$$

Setiap suku dalam penjumlahan di atas merupakan fungsi periodik terhadap waktu dengan frekuensi

$$l_1 \omega_1 + l_2 \omega_2 + \dots + l_s \omega_s \quad (52.9)$$

yang menggambarkan penjumlahan dari kelipatan frekuensi dasar

$$\omega_i = \frac{\partial E}{\partial l_i} \quad (52.10)$$

Apabila penjumlahan frekuensi pada pers. [52.9] merupakan kelipatan dari bilangan bulat (melainkan bilangan rasional) dari frekuensi, penjumlahan seluruhnya bukan fungsi periodik. Hal ini juga berlaku untuk koordinat  $q$  dan  $p$  dari sistem.

Untuk terakhir (penjumlahan frekuensi dengan kelipatan bilangan rasional) gerak umumnya bukan gerak periodik, baik secara keseluruhan,

maupun untuk setiap koordinat. Sistem demikian, setelah melewati beberapa keadaan untuk beberapa waktu kemudian, tidak akan mencapai keadaan yang sama dua kali. Akan tetapi, dapat pula diharapkan bahwa untuk waktu yang amat panjang sistem akan dapat mencapai suatu keadaan sembarang yang berdekatan dengan keadaan awal. Gerak seperti ini akan dapat diamati jika gerak tersebut dinamakan sebagai *gerak periodik bersyarat*.

Untuk kasus khusus berbeda dua frekuensi dasar  $\omega_i = \partial E / \partial I_i$ , mempunyai harga yang sama (untuk harga  $I_i$  berbeda). Kasus demikian berhubungan dengan apa yang disebut sebagai *degenerasi*. Jika terdapat  $s$  frekuensi dasar mempunyai harga yang sama, gerak sistem dikatakan mengalami *degenerasi sempurna*. Untuk kasus terakhir gerak adalah periodik dan lintasan seluruh partikel adalah tertutup.

Degenerasi menyebabkan mengecilnya jumlah variabel independen  $I_i$  di mana energi sistem tergantung padanya. Dianggap bahwa frekuensi  $\omega_1$  dan  $\omega_2$  saling berhubungan menurut persamaan

$$n_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} = n_2 \frac{\partial E}{\partial I_2} \quad (52.11)$$

dengan  $n_1$  dan  $n_2$  adalah bilangan bulat. Maka diperoleh kesimpulan bahwa energi sistem demikian hanya bergantung pada  $n_2 I_1 + n_1 I_2$ .

Suatu hal penting dari gerak terdegenerasi adalah bertambahnya jumlah integral gerak yang nyata dibandingkan dengan kasus umum lainnya untuk sistem yang tidak mengalami degenerasi (dengan derajat kebebasan yang sama). Tanpa degenerasi  $2s - 1$  integral gerak seluruhnya hanya akan membentuk fungsi keadaan sistem yang jelas sebanyak  $s$ ; secara keseluruhan misalnya terdapat besaran  $I_i$  sebanyak  $s$ .  $s-1$  Integral gerak lainnya dapat ditulis sebagai perbedaan

$$\omega_i \frac{\partial E}{\partial I_k} - \omega_k \frac{\partial E}{\partial I_i} \quad (52.12)$$

Konstanta besaran ini dapat dinyatakan oleh pers. [52.6]; karena adanya variabel sudut yang bertambah jelas menyebabkan fungsi bukan lagi merupakan fungsi yang jelas dari keadaan sistem.

Degenerasi menyebabkan pula bertambahnya posisi. Oleh karena itu, relasi pada pers. [52.11] akan terdapat hubungan yang lebih jelas dari integral

$$\omega_k n_k - \omega_l n_l \quad (52.13)$$

untuk kemungkinan penambahan suatu perkalian bilangan bulat dengan  $2\pi$  sehingga untuk memperoleh persamaan integral yang baru, cukuplah digunakan relasi trigonometri dari besaran-besaran ini.

Gerak di dalam medan sentral  $U = -\alpha/r$ , misalnya mengalami degenerasi (lihat contoh 95 pada bab ini). Keadaan demikian akan menyebabkan munculnya integral gerak pers. [15.17] yang baru selain dua integral gerak yang nyata lainnya (misalnya, jika gerak terjadi pada bidang datar, seperti dipandang dalam pembahasan ini), yang terjadi untuk gerak di dalam medan gaya sentral, yaitu momentum angular  $M$  dan energi  $E$ .

Selanjutnya dapat pula dicatat bahwa adanya integral gerak tambahan yang nyata menyebabkan pula adanya sifat degenerasi gerak sebagai berikut.

Andaikan integral gerak tersebut memenuhi metode separasi variabel untuk berbagai sistem koordinat, tidak hanya satu sistem koordinat tertentu<sup>13)</sup>. Oleh karena itu, besaran  $I_i$  menyatakan koordinat demikian, di mana memungkinkan separasi variabel dapat dilakukan untuk memperoleh integral gerak yang nyata. Untuk kasus degenerasi jumlah integral gerak lebih besar dari  $s$  maka pemilihan dari masing-masing integral tersebut, yang disimbolkan dengan variabel  $I_i$  tidak lagi menjadi jelas.

13) Belum dibahas kasus tentang transformasi koordinat trivial, seperti  $q'_1 = q'_1(q_1)$ ,  $q'_2 = q_2$ ,  $(q_2)$ .

Sebagai contoh perhatikan kembali gerak Kepler, yang dapat memenuhi separasi variabel baik dalam sistem koordinat bola maupun parabola.

Dalam paragraf sebelumnya telah pula ditunjukkan bahwa pada gerak terbatas untuk suatu dimensi variabel aksi merupakan suatu invarian adiabatik. Pernyataan ini juga berlaku untuk sistem mengandung beberapa derajat kebebasan. Pembuktian secara langsung tentang ini dapat dilakukan dengan merumuskan kembali menurut prosedur yang sama seperti telah dijelaskan pada permulaan pembahasan §51.

Untuk sistem satu dimensi dengan parameter dapat berubah  $\lambda(t)$  akan menghasilkan persamaan gerak kanonik untuk rumusan variabel aksi yang mengalami perubahan terhadap waktu  $I_p$ , analog seperti pada pers. [50.10]

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega_i} \dot{\lambda}, \quad (52.14)$$

seperti telah diketahui sebelumnya bahwa  $\Lambda = (\partial S_0 / \partial \chi)_t$ . Perataan besaran ini untuk suatu interval waktu tertentu adalah lebih besar, dibanding dengan periode dasar dari sistem. Akan tetapi, kecil dibandingkan dengan waktu, sementara parameter  $\chi$  sendiri mengalami perubahan cukup nyata. Oleh karena itu, tanda rata-rata pada  $\dot{\lambda}$  tidak lagi digunakan dan pada perataan turunan  $\partial \Lambda / \partial \omega_i$ , diandaikan bahwa gerak berlangsung dengan  $\lambda$  konstan sehingga gerak sendiri dipandang sebagai gerak periodik bersyarat. Dalam kasus ini  $\Lambda$  merupakan fungsi nyata periodik dari variabel sudut  $\omega_i$  dan harga rata-rata dari turunan  $\partial \Lambda / \partial \omega_i$  adalah sama dengan nol.

Sebagai penutup akan dibuat beberapa catatan tentang sifat-sifat dari gerak terbatas suatu sistem tertutup dengan  $s$  derajat kebebasan untuk kasus umum, yaitu untuk kasus di mana variabel yang terdapat pada persamaan Hamilton-Jacobi tidak dapat diseparasi.

Sifat utama dari sistem yang mengandung variabel dapat dipisahkan adalah mengandung integral gerak  $I_i$  yang jelas, dengan jumlahnya sama dengan jumlah derajat kebebasan. Kasus umum untuk sistem yang mengandung variabel tidak dapat dipisahkan integral gerak dibatasi oleh pernyataan konstanta dari homogenitas dan sifat isotropik ruang dan waktu, atau dengan perkataan lain bergantung pada hukum kekekalan energi dan momentum angular.

Lintasan fase sistem melintasi suatu daerah di dalam ruang fase, yang ditentukan oleh harga-harga konstanta yang diketahui dari integral gerak. Untuk suatu sistem yang mengandung variabel dapat dipisahkan dan  $s$  integral yang nyata dengan kondisi demikian akan membentuk permukaan *hyper* tertentu di dalam ruang fase. Dengan berjalannya waktu yang cukup panjang lintasan sistem akan menapak permukaan *hyper* lebih rapat.

Pada sistem yang mengandung variabel tidak dapat dipisahkan dan mengandung pula integral gerak nyata yang lebih sedikit dari (untuk derajat kebebasan  $s$  yang sama) lintasan fase akan memenuhi daerah ruang fase (seluruhnya atau sebagian) berdimensi banyak.

Akhirnya patut pula diketahui hal sebagai berikut. Jika fungsi Hamilton suatu sistem hanya dibedakan oleh suku yang kecil dari suatu fungsi yang memenuhi separasi variabel, akan terdapat pula gerak yang mirip dengan gerak periodik bersyarat, dengan derajat kemiripan akan sangat besar dibanding dengan derajat kekecilan suku yang terkandung dalam fungsi Hamilton tersebut.

**Contoh 95:** Hitung variabel aksi untuk suatu gerak eliptik dalam medan  $U = -\alpha/r$ .

**Penyelesaian:** Dalam koordinat polar  $r, \phi$  pada permukaan gerak berlaku

$$I_{\varphi} = \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} p_{\varphi} d\varphi = M.$$

$$I_r = \frac{2}{2\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m \left( E + \frac{\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2} \right)} dr = -M + \alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|}}.$$

Dalam hal ini akan diperoleh energi sebagai fungsi variabel aksi sebagai berikut

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2(I_r + I_{\varphi})^2}.$$

Energi hanya bergantung pada  $I_r$  dan  $I_{\varphi}$  yang berarti gerak mengalami degenerasi; kedua frekuensi untuk  $r$  dan  $\varphi$  adalah sama.

Ketergantungan parameter lintasan  $p$  dan  $e$  (lihat pers. [15.4]) terhadap  $I_r$  dan  $I_{\varphi}$  adalah

$$p = \frac{I_{\varphi}^2}{m\alpha}, \quad e^2 = 1 - \left( \frac{I_{\varphi}}{I_r + I_{\varphi}} \right)^2.$$

Oleh karena itu, invarian adiabatik besaran  $I_r$  dan  $I_{\varphi}$  eksentrisitas lintasan  $e$  pada perubahan  $\alpha$  atau  $m$  yang lambat adalah tetap konstan, sementara ukurannya menjadi sebaliknya, barulah sebanding dengan kebalikan  $m$  dan  $\alpha$ .

**Indeks**

- aturan, 142
- aksi, 4
- prinsip terkecil, 326
- tersingkat, 331
- variabel, 367
- amplitudo
  - getaran, 134
  - amplitudo kompleks, 135
  - anharmonisitas, 197
  - aperiodik gerak, 177
  - benda tegar, 233
  - degenerasi, 157
  - derajat kebebasan, 2
  - dispersi 183
  - dissipasi energi, 173
  - fungsi, 178
- eksentrisitas,  $e$ , 83
- energi
  - Euler persamaan, 272
  - sudut, 260
  - teoreme, 54
  - Foucault bandul, 306
  - Galilei persamaan transformasi, 14
  - prinsip relativitas, 13
  - Hamilton\_Jacobi persamaan diferensial, 346
  - dalam, 41
  - kineti, 19
  - rotasi, 230
  - translasi, 230
  - peluruhan, 94
  - potensial, 19
  - sebagai integral gerak, 34
  - sentrifugal, 303
  - faktor redaman, 174
  - fase getaran, 134
  - lintasan, 343
  - ruang, 342
  - frekuensi eigen 153
  - sudut, 134
  - fungsi Routh, 315
  - fungsi theta, 282
- Lagrange fungsi, 5
- Legendre transformasi, 310, 338
- Liouville teorema, 345
- Mathhieus persamaan diferensial, 190
- Maupertius prinsip. 332
- Poisson

- Hamilton  
 prinsip, 4  
 Hamilton-Jacobi  
 persamaan, 310  
 Jacobi  
 fungsi eliptik, 278  
 identitas, 320  
   bola, 233  
   simetri, 233  
   tidak simetri, 233  
 gaya  
   gesek, 174, 288  
   koriolis, 301  
   paksaan  
   lihat gaya reaksi, 288  
   reaksi, 288  
   sentrifugal, 302  
 gaya diperumum, 38  
 gaya sentrifugal, 73  
 gerak  
   degenerasi, 380  
   degenerasi sempurna, 380  
   integral, 31  
   meluncur, 288  
   menggelinding, 288  
   periodik bersyarat, 376  
   periodik bersyarat, 380  
 gerak presesi  
   beraturan, 252  
 getaran  
 integral gerak, 318  
 integral sempurna, 347  
 invarian adiabatik, 362  
 tanda kurung, 318  
 teorema, 322  
 Routh  
 fungsi, 315  
 Rutherford  
 rumusan, 121  
 L'Hospital  
 amplitudo, 134  
 antisimetri molekul, 168  
 bebas, 140  
 dipaksakan, 139  
 fase, 134  
 frekuensi sudut, 134  
 kecil, 131  
 kombinasi, 200  
 mengambang, 143  
 molekul, 163  
 normal  
   molekul, 165  
 resonansi, 142  
   simetri molekul, 168  
   tidak linier, 197, 203  
 holonomik  
   syarat, 290  
 hukum kekekalan  
   energi, 34  
 momentum linier, 35  
 inersial  
   sistem koordinat, 11  
 medan  
   berosilasi cepat, 217  
 medan sentral, 69  
 momen kelembaman

- kanonik
  - besaran konyugat, 340
  - persamaan, 311
  - variabel, 337
- kecepatan, 2
  - sudut, 226
  - translasi, 226
  - kecepatan luas, 71
- kelembaman
  - hukum, 12
- konservatif
  - sistem, 34
- koordinat, 1
  - normal, 156
  - utama, 156
- koriolis
  - gaya, 301
- massa reduksi, 67
- permukaan
  - kasar sempurna, 289
  - licin sempurna, 289
- persamaan
  - Hamilton, 310
- diferensial Hamilton
  - Jacobi 346
  - gerak, 4
  - kanonik, 311
  - transformasi Galilei, 14
- persamaan ketergantungan, 290
- persamaan
  - diferensial Mathieus, 190
- presesi
  - prinsipal, 233
- momentum
  - angular, 43, 45, 249
  - angular karakteristik, 250
  - diperumum, 38
  - linier, 35, 36
  - putar
    - lihat momentum angular, 249
  - nonholonomik
    - syarat, 290
  - nutasi, 266
  - peluruhan
    - partikel, 93
  - penampang lintang
    - hamburan, 111
  - percepatan, 2
    - getaran, 142
    - getaran tidak linier 203
    - parametris, 189
  - reversibel
    - sistem, 20
  - rotasi
    - sumbu sesaat, 228
  - rotator, 235
  - sentrifugal
    - energi, 303
    - gaya, 302
  - separasi variabel, 351
  - siklik, 69
  - sikloida

- gerak monoton, 266
- prinsip
  - Hamiltoian, 4
  - Mampertius, 332
- laboratorium, 95
  - relativitas Galilei, 13
- resonansi
  - FWHM, 184
  - rotasi sesaat, 288
- sumbu figur, 263
- sumbu prinsipal, 323
- sumbu utama, 232
- tanda kurung
  - Poisson, 318
- tensor
  - kelembaman, 231
    - momen kelembaman, 231
- teorema
  - Poisson, 322
- titik balik, 59
- titik berat, 39
- titik massa, 1
- transformasi
  - Legendre, 338
  - kanonik, 337
  - titik, 336
  - tumbukan
    - elestik, 102
    - parameter, 110
    - partikel, 93
- sistem
  - koordinat inersial, 11
  - sistem acuan koordinat
    - aksi terkecil, 4, 326
    - pusat massa, 95
  - sistem koordinat
    - diperumum, 3
  - sumbu
    - variabel
      - aksi, 367
      - kanonik, 367
      - sudut, 367
  - virial
    - kaedah, 54
  - waktu
    - homogenitas, 33