



LIMAS

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan,
Riset, dan Teknologi

ZI - WBK

ZONA INTEGRITAS - WILAYAH BEBAS DARI KORUPSI

Edisi Nomor 45, November 2021



TRANSFORMASI PEMBELAJARAN MATEMATIKA MASA PANDEMI COVID-19

DASAR-DASAR TEORI BILANGAN UNTUK PEMBINAAN OLIMPIADE MATEMATIKA DI SEKOLAH (BAGIAN 1)

PEMBELAJARAN HIMPUNAN MENGGUNAKAN GEOGEBRA

MENDESAIN ULANG SOAL MATEMATIKA DENGAN KERANGKA REASONING-AND-PROVING



p4tkmatematika.kemdikbud.go.id



[p4tkmatematika.kemdikbud](https://www.facebook.com/p4tkmatematika.kemdikbud)



[p4tkmatematika.kemdikbud](https://www.instagram.com/p4tkmatematika.kemdikbud)



[p4tkmatematika](https://twitter.com/p4tkmatematika)



[p4tkmatematika kemdikbud](https://www.youtube.com/p4tkmatematika)



TIM REDAKSI

Pengarah

Plt. Kepala PPPPTK Matematika
Hari Suryanto, S.IP., MPA.

Penanggung Jawab

Harwasono, S.Kom., MM.

Redaktur

Rina Kusumayanti, S.Sos.

Editor

Dra. Th. Widyantini, M.Si.
Agus Dwi Wibawa, S.Pd., M.Si.
Rumiati, M.Ed.
Arfianti Lababa, S.Pd. M.Pd.
Fadjar Noer Hidayat, S.Si., M.Ed.
Jakim Wiyoto, S.Si.
Yudom Rudianto, M.Pd.

Sekretariat

Cahyo Sasongko, S.Sn.
Resti Utaminingsih, S.E.
Supriyadi

ALAMAT REDAKSI

PPPPTK Matematika Yogyakarta

Jl. Kaliurang Km.6, Sambisari, Depok, Sleman,
D.I.Yogyakarta



: (0274) 885725, 881717



: (0274) 885752



: p4tkmatematika.kemdikbud.go.id



: limas.p4tkmatematika@gmail.com

Diterbitkan : Pusat Pengembangan dan
Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga
Kependidikan Matematika

Izin terbit :

No. 2426/Ditjen
PPG/STT/1998

DARI REDAKSI

Redaksi menerima tulisan atau artikel dari pembaca. Artikel yang dimuat akan mendapatkan imbalan sepantasnya, sedangkan yang tidak dimuat akan dikembalikan ke penulis. Redaksi berhak memperbaiki naskah yang akan dimuat tanpa mengubah makna/isi. Kritik atau saran dikirim langsung ke redaksi **LIMAS**



Salam Redaksi

Assalamualaikum wr wb

Syukur Alhamdulillah, Buletin LIMAS Edisi Nomor 45, November 2021 dapat kami selesaikan dengan baik. Redaksi menyampaikan apresiasi yang tinggi kepada semua penulis yang telah berpartisipasi membagi pengetahuannya melalui Buletin LIMAS, namun tidak semua tulisan dapat kami terbitkan dikarenakan keterbatasan halaman dan juga berdasarkan proses seleksi dari tim kami. Meski demikian, kami harapkan tulisan yang diterbitkan pada edisi ini dapat bermanfaat dan menambah wawasan bagi para pembaca sekalian. Kami tetap menunggu partisipasi dari semua khalayak untuk mengirimkan tulisan dengan tema yang terkait dunia matematika dan pendidikan matematika ke Buletin LIMAS. Saran dan kritik untuk menjadikan LIMAS lebih baik lagi kedepan tetap kami nantikan dari Anda semua.

Terima kasih.

Sampul Depan



Kegiatan
Olimpiade
Nasional Inovasi
Pembelajaran
(ONIP)
Matematika 2021
tanggal
16 s.d 20
November 2021
di Museum
Benteng
Vredenburg
Yogyakarta.

DAFTAR ISI



2 Melatih Tanggung Jawab Siswa Melalui Tujuan dan Kesepakatan Belajar

9 Transformasi Pembelajaran Matematika Masa Pandemi COVID-19



14 Membangun Siswa dengan Umpan Balik di Google Sheets

19 Dasar-dasar Teori Bilangan untuk Pembinaan Olimpiade Matematika di Sekolah (bagian 1)



30 Pembelajaran Himpunan Menggunakan GeoGebra

40 Pembelajaran Sosial dan Emosional Berdasarkan Kerangka CASEL

47 Mendorong Siswa Kelas 7-12 untuk Bernalar dan Membuktikan



54 Pemanfaatan Blog Matematika Sebagai Media Pembelajaran Dalam Jaringan

62 Mendesain Ulang Soal Matematika dengan Kerangka *Reasoning-and-Proving*



70 Pemanfaatan Google Classroom dari Akun Belajar.id dengan Fitur yang Semakin Lengkap



MELATIH TANGGUNG JAWAB SISWA MELALUI TUJUAN DAN KESEPAKATAN BELAJAR

<https://sindonesia.com>

*) Siti Ramziah

Dalam pembelajaran matematika tentu sangat diperlukan beragam upaya yang dilakukan guru untuk membuat rasa nyaman pada siswa sehingga dapat menyerap pembelajaran dengan mudah. Upaya tersebut antara lain meliputi penggunaan media, metode, pendekatan, model pembelajaran, sumber belajar dan sebagainya. Tentunya, hal tersebut tidak hanya bertujuan untuk mencapai tujuan pembelajaran tetapi juga membentuk karakter siswa sebagai profil pelajar pancasila. Profil tersebut meliputi beriman, bertakwa kepada Tuhan YME dan berakhlak mulia, kreatif, gotong royong, berkebhinekaan global, bernalar kritis dan mandiri.

Hal tersebut dapat diwujudkan dengan menanamkan sikap disiplin positif pada siswa. Yuannita (2020) mengatakan bahwa disiplin merujuk pada praktik mengajar atau melatih seseorang untuk mematuhi peraturan atau perilaku dalam jangka pendek dan jangka panjang dengan tujuan akhirnya adalah agar siswa memahami perilaku mereka sendiri, mengambil inisiatif, menjadi bertanggung jawab atas pilihan mereka dan menghargai diri mereka sendiri dan orang lain. Beberapa hal yang dapat dilakukan oleh guru untuk melatih disiplin positif yang terintegrasi dalam proses pembelajaran dan bermuara pada pribadi yang bertanggung jawab adalah sebagai berikut.

1. Tujuan Belajar

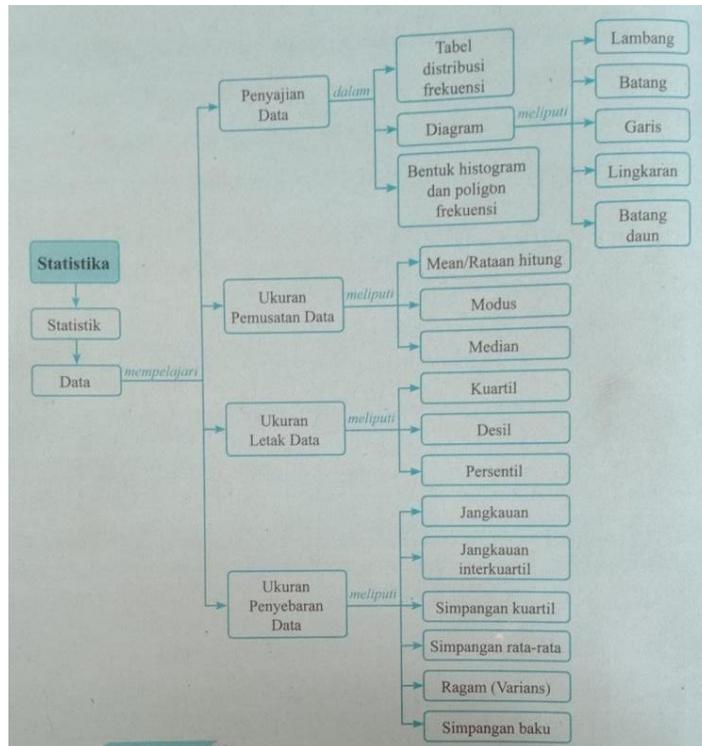
Dalam mendesain rancangan pembelajaran dapat dipastikan guru telah mencantumkan tujuan pembelajaran untuk mencapai kompetensi dasar yang ingin dicapai. Selain itu, tak jarang juga guru melakukan *energizer* atau *ice breaking* untuk meningkatkan konsentrasi dan semangat siswa sebelum memulai pembelajaran. Namun, masih jarang guru melibatkan siswa untuk menulis tujuan belajarnya sendiri atas materi yang akan dipelajari dalam kompetensi dasar tersebut.

Dengan adanya tujuan yang dibuat oleh siswa maka siswa menjadi paham terhadap sasaran yang akan dituju sesuai dengan kemampuan yang ada dalam dirinya. Beberapa tahapan yang dapat dilakukan guru agar dapat melibatkan peserta didik dalam menentukan tujuan belajarnya sebagai berikut.

a. Penyajian peta konsep materi

Pada tahapan ini, diharapkan guru dapat menyiapkan peta konsep terkait materi yang akan dipelajari berupa bahan tayang ataupun dalam bentuk lembaran kertas yang dibagikan ke peserta didik. Selanjutnya, guru dapat mendeskripsikan lisan secara umum atas sajian peta konsep tersebut sehingga dapat membuka wawasan peserta didik terkait gambaran materi yang akan dipelajari. Selain itu, guru juga dapat membangkitkan minat dan motivasi siswa terhadap materi yang akan dipelajari dengan memberikan contoh aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari.

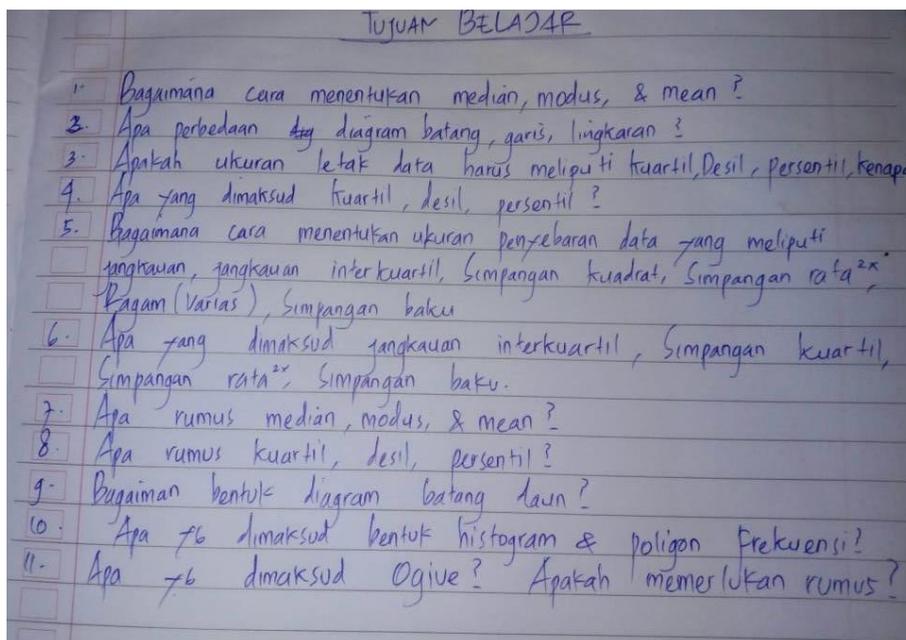
Peta konsep yang pernah penulis sajikan dalam pembelajaran statistika di SMAN 1 Banjar Margo dapat dilihat pada gambar 1 berikut.



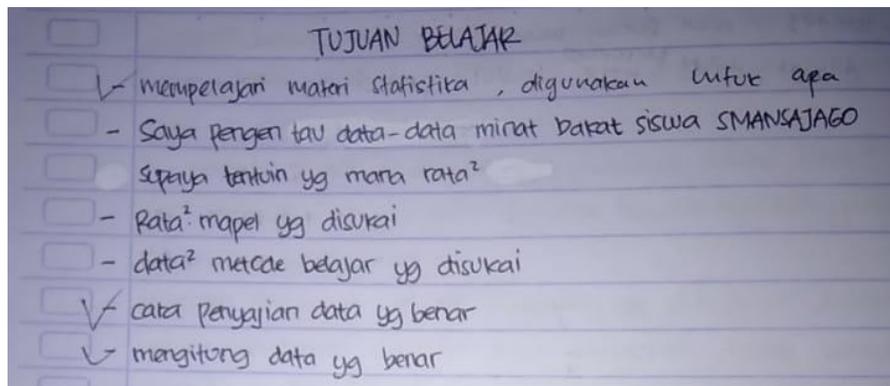
Gambar 1. Peta Konsep Statistika (Sembring dan Marsito, 2018)

b. Menulis tujuan belajar

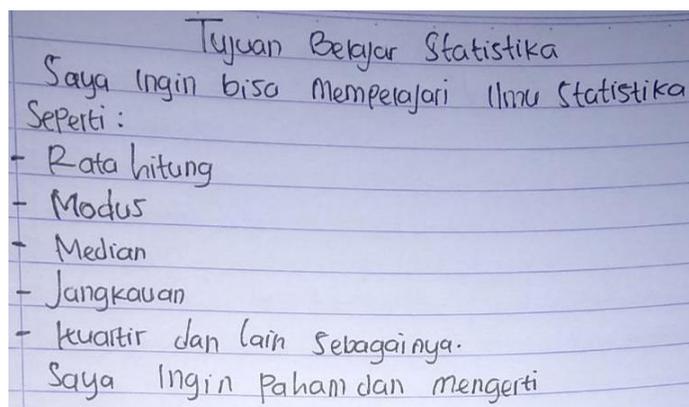
Berdasarkan paparan dari guru terkait gambaran umum peta konsep materi, selanjutnya siswa didorong untuk menuliskan apa saja yang ingin diketahuinya di buku catatan. Beberapa tujuan belajar yang pernah ditulis oleh siswa kelas XII SMAN 1 Banjar Margo dapat dilihat pada gambar-gambar berikut.



Gambar 2. Tujuan Belajar yang dibuat oleh Siswa (1)



Gambar 3. Tujuan Belajar yang dibuat oleh Siswa (2)



Gambar 4. Tujuan Belajar yang dibuat oleh Siswa (3)

Ragam tujuan belajar akan muncul dari siswa. Hal tersebut menunjukkan bahwa setiap siswa adalah unik dan tidak dapat disamakan antara yang satu dengan yang lain. Hal ini sesuai dengan pandangan Ki Hajar Dewantara (1977) yang mengatakan bahwa anak-anak itu sebagai makhluk, manusia, dan benda hidup, sehingga mereka hidup dan tumbuh menurut kodratnya sendiri. Kaum pendidik hanya dapat menuntun tumbuh atau hidupnya kekuatan itu, agar dapat memperbaiki lakunya (bukan dasarnya) hidup dan tumbuhnya itu.

c. Konfirmasi dan Penguatan

Guru meminta peserta didik untuk menyampaikan secara lisan terkait tujuan belajar yang telah dituliskannya. Perbedaan tujuan belajar yang diutarakan oleh setiap siswa menunjukkan usaha dalam dirinya dalam mencapai sesuatu sesuai dengan kemampuannya. Meskipun demikian, guru sangat diperlukan untuk mengapresiasi atas apa yang telah ditulis oleh siswa tersebut sebagai motivasi untuk meningkatkan kepercayaan diri siswa dalam belajar.

Senada dengan dengan yang diungkapkan oleh Marno dan Idris (2008) bahwa seorang guru perlu menguasai keterampilan dasar memberi penguatan. Dalam pandangannya, penguatan merupakan respon positif yang dilakukan guru atas perilaku positif yang dicapai anak dalam proses belajarnya dengan tujuan sebagai berikut:

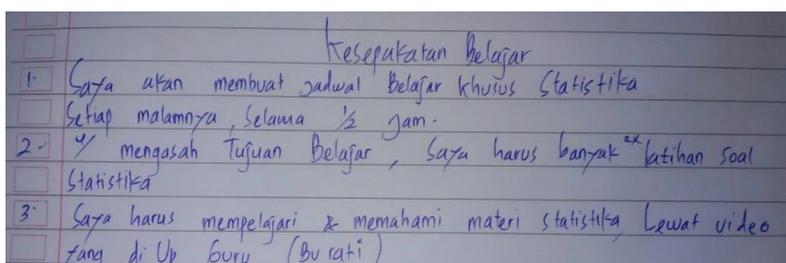
- 1) Meningkatkan perhatian siswa dalam proses belajar.
- 2) Membangkitkan, memelihara, dan meningkatkan motivasi belajar siswa.
- 3) Mengarahkan pengembangan berpikir siswa ke arah berpikir divergen.
- 4) Mengatur dan mengembangkan diri anak sendiri dalam proses belajar.
- 5) Mengendalikan serta memodifikasi tingkah laku siswa yang kurang positif serta mendorong munculnya tingkah laku yang produktif.

2. Kesepakatan Belajar

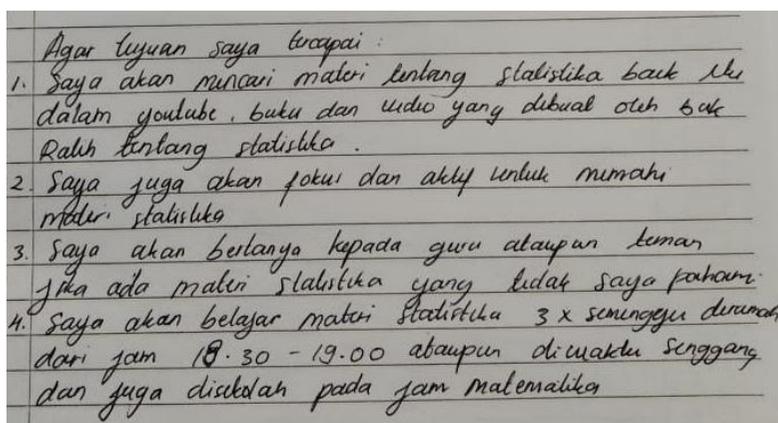
Jika kita maknai lebih mendalam tentang tujuan pendidikan menurut Ki Hajar Dewantara di atas, yang lebih lanjut dikaitkan dengan tujuan belajar yang dibuat oleh siswa maka guru perlu berperan menuntun siswa tersebut agar dapat mengembangkan potensi dalam dirinya sebagai upaya mencapai tujuan yang diinginkannya. Upaya tersebut dapat dilakukan dengan mengarahkan siswa untuk sungguh-sungguh berkomitmen pada dirinya sendiri agar tidak hilang arah dari tujuannya melalui kesepakatan. Yuannita, dkk (2020) mengatakan bahwa kesepakatan kelas merupakan salah satu langkah dalam menerapkan budaya disiplin positif dan dapat membantu proses belajar mengajar yang lebih mudah dan tidak menekan.

Oleh karena itu, untuk mencapai tujuan belajar yang diinginkan, siswa dapat membuat kesepakatan belajar untuk dirinya sendiri agar dapat bertanggung jawab secara mandiri atas apa yang menjadi komitmennya. Dalam membuat kesepakatan belajar, guru perlu mengarahkan siswa agar dapat menuliskan secara rinci seperti waktu, kegiatan yang dilaksanakan, orang yang terlibat, dan sebagainya. Hal ini bertujuan untuk menyederhanakan langkah yang dipilih oleh siswa sehingga dapat dengan mudah dilaksanakan dalam implementasinya.

Selanjutnya, guru dapat meminta siswa menyebutkan kesepakatan belajarnya secara detail agar dapat disaksikan bersama atas kesepakatan yang dibuatnya. Berbagai kesepakatan belajar akan berbeda dari setiap siswa. Namun, yang terpenting dalam hal ini adalah guru tetap memberikan penguatan atas kesepakatan diri siswa dalam belajar dan membimbing, mengarahkan siswa agar kesepakatan yang dibuat mencakup kegiatan, waktu, tempat, orang yang terlibat. Beberapa contoh kesepakatan belajar siswa kelas XII SMAN 1 Banjar Margo sebagai berikut:



Gambar 5 : Kesepakatan belajar siswa (1)



Gambar 6 : Kesepakatan Belajar Siswa (2)

Kesepakatan Belajar	
<input type="checkbox"/>	
<input checked="" type="checkbox"/> 1.	Belajar saat Malam hari ketika besek ada mapel Matematika dan Jam 8 - 8.30 malam
<input type="checkbox"/>	
<input checked="" type="checkbox"/> 2.	Bertanya kepada Anis atau dapina jika belum paham (Lewat wa)
<input type="checkbox"/>	
<input checked="" type="checkbox"/> 3.	Jika Masih belum paham tanya Pakailbu Rati di Sekolah.
<input type="checkbox"/>	

Gambar 7 : Kesepakatan Belajar Siswa (3)

Refleksi

Tahap terakhir dari pembelajaran suatu kompetensi dasar adalah dengan melibatkan siswa untuk refleksi. Sanders (2009) menyatakan bahwa refleksi adalah sebagai suatu proses berpikir kembali sehingga dapat diinterpretasikan atau dianalisis. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa pada tahap ini, yang perlu dilakukan guru antara lain:

1. mendorong siswa untuk merenungi, memikirkan terkait tujuan belajar baik yang sudah maupun belum tercapai, atau hal-hal yang telah diperoleh selama pembelajaran berlangsung meliputi perasaan, pengetahuan, keterampilan ataupun sikap dalam dirinya.
2. Mendorong siswa untuk merenungi, memikirkan atas komitmen implementasi atas kesepakatan belajar yang telah dibuatnya sehingga siswa dapat mengetahui upaya yang sudah baik dan yang perlu diperbaiki untuk pembelajaran selanjutnya.

Berdasarkan proses pembelajaran yang telah dilaksanakan melalui model pembelajaran, tujuan dan kesepakatan belajar diperoleh catatan perasaan siswa terkait dampak dari membuat tujuan dan kesepakatan belajar sebagai berikut:

Dampak menulis tujuan & kesepakatan belajar (perasaan & dampak)	
	Dampak positif :
	Bisa lebih percaya diri untuk bangkit dari yang namanya MALES BELAJAR. Dengan adanya tujuan belajar, saya bisa mengetahui Apa yang ingin saya capai, dibarengi dengan kesepakatan belajar yang artinya rasa komitmen untuk diri sendiri itu ada.
	Pasanya Senang... .. sekali bisa nyobain hal baru yang tidak bisa ditemukan di guru lain maupun sekolah lain, pasti jaran banget kan!
	Dampak negatif = Tidak ada.

Gambar 8. Testimoni Siswa (1)

Kesan yang saya rasakan setelah membuat Tujuan dan Kesepakatan belajar tersebut saya merasa kegiatan belajar saya lebih efektif, efisien dan sesuai target. Membuat Tujuan serta Kesepakatan belajar untuk diri kita sendiri itu sangat bermanfaat sekali sehingga membuat saya terinspirasi untuk menerapkan hal tersebut di pelajaran-pelajaran lain atau pun kegiatan kegiatan lain.

Gambar 9. Testimoni Siswa (2)

Dampak adanya tujuan belajar dan kesepakatan belajar :-

- memiliki target agar belajar lebih konsisten dan lebih baik
- Dapat mengetahui kelemahan dalam submateri yang diberikan juga mengetahui kelebihan dalam submateri
- lebih disiplin karena terdapat waktu yang telah disepakati oleh diri sendiri
- lebih bisa urutan belajar seperti materi → soal.
- mendapatkan kepuasan tersendiri dari hasil yang didapat karena telah berusaha maksimal dalam belajar dan mengatur waktu.

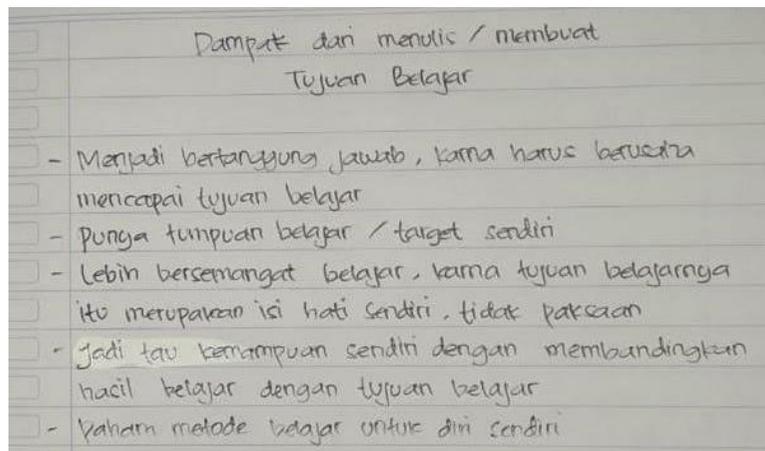
Gambar 10. Testimoni Siswa (3)

Dampak dari adanya tujuan belajar dan kesepakatan belajar

1. Melatih cara berpikir untuk menyusun materi mana yang harus kita pelajari terlebih dahulu
2. Mempermudah kita dalam mengingat materi karena tujuan belajar ditulis secara bertahap
3. Melatih rasa tanggung jawab terhadap diri sendiri dengan adanya kesepakatan kita belajar

dengan adanya tujuan belajar dan kesepakatan belajar saya merasa senang karena bisa mendahulukan yang seharusnya di dahulukan lantam tang untuk selalu mematuhi aturan belajar yg saya buat dan pastinya bangga ketika saya bisa mencapai tujuan belajar yang telah saya tulis.

Gambar 12. Testimoni Siswa (4)



Gambar 13. Testimoni Siswa (5)

Berdasarkan catatan perasaan siswa terkait dengan dampak adanya pembuatan tujuan dan kesepakatan belajar dapat disimpulkan bahwa secara umum, siswa menjadi lebih tanggung jawab atas kesepakatan belajar untuk mencapai tujuan belajarnya. Namun, secara khusus dapat disimpulkan bahwa:

1. Siswa dapat memahami apa yang menjadi tujuan belajarnya.
2. Siswa merasa senang, bersemangat dalam belajar untuk mencapai targetnya sesuai komitmen dalam dirinya.
3. Siswa menjadi lebih disiplin tanpa ada paksaan.
4. Siswa dapat merefleksi kelebihan dan kekurangan dalam dirinya terkait pembelajaran.
5. Siswa dapat memahami metode belajar yang sesuai dengan dirinya sendiri.

Daftar Pustaka

- Ki Hadjar Dewantara. (1977). *Bagian Pertama: Pendidikan*. Yogyakarta: Majelis Luhur Persatuan Taman Siswa.
- Marno dan Idris, M. (2008). *Strategi dan Metode Pengajaran: Menciptakan Keterampilan Mengajar yang Efektif dan Edukatif*. Yogyakarta: Ar-ruzz Media.
- Sandars, J. (2009). *The use reflection in medical education :AMEE guide no. 44*. Medical Teacher, 31, pp. 685-695
- Sembiring, S. dan Marsito. (2018). *Buku Teks Pendamping Matematika untuk siswa SMAN-MA/SMK-MAK Kelas XII*. Bandung: Yrama Widya.
- Yuannita, P. dkk. (2020). *Paradigma dan Visi Guru Penggerak: Budaya Positif*. Jakarta: Kemdikbud.

*) Siti Ramziah
SMAN 1 Banjar Margo, Kab. Tulang Bawah, Prov. Lampung



TRANSFORMASI PEMBELAJARAN MATEMATIKA MASA PANDEMI COVID-19

*) Dessi Kristiyani

A. Pendahuluan

Pengelolaan kelas merupakan salah satu tugas guru agar tujuan pembelajaran dapat tercapai secara efektif dan efisien. Masa pandemi COVID-19 telah mengubah pola pembelajaran, yang semula tatap muka menjadi pembelajaran jarak jauh (PJJ). Pembelajaran jarak jauh yang dilaksanakan guru bukan hanya menuntaskan capaian kurikulum, akan tetapi diharapkan memenuhi aspek pembelajaran seperti proses pengetahuan, moral, keterampilan, kecerdasan dan estetika. Berbagai kendala dan tantangan muncul seiring pelaksanaan PJJ, khususnya dalam pembelajaran matematika, sehingga transformasi pembelajaran harus dilakukan, agar tujuan pembelajaran dapat tercapai.

B. Pembelajaran Matematika Masa Pandemi COVID-19

Proses belajar mengajar merupakan satu rangkaian yang saling terkait dan tidak dapat dipisahkan. Kegiatan pembelajaran yang dilakukan guru merupakan salah satu penentu keberhasilan proses belajar siswa. Siswa akan belajar dengan lebih baik dan bermakna apabila kegiatan pembelajaran yang dipilih oleh guru relevan dan mendukung aktivitas belajar siswa. Pada saat guru dan ahli pendidikan mulai fokus untuk melaksanakan pembenahan proses pembelajaran dari *teacher center* menuju *student center*, pandemi Covid-19 melanda di hampir seluruh penjuru dunia, termasuk di Indonesia, mulai awal tahun 2020.

Pandemi Covid-19 berpengaruh besar terhadap berbagai sektor, termasuk sektor pendidikan. Pada protokol pencegahan penyebaran virus Covid-19 disebutkan bahwa masyarakat diminta untuk menghindari kerumunan atau pengumpulan orang, dan dalam konteks pembelajaran di sekolah, interaksi langsung antara guru, siswa dan warga sekolah, dalam satu lingkungan sekolah bisa saja menjadi sarana yang memiliki potensi besar untuk terjadinya penyebaran virus Covid-19. Oleh karena itu, pembelajaran jarak jauh menjadi upaya penting dalam rangka menekan penyebaran virus secara luas, khususnya di kalangan guru dan siswa.

Pada pembelajaran jarak jauh tidak ada interaksi tatap muka secara langsung antara guru dan siswa, dan dalam praktiknya mengharuskan pendidik maupun siswa berinteraksi dan melakukan transfer pengetahuan secara online dengan memanfaatkan *platform* berupa aplikasi, website, jejaring sosial maupun *learning management system*, atau lebih dikenal dengan pembelajaran daring. Pembelajaran daring merupakan pembelajaran yang menggunakan jaringan internet dengan aksesibilitas, konektivitas, fleksibilitas, dan kemampuan untuk memunculkan berbagai jenis interaksi pembelajaran (Sadikin & Hamidah, 2020). Pembelajaran ini merupakan inovasi pendidikan untuk

menjawab tantangan akan ketersediaan sumber belajar yang variatif. Keberhasilan dari suatu model ataupun media pembelajaran tergantung dari karakteristik peserta didiknya (Dewi, 2020). Kondisi tersebut tentunya mendesak guru untuk melakukan inovasi dan adaptasi terkait pemanfaatan teknologi yang tersedia untuk mendukung proses pembelajaran.

Kesiapan sumber daya manusia merupakan bagian penting dalam keberhasilan pelaksanaan pembelajaran jarak jauh, kesiapan ini berkaitan dengan kemampuan pengajar (guru) dan siswa dalam menggunakan serta mengelola segala sistem teknologi yang digunakan dalam proses pembelajaran jarak jauh. Pelaksanaan pembelajaran jarak jauh tidak mudah, terdapat banyak tantangan dan hambatan, khususnya pada pembelajaran eksak, salah satunya pembelajaran matematika. Guru matematika harus mampu menyajikan kegiatan pembelajaran jarak jauh yang menarik bagi siswa, khususnya saat pandemi COVID-19, hal ini berkaitan erat dengan cara menyampaikan materi kepada siswa secara daring, cara berkomunikasi dengan siswa saat tidak bertemu secara langsung, cara mencapai tujuan pembelajaran, dan cara menyampaikan pembelajaran bermakna.

Matematika merupakan ilmu yang abstrak yang berisi simbol-simbol, dan selama berabad-abad, pelaksanaannya dilaksanakan dalam tatap muka. Proses pembelajaran matematika tidak akan terlepas dari konsep. Sebagai seorang guru, maka diperlukan pemahaman bagaimana cara siswa membentuk konsep matematika serta indikator – indikator apa saja yang bisa digunakan untuk mengetahui siswa telah memahami konsep matematika tersebut. Pelaksanaan pembelajaran matematika secara daring yang dilaksanakan tidak seperti teori yang ada. Hambatan dan kendala muncul dalam pelaksanaan pembelajaran matematika secara daring. Fenomena yang terjadi dalam pembelajaran matematika secara daring, mulai pertengahan Maret 2020 diantaranya terkait kesiapan guru dan siswa dalam kegiatan pembelajaran secara online, sehingga memunculkan beberapa masalah. Fenomena-fenomena yang muncul dari guru antara lain kurangnya pengalaman guru dalam mengelola kelas daring termasuk didalamnya perencanaan, pelaksanaan dan penilaian dalam pembelajaran matematika daring. Guru belum mampu membuat perencanaan pembelajaran matematika secara online yang sesuai dengan karakteristik siswa; media pembelajaran matematika yang disediakan guru belum dapat memenuhi tujuan dari kompetensi yang akan dicapai, dan guru belum dapat menyusun alat evaluasi yang sesuai untuk menunjukkan ketercapaian kompetensi siswa.

Akibat dari fenomena-fenomena tersebut, menimbulkan berbagai permasalahan dalam kegiatan pembelajaran daring, khususnya bagi siswa, diantaranya sebagian siswa tidak aktif dalam kegiatan pembelajaran matematika secara daring dan hanya sekedar ikut; sebagian siswa kesulitan dalam memecahkan permasalahan matematika yang diberikan guru ataupun dari sumber yang lain, siswa tidak paham dengan materi yang diberikan karena guru hanya sekedar memberikan tugas menyelesaikan masalah tanpa memberikan penjelasan atau mengajak siswa bereksplorasi untuk memahami konsep matematika; siswa merasa jenuh dan enggan ikut kegiatan pembelajaran matematika daring karena guru hanya sekedar membaca materi dan contoh soal yang ada di powerpoint, tanpa memberi kesempatan pada siswa untuk bertanya. Guru kesulitan dalam menjawab pertanyaan siswa secara online karena keterbatasan guru dalam penguasaan Teknologi Informasi dan Komunikasi (TIK), dan keterbatasan guru dalam memilih dan memanfaatkan *Learning Management System* (LMS) atau platform yang belum sesuai dengan pembelajaran matematika. Masalah-masalah yang muncul tersebut semakin lengkap karena faktor lain seperti sinyal, kuota yang dimiliki siswa, gadget yang dimiliki siswa, serta adanya pemahaman dari orang tua maupun siswa bahwa pembelajaran secara online sama dengan libur sekolah, sehingga hal tersebut berpengaruh terhadap kehadiran dan keikutsertaan siswa dalam pembelajaran matematika secara daring, dan memunculkan masalah seperti sebagian siswa tidak hadir dalam kegiatan pembelajaran matematika secara daring, dan sebagian siswa tidak bisa mengikuti kegiatan pembelajaran matematika secara penuh (*full time*).

C. Transformasi Pembelajaran Matematika Masa Pandemi COVID-19

Pada pembelajaran secara daring yang dibutuhkan siswa tidak hanya kualitas bahan pelajaran, akan tetapi juga cara membiasakan siswa dengan metode mengajar guru (Van De Vord, 2010), selain itu pembelajaran online masa pandemi dengan kualitas sangat bagus memegang peranan penting pada masa transformasi profesional ini (Weinhandl et al., 2020). Hal tersebut juga berlaku untuk pembelajaran matematika pada masa pandemi, bahwa pembelajaran matematika secara online yang dilakukan guru mengalami peningkatan yang signifikan karena pengaruh metode pembelajarannya (Tezer et al., 2019). Berdasarkan pendapat tersebut, maka pembelajaran

matematika di masa pandemi sangat membutuhkan profesionalitas guru dalam merencanakan kegiatan pembelajaran diantaranya menentukan media yang dapat meningkatkan aktivitas siswa, melalui strategi pembelajaran yang dapat menumbuhkan karakter *problem solver* pada siswa.

Transformasi pembelajaran merupakan salah satu cara yang harus dilakukan agar kegiatan pembelajaran matematika tetap berjalan, dan siswa tidak dirugikan. Hal ini dilakukan untuk mencari dan menyiapkan berbagai cara agar materi pelajaran bisa tersampaikan dan diterima dengan baik oleh siswa, dan dapat berkomunikasi dengan siswa dengan mudah walaupun tidak bertatap muka, disamping itu guru harus paham bahwa hakekat dari belajar adalah memanusiakan manusia sehingga dalam proses belajar mengajar guru harus memperhatikan aspek psikososial siswa, khususnya dalam masa pandemi COVID-19. Oleh karena itu, penting bagi guru khususnya guru matematika untuk mengidentifikasi keadaan siswa sebelum memulai aktivitas pembelajaran matematika di kelas virtual. Kegiatan tersebut nantinya akan memudahkan guru matematika dalam memilih LMS yang tepat, dan menentukan model serta metode pembelajaran jarak jauh yang sesuai dengan kondisi siswa.

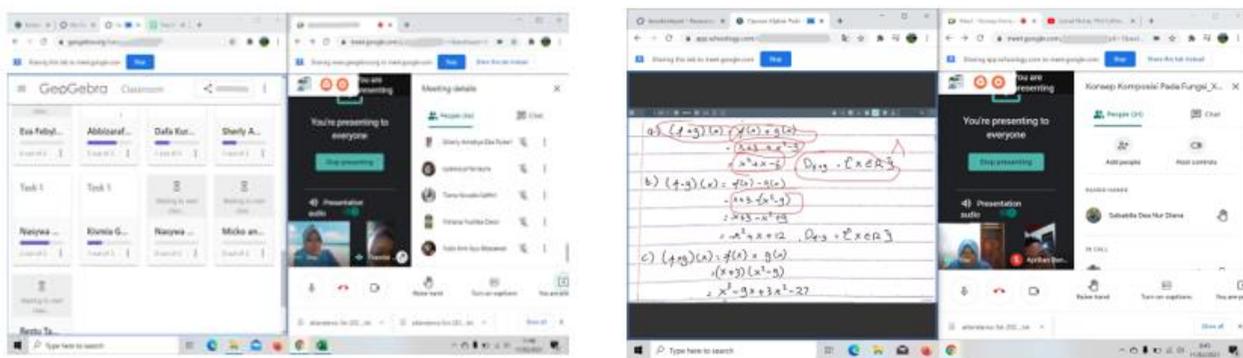
Identifikasi awal pembelajaran sebagai salah satu kegiatan transformasi pembelajaran matematika masa pandemi dapat dilakukan dengan cara melihat dan mempertimbangkan kondisi kesiapan siswa baik secara kognitif dan non kognitif sebelum dan selama pembelajaran jarak jauh, atau dapat disebut sebagai identifikasi awal pembelajaran. Bentuk kegiatan yang dapat dilakukan guru matematika adalah dengan melaksanakan awal pembelajaran, yang meliputi asesmen non kognitif dan asesmen kognitif siswa. Asesmen diagnosis non kognitif di awal pembelajaran diberikan pada siswa untuk mengetahui kesejahteraan psikologi dan emosional siswa; aktivitas siswa selama belajar di rumah; dan kondisi keluarga siswa. Dalam melaksanakan asesmen diagnosis di awal pembelajaran, guru matematika perlu melakukan tahap persiapan, tahap pelaksanaan, dan tahap tindak lanjut. Terkait persiapan dan pelaksanaan asesmen diagnosis non kognitif, keterampilan guru matematika untuk bertanya dan membuat pertanyaan dapat membantu guru mendapatkan informasi yang komprehensif dan cukup mendalam. Hasil asesmen memberikan dasar kepada guru matematika untuk menetapkan perlakuan atau strategi yang tepat kepada masing-masing siswa. Skema kegiatan asesmen awal pembelajaran ada pada gambar 1 berikut.



Gambar 1. Asesmen Awal Pembelajaran

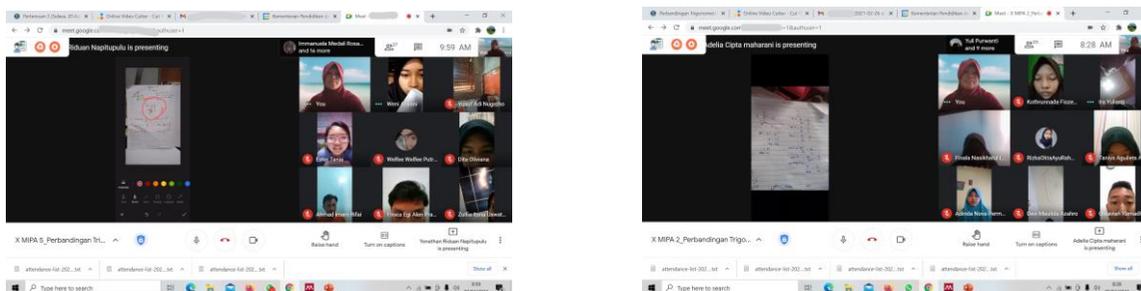
Transformasi pembelajaran matematika yang dilakukan guru matematika, selain melakukan identifikasi awal pembelajaran melalui asesmen awal pembelajaran adalah dengan memanfaatkan berbagai platform seperti microsoft teams, google meet, zoom dan platform yang lain, sebagai alternatif penyelesaian dalam masa pandemi (Basilaia & Kvavadze, 2020). Guru matematika harus dapat memilih platform atau LMS yang tepat untuk

pembelajaran matematika dan sesuai dengan kondisi siswa tersebut. Guru matematika juga mulai merancang pembelajaran jarak jauh dengan memilih metode dan model yang tepat untuk kegiatan pembelajaran matematika, dan yang sesuai dengan LMS yang dipilih. Sebelum guru memilih LMS yang disesuaikan dengan kondisi siswa, maka seorang guru harus memiliki pengetahuan tentang literasi teknologi, informasi, dan komunikasi dengan memilih LMS yang tepat untuk pembelajaran matematika dan sesuai dengan kondisi siswa. Penggunaan platform atau LMS haruslah dapat menumbuhkan kemampuan berpikir kritis, komunikasi, kolaboratif, kreatif dan inovatif dalam pembelajaran matematika (Kim & Md-Ali, 2017). Hal tersebut dapat dilakukan dengan berbagai cara, salah satu diantaranya guru matematika dapat mengkolaborasikan beberapa platform dalam melaksanakan kegiatan pembelajaran secara online, seperti zoom dengan geogebra classroom, schoology dengan geogebra classroom, schoology dengan google meet, dan sebagainya.



Gambar 2. Kolaborasi pemanfaatan berbagai platform dalam satu pembelajaran matematika secara online

Pembelajaran matematika masa pandemi covid-19, sebagai bentuk transformasi pembelajaran matematika masa pandemi, guru matematika dapat melaksanakan pembelajaran dua arah, dengan membangun komunikasi dengan siswa, salah satunya dengan memberikan kesempatan bagi siswa dalam menyampaikan gagasan atau pendapat atau pertanyaan terkait materi yang sedang dibahas, baik kepada guru maupun kepada teman yang sedang menyampaikan pendapat secara online. Pada pelaksanaan kegiatan ini, tentunya guru haruslah memiliki pemahaman yang cukup tentang penggunaan TIK, sehingga sebelum kegiatan dilakukan, guru perlu membimbing siswa terkait penggunaan TIK tersebut sehingga siswa dapat mempresentasikan gagasan mereka secara online.



Gambar 3. Aktifitas pembelajaran matematika dua arah secara online

Transformasi pembelajaran matematika masa pandemi COVID-19 pada dasarnya akan berhasil jika dilandasi dengan komitmen dari berbagai kalangan, khususnya guru dan siswa. Komitmen melakukan perubahan yang lebih baik ditengah pandemi. Hal ini dapat dimulai dengan perubahan *mindset* guru dan siswa tentang pembelajaran matematika jarak jauh (pembelajaran matematika daring). Guru dan siswa juga harus memahami, bahwa transformasi pembelajaran matematika di masa pandemi ini berperan untuk menghasilkan guru dan siswa yang siap menghadapi setiap tantangan pembelajaran matematika melalui pembelajaran jarak jauh.

D. Kesimpulan

Proses belajar mengajar merupakan satu rangkaian yang saling terkait dan tidak dapat dipisahkan. Pada masa pandemi, pembelajaran jarak jauh merupakan suatu upaya untuk menekan penyebaran COVID-19, sehingga pada kegiatan pembelajaran ini, guru dituntut untuk dapat berinovasi, dan kreatif dalam menyajikan kegiatan pembelajaran jarak jauh, khususnya pembelajaran matematika. Berbagai bentuk transformasi pembelajaran matematika dapat dilakukan guru, agar siswa tetap dapat belajar di tengah pandemi, karena pada dasarnya peran transformasi pembelajaran matematika pada masa pandemi ini adalah agar dapat menghasilkan guru dan siswa yang siap menghadapi tantangan pembelajaran matematika di tengah pandemi. Oleh karena itu dibutuhkan komitmen baik guru maupun siswa, diantaranya komitmen untuk mengubah *mindset* tentang pembelajaran matematika jarak jauh.

DAFTAR PUSTAKA

- Basilaia, G., & Kvavadze, D. (2020). Transition to Online Education in Schools during a SARS-CoV-2 Coronavirus (COVID-19) Pandemic in Georgia. *Pedagogical Research*, 5(4). <https://doi.org/10.29333/pr/7937>
- Dewi, W. A. F. (2020). Dampak COVID-19 terhadap Implementasi Pembelajaran Daring di Sekolah Dasar. *EDUKATIF: JURNAL ILMU PENDIDIKAN*, 2(1), 55–61. <https://doi.org/10.31004/edukatif.v2i1.89>
- Kemendikbud.(2020). *Panduan Asesmen di Awal Pembelajaran*. Diakses dari <https://bersamahadapikorona.kemdikbud.go.id/panduan-asesmen-di-awal-pembelajaran/>. pada 25 April 2021.
- Kim, K. M., & Md-Ali, R. (2017). Geogebra: Towards realizing 21st century learning in mathematics education. *Malaysian Journal of Learning and Instruction, Specialissue*, 93–115. <https://doi.org/10.32890/mjli.2017.7799>
- Sadikin, A., & Hamidah, A. (2020). Pembelajaran Daring di Tengah Wabah Covid-19. *BIODIK*, 6(2), 109–119. <https://doi.org/10.22437/bio.v6i2.9759>
- Tezer, M., Yildiz, E. P., Bozkurt, S., & Tangul, H. (2019). The influence of online mathematics learning on prospective teachers mathematics achievement: The role of independent and collaborative learning. *World Journal on Educational Technology: Current Issues*, 11(4), 257–265. <https://doi.org/10.18844/wjet.v11i4.4361>
- Van De Vord, R. (2010). Distance students and online research: Promoting information literacy through media literacy. *Internet and Higher Education*, 13(3), 170–175. <https://doi.org/10.1016/j.iheduc.2010.03.001>
- Weinhandl, R., Lavicza, Z., & Houghton, T. (2020). Designing online learning environments for flipped approaches in professional mathematics teacher development. *Journal of Information Technology Education: Research*, 19, 315–337. <https://doi.org/10.28945/4573>

*) Dessi Kristiyani, S.Pd., M.Pd
SMAN 1 Juwana, Kab. Pati, Prov. Jawa Tengah

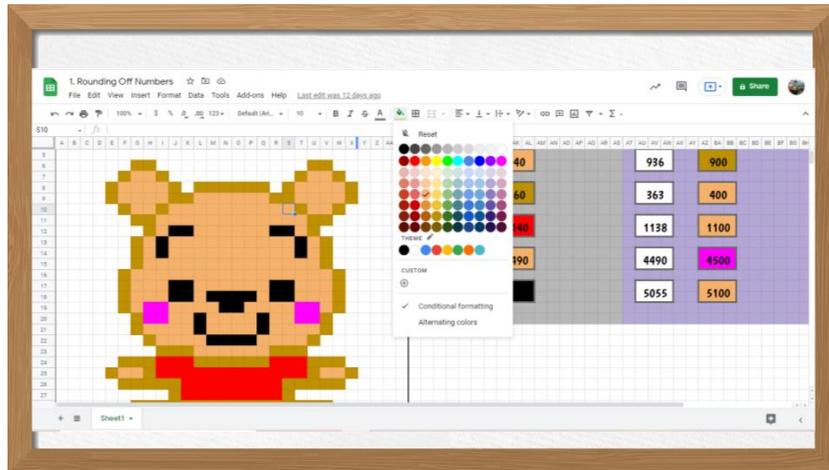
Meningkatkan Pemahaman Siswa melalui Pemanfaatan Fitur Google Sheet



Sebagai pendidik di masa pandemi saat ini, selain banyak tantangan yang harus kita hadapi terdapat banyak kesempatan untuk dapat memberikan pembelajaran terbaik untuk siswa kita. Pembelajaran yang awalnya dilakukan di sekolah secara tatap muka beralih menjadi pembelajaran jarak jauh (PJJ). Peran teknologi menjadi bagian dari setiap proses pembelajaran untuk siswa kita. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan telah meluncurkan akun *Google Workspace for Education* dengan akun belajar.id untuk guru/pendidik, tenaga kependidikan dan siswa. Program ini bekerja sama dengan Google yang banyak menawarkan aplikasi yang bisa dimanfaatkan untuk pembelajaran seperti Gmail, Google Drive, Google Slides, Google Docs, Google Sheets, Google Jamboard, Google Drawing, Google Earth, Google Keep, dan masih banyak lagi aplikasi yang sangat mendukung dan memperkaya kegiatan pembelajaran untuk peserta didik. Google Sheets adalah salah satu aplikasi Google yang bisa kita manfaatkan untuk pembelajaran jarak jauh (PJJ). Pembelajaran jarak jauh (PJJ) akan menjadi membosankan bagi siswa apabila kita sebagai pendidik hanya memanfaatkan teknologi sebagai alat untuk penyampaian materi saja. Diperlukan kreativitas, daya juang dan kemauan pendidik untuk terus belajar dalam mempersiapkan kegiatan pembelajaran dengan maksimal dan bermakna untuk siswa dan memanfaatkan teknologi bukan hanya sebagai alat penyampai materi saja. Bagaimana memanfaatkan Google Sheets untuk pembelajaran jarak jauh (PJJ) Matematika?

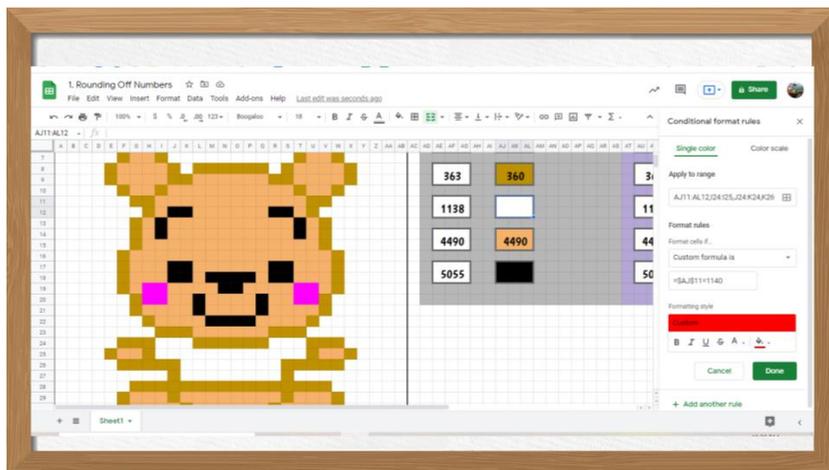
Sebagian orang mengetahui Google Sheets bisa digunakan hanya untuk keperluan penghitungan, administrasi dan mengolah data. Seperti ungkapan George Courous yang dalam postingan REFO di media sosial *Facebook* tanggal 22 Oktober 2020, "Teknologi tidak akan menggantikan guru hebat, tapi teknologi di tangan guru yang hebat akan menjadi transformasional." Ungkapan ini menekankan bagaimana penggunaan teknologi yang digunakan bukan hanya sekedar alat tetapi juga sentuhan, ide, kreativitas dari guru dalam pemanfaatannya. Google Sheets dapat membuat pembelajaran Matematika menjadi lebih menyenangkan, mengasyikkan dan layaknya siswa melakukan kegiatan belajar sambil bermain. Melalui *menu Conditional Formatting*, kita sebagai pendidik bisa merancang sebuah aktivitas yang dapat diberikan kepada siswa secara asinkronus maupun sinkronus. Pembelajaran materi konsep penjumlahan, perkalian, pembagian, pecahan, luas, keliling bangun datar persegi serta persegi panjang kita bisa rancang melalui Google Sheet ini. Pembelajaran Seni (*Art*) pun bisa ikut berkolaborasi dalam pembelajaran dengan memanfaatkan Google Sheet ini. Dengan cara ini membuat Matematika menjadi pelajaran yang tidak menakutkan dan menyulitkan dan siswa bisa menikmati setiap proses pembelajaran Matematika.

Tahap pertama yang perlu kita lakukan adalah menentukan materi yang akan kita sampaikan. Setelah itu kita membuat sebuah gambar dengan *fill color* untuk warna dari setiap bagiannya. Ketelitian dan kesabaran sangat diperlukan dalam memberikan warna untuk setiap bagian dari Google Sheets.



Sumber: Dokumentasi Penulis

Berikutnya adalah membuat pertanyaan untuk siswa dengan memperhatikan kompetensi dasar serta tujuan pembelajaran yang akan dicapai siswa. Kita klik bagian yang memiliki warna yang sama dengan menekan shift sambil mengklik bagian warna yang sama. Setelah itu, kita menggunakan menu *Conditional Formatting* untuk setiap pertanyaan dan jawaban yang benar. Untuk *format rules*-nya kita gunakan *Custom Formula*. Contoh untuk penggunaan rumusnya adalah $=\$A\$8=360$. Bagaimana jika jawaban dalam bentuk kata? Kita cukup menambahkan tanda petik tunggal. Misal, contoh untuk penggunaan rumusnya adalah $=\$A\$8='desimal'$.

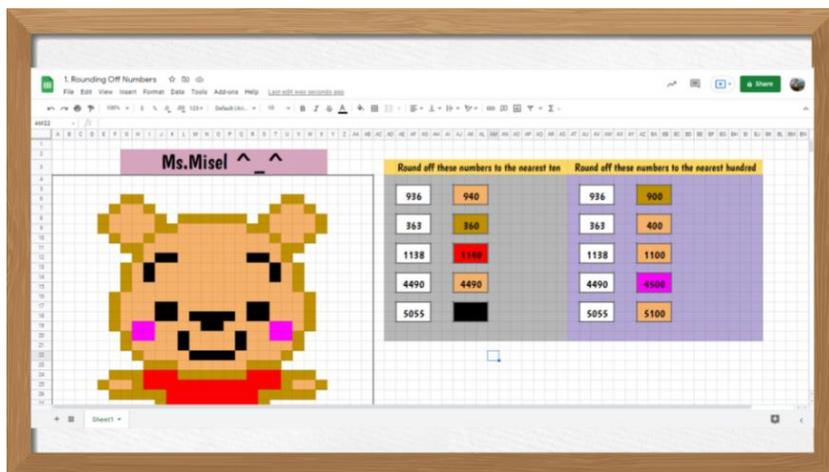


Sumber: Dokumentasi Penulis

Umpan balik adalah pemberian informasi yang diperoleh dari tes atau alat ukur lainnya kepada siswa untuk memperbaiki atau meningkatkan pencapaian/hasil belajarnya (Suke Silverius, 1991:148). Umpan balik adalah hal yang sangat diperlukan untuk siswa kita dalam proses pembelajaran. Tidak hanya berhenti sampai pengumpulan tugas saja, tetapi pemberian umpan balik dengan rentang waktu yang cepat/tidak terlalu lama dari guru adalah hal yang selalu dinanti-nantikan oleh siswa kita. Umpan balik akan bermanfaat apabila guru bersama siswa menelaah kembali jawaban-jawaban tes, baik yang dijawab benar maupun yang dijawab salah oleh siswa, dan siswa diberikan kesempatan memperbaiki jawabannya yang salah itu (Suke Silverius, 1991:149).

Satu hal yang menarik dari pemanfaatan Google Sheets ini, siswa akan melalui proses untuk terus mencoba lagi menjawab pertanyaan yang diberikan. Melalui warna yang tidak muncul atau bagian yang masih berwarna putih, siswa secara langsung diberikan umpan balik. Apabila siswa berhasil menjawab setiap pertanyaan dengan benar maka akan muncul sebuah gambar dengan warna yang sempurna. Sungguh kegiatan yang menyenangkan,

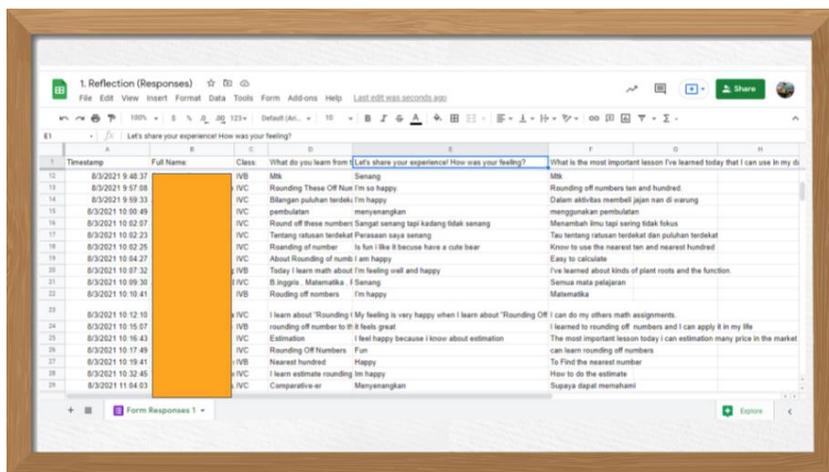
bermakna bagi siswa untuk mereka pantang menyerah dalam mengerjakan setiap pertanyaan. Siswa merdeka belajar untuk mencoba setiap pertanyaan tanpa harus dihakimi jika melakukan kesalahan. Setelah siswa berhasil menyelesaikan, mereka mendapatkan rasa bahagia dua kali lipat. Pertama, siswa mampu menyelesaikan setiap pertanyaan dan juga mendapatkan sebuah gambar utuh sebagai *reward* yang kedua.



Sumber: Dokumentasi Penulis

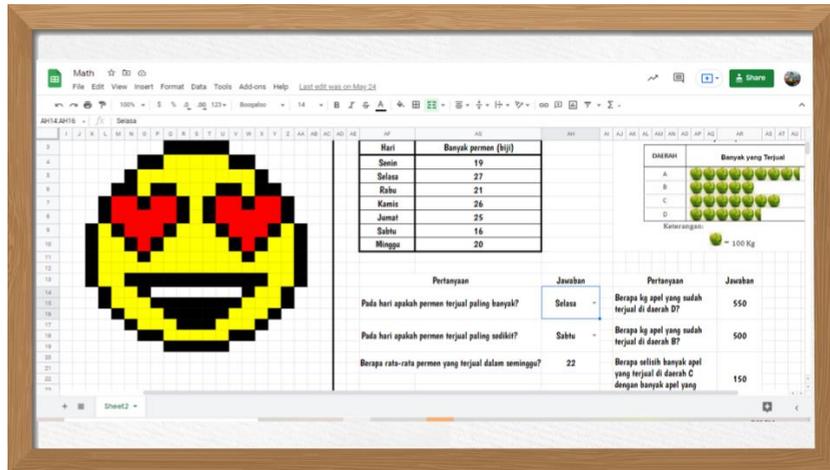
Melalui kegiatan pembelajaran dan pemberian umpan balik kepada siswa dengan memanfaatkan Google Sheets ini, siswa menjadi lebih menyukai kegiatan pembelajaran. Hasil refleksi siswa di akhir pembelajarn setelah penulis mengimplementasikan pembelajaran ini adalah sebanyak 96,47% dari 85 siswa menyatakan merasa senang, bahagia, semangat untuk belajar, menyukai kegiatan belajar sambil bermain.

Masih banyak kegiatan yang bisa kita rancang sebagai pendidik dengan memanfaatkan Google Sheets dengan mata pelajaran pelajaran Bahasa Indonesia, PPKn dan mata pelajaran yang lain.



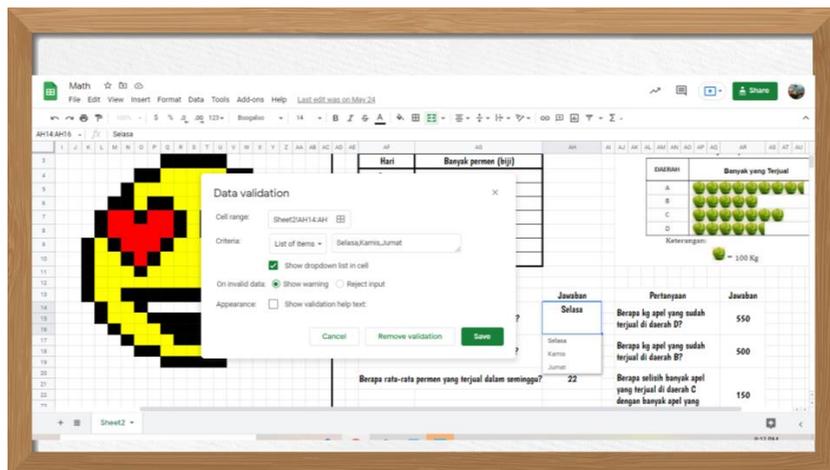
Sumber: Dokumentasi Penulis

Di kelas lima, penulis sudah menerapkan penggunaan Google Sheets ini pada materi tabel dan diagram gambar. Kompetensi dasar yang ingin dicapai penulis adalah siswa mampu membaca serta menafsirkan tabel dan diagram gambar.

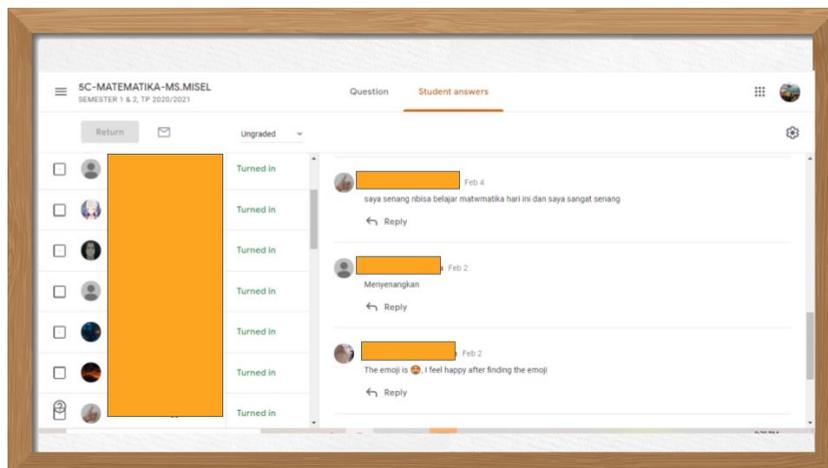


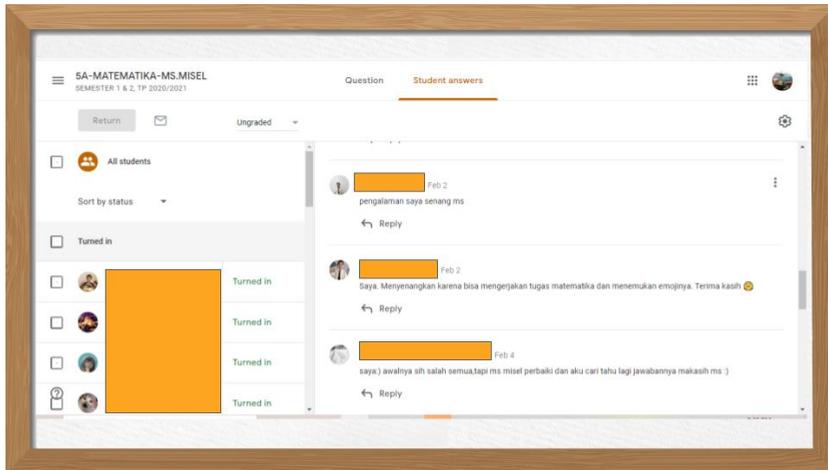
Sumber: Dokumentasi Penulis

Dalam Google Sheet pun kita bisa membuat pilihan jawaban. Kita bisa menggunakan *menu Data Validation* dengan memilih *criteria: List of Items* lalu memasukkan pilihan jawaban. Tidak hanya di Google Form atau Google Docs kita bisa membuat soal yang memiliki pilihan jawaban, ternyata di Google Sheet juga bisa. Di Google sheet, pemberian umpan balik bisa lebih efektif, dengan Google Sheet bisa dibuat ketika pilihan jawaban benar maka akan muncul bagian warna yang nantinya akan membentuk sebuah gambar. Umpan balik yang sangat unik dan menarik untuk siswa terutama siswa sekolah dasar.



Sumber: Dokumentasi Penulis





Sumber: Dokumentasi Penulis

Di atas adalah beberapa contoh refleksi siswa saat belajar memanfaatkan Google Sheet yang dirancang penulis menjadi sebuah lembar kerja yang menarik dan menyenangkan. Siswa memberikan refleksi saat jawaban belum tepat, langsung ada umpan balik berupa bagian warna yang tidak muncul, maka siswa diberi kesempatan dan diminta lagi untuk menemukan dan berproses mencari jawabannya. Dengan cara ini, siswa yang awalnya belum paham menjadi paham dan tidak ada jeda waktu lama bagi siswa menunggu umpan balik dari guru yang biasanya umpan balik diberikan ketika guru selesai memeriksa pekerjaan siswa. Sama dengan pengalaman siswa kelas empat, siswa kelas lima pun merasakan bahagia dan senang saat mereka bisa menyelesaikan tantangan dan berhasil menemukan sebuah gambar yang lengkap.

Teknologi sebagai alat sudah menyediakan fitur untuk mendukung proses pembelajaran, pendidik harus terus belajar untuk mencari ide, merancang kegiatan pembelajaran yang bermakna bagi siswa. Mari Bapak/Ibu kita manfaatkan akun belajar.id untuk mencoba belajar hal baru. Sejatinya kita sebagai pendidik perlu menjadi pembelajar sepanjang hayat. Matematika menjadi mata pelajaran yang dinantikan oleh siswa di PJJ. Wow, suatu kepuasan tersendiri bagi kita sebagai pendidik. Kebahagiaan tertinggi dari seorang guru adalah mendapati siswanya belajar dengan motivasi intrinsik dari mereka masing-masing. Siswa belajar dengan tidak ada paksaan dari pendidik maupun orangtua.

Referensi:

Silverius, Suke. 1991. *Evaluasi Hasil Belajar dan Umpan Balik*. Jakarta: PT. Gramedia Widiasarana Grasindo

Facebook postingan REFO di media sosial *Facebook* tanggal 22 Oktober 2020

*) Misel, S.Pd.
SD Citra Berkas, Kab. Bogor, Prov. Jawa Barat

DASAR-DASAR TEORI BILANGAN UNTUK PEMBINAAN OLIMPIADE MATEMATIKA DI SEKOLAH (BAGIAN 1)

*) Wiworo

<https://Pixabay.com>

Tulisan ini adalah bagian pertama dari materi teori bilangan dan sebagai pembuka dari seri artikel Buletin LIMAS tentang pembinaan olimpiade matematika di sekolah. Teori bilangan merupakan salah satu materi yang selalu diujikan pada olimpiade matematika SD, SMP, dan SMA. Teori bilangan sangat memerlukan kemampuan bernalar, memecahkan masalah, dan komunikasi. Kemampuan komputasi saja tidak cukup banyak membantu dalam memahami materi dan menyelesaikan permasalahan teori bilangan dalam olimpiade matematika. Untuk program pembinaan olimpiade matematika pada tingkat sekolah, dasar materi teori bilangan yang perlu dikuasai cukup menggunakan materi yang sudah dipelajari pada pelajaran matematika di jenjang Sekolah Dasar.

Semesta pembicaraan dalam teori bilangan adalah himpunan bilangan bulat. Materi pada tingkat dasar adalah tentang kelipatan, uji keterbagian, bilangan prima, faktorisasi prima, kelipatan persekutuan terkecil (KPK), faktor/pembagi, dan faktor persekutuan terbesar (FPB). Materi ini dapat digunakan sebagai salah satu referensi untuk pembinaan olimpiade matematika pada jenjang SD, SMP, maupun SMA. Setiap sub materi terdiri dari konsep singkat, contoh soal dan pembahasan, serta latihan. Pembahasan setiap contoh soal menekankan kepada proses dan cara berpikir matematisnya. Tidak hanya sekedar langkah-langkah menjawab.

Tulisan pada bagian pertama ini bertujuan untuk mengembangkan *number sense* dari pembaca. Pada tulisan ini perlu dicermati istilah *jumlah* dan *banyak* dalam konteks matematika yang berbeda dengan konteks dalam bahasa Indonesia. Istilah *jumlah* merujuk ke operasi penghitungan (*What is the sum of...?*). Adapun istilah *banyak* merujuk ke hasil pencacahan (*What is the number of...?* atau *How many...?*). Sebagai contoh, kita ambil bilangan 258. Jumlah angka dari 258 adalah $2 + 5 + 8 = 15$, sedangkan banyak angkanya adalah 3.

A. KELIPATAN

Kita mengetahui bahwa 12 sama dengan 3 dikalikan 4. Dengan kata lain 12 sama dengan suatu bilangan dikalikan 4. Kita katakan 12 adalah kelipatan 4. Tetapi 7 bukan kelipatan 4, karena kita tidak dapat

menuliskan 7 sebagai hasil perkalian dari 4 dengan suatu bilangan bulat. Perhatikan juga bahwa -12 adalah kelipatan 4 karena -12 sama dengan -3 dikalikan 4. Dengan cara berpikir yang sama, 0 adalah kelipatan 4 karena 0 sama dengan 0 dikalikan 4.

Definisi:

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat. Kita katakan a adalah **kelipatan** b jika a sama dengan b dikalikan suatu bilangan bulat. Dengan kata lain, a adalah kelipatan b jika terdapat bilangan bulat n sedemikian hingga $a = bn$.

Pada pembahasan ini kita menggunakan konsep pembagian dengan hasil bagi dan sisa bagi. Sebagai contoh, jika 13 dibagi 4, maka hasil baginya adalah 3 dan sisa baginya adalah 1. Menggunakan cara berpikir ini dapat kita katakan bahwa suatu bilangan bulat a adalah kelipatan suatu bilangan bulat b jika a dibagi b mempunyai sisa bagi 0.

Contoh A.1:

Tentukan bilangan antara 100 dan 200 yang sekaligus merupakan bilangan kuadrat dan kelipatan 7.

Pembahasan A.1:

Bilangan kuadrat antara 100 dan 200 adalah 121, 144, 169, dan 196. Apabila masing-masing bilangan dibagi 7, ternyata hanya 196 yang merupakan kelipatan 7 karena $196 = 28 \cdot 7$. Dengan

demikian 196 adalah sekaligus bilangan kuadrat dan kelipatan 7 antara 100 dan 200.

Cara lain adalah dengan menuliskan $196 = 14 \cdot 14$. Karena $14 = 2 \cdot 7$ maka $196 = 14 \cdot 14 = 14 \cdot 2 \cdot 7 = 28 \cdot 7$

Contoh A.2:

Tentukan bilangan tiga angka terbesar kelipatan 13.

Pembahasan A.2:

Bilangan tiga angka adalah bilangan bulat dari 100 sampai dengan 999. Kita akan mencari yang terbesar dari bilangan-bilangan tersebut yang merupakan kelipatan 13. Kita membagi 999 dengan 13, diperoleh hasil bagi 76 dan sisa bagi 11. Dengan kata lain, 999 adalah 11 lebihnya dari suatu bilangan kelipatan 13. Sehingga bilangan kelipatan 13 yang dicari adalah $999 - 11 = 988$. Dengan demikian 988 adalah bilangan tiga angka terbesar kelipatan 13.

Contoh A.3:

- Berapa banyak bilangan bulat kelipatan 5 antara 2 dan 1004?
- Berapa banyak bilangan bulat kelipatan 9 antara 150 dan 300?

Pembahasan A.3:

- Bilangan-bilangan kelipatan 5 antara 2 dan 1004 adalah 5, 10, 15, ..., 995, 1000. Berapa banyak bilangan-bilangan tersebut? Untuk lebih mudah mencacahnya, setiap bilangan dituliskan sebagai perkalian suatu bilangan bulat dengan 5, diperoleh $1 \cdot 5, 2 \cdot 5, 3 \cdot 5, \dots, 199 \cdot 5, 200 \cdot 5$. Kita mengalikan 5 dengan 1, 2, 3 sampai dengan 200. Dengan demikian banyaknya bilangan bulat kelipatan 5 antara 2 sampai dengan 1004 adalah sebanyak 200 bilangan.
- Masalah ini dapat diselesaikan dalam dua tahapan. Pertama, kita akan mendaftar bilangan bulat positif kelipatan 9 yang kurang dari 300, yaitu 9, 18, 27, ..., 297. Selanjutnya kita menyatakan masing-masing bilangan tersebut sebagai perkalian suatu bilangan bulat dengan 9, diperoleh $1 \cdot 9, 2 \cdot 9, 3 \cdot 9, \dots, 33 \cdot 9$. Sehingga terdapat 33 bilangan bulat positif kelipatan 9 yang kurang dari 300.

Kedua, kita akan mendaftar bilangan bulat positif kelipatan 9 yang kurang dari 150, yaitu 9, 18, 27, ..., 144. Selanjutnya kita menyatakan

masing-masing bilangan tersebut sebagai perkalian suatu bilangan bulat dengan 9, diperoleh $1 \cdot 9, 2 \cdot 9, 3 \cdot 9, \dots, 16 \cdot 9$. Sehingga terdapat 16 bilangan bulat positif kelipatan 9 yang kurang dari 150.

Untuk menentukan banyak bilangan bulat kelipatan 9 antara 150 dan 300 dilakukan dengan cara menghitung banyak bilangan bulat positif kelipatan 9 yang kurang dari 300 dikurangi dengan banyak bilangan bulat positif kelipatan 9 yang kurang dari 150. Diperoleh $33 - 16 = 17$. Dengan demikian terdapat 17 bilangan bulat kelipatan 9 antara 150 dan 300.

Contoh A.4:

- Baik 147 dan 357, keduanya adalah kelipatan 7. Apakah $147 + 357$ juga kelipatan 7?
- Misalkan k adalah kelipatan 7. Apakah $k + 7$ juga kelipatan 7?
- Misalkan r dan s adalah kelipatan 7. Apakah $r + s$ juga kelipatan 7?

Pembahasan A.4:

- Kita mempunyai $147 = 7 \cdot 21$ dan $357 = 7 \cdot 51$. Keduanya dijumlahkan seperti berikut:

$$\begin{aligned} 147 + 357 &= 7 \cdot 21 + 7 \cdot 51 \\ &= 7 \cdot (21 + 51) \\ &= 7 \cdot 72 \end{aligned}$$

Karena $147 + 357$ dapat dituliskan sebagai 7 dikalikan suatu bilangan bulat, berarti $147 + 357$ juga kelipatan 7.

- Karena k adalah kelipatan 7, terdapat suatu bilangan bulat a sehingga $k = 7a$. Tambahkan 7 pada k , diperoleh

$$\begin{aligned} k + 7 &= 7a + 7 \\ &= 7 \cdot a + 7 \cdot 1 \\ &= 7(a + 1) \end{aligned}$$

Karena a adalah suatu bilangan bulat, demikian juga dengan $a + 1$. Karena itu kita dapat menuliskan $k + 7$ dalam bentuk 7 dikalikan suatu bilangan bulat. Sehingga $k + 7$ jelas kelipatan 7. Hal ini menunjukkan bahwa dengan menambahkan 7 pada suatu bilangan kelipatan 7 akan menghasilkan kelipatan 7 berikutnya.

- Karena r adalah kelipatan 7, maka terdapat suatu bilangan bulat m sedemikian hingga $r = 7m$. Dengan cara sama, karena s adalah kelipatan 7,

maka terdapat suatu bilangan bulat n sedemikian hingga $s = 7n$. Selanjutnya jumlahkan r dan s diperoleh

$$\begin{aligned} r + s &= 7m + 7n \\ &= 7(m + n) \end{aligned}$$

Karena m dan n adalah bilangan bulat, maka $m + n$ juga merupakan bilangan bulat. Persamaan $r + s = 7(m + n)$ dapat dimaknai bahwa $r + s$ sama dengan 7 dikalikan suatu bilangan bulat. Dengan kata lain $r + s$ adalah kelipatan 7.

Berdasarkan contoh A.4 tersebut misalkan a dan b adalah kelipatan c , maka $a + b$ dan $a - b$ keduanya juga kelipatan c .

Latihan:

Kerjakan dengan langkah-langkah yang lengkap.

1. Terdapat banyak bilangan bulat positif dua angka kelipatan 7, tetapi hanya dua bilangan yang jumlah angka-angkanya adalah 10. Tentukan dua bilangan dua angka kelipatan 7 yang memenuhi syarat tersebut.
2. Tentukan jumlah semua bilangan bulat positif kelipatan 13 yang kurang dari 100.
3. Tentukan bilangan tiga angka terbesar kelipatan 33 yang dapat dituliskan menggunakan tiga angka berbeda.

B. UJI KETERBAGIAN

Cara lain untuk menyatakan bahwa 12 merupakan kelipatan 4 adalah dengan menyatakan 12 habis dibagi 4. Sehingga 12 habis dibagi 4 karena $12 \div 4$ sama dengan 3. Dengan cara serupa, 0 habis dibagi oleh setiap bilangan bulat bukan 0, karena 0 dibagi sebarang bilangan bulat bukan 0 sama dengan 0. Bagaimana dengan pembagian oleh 0? (Diskusikan)

Definisi:

Misalkan a adalah bilangan bulat dan b adalah bilangan bulat bukan 0. Kita mengatakan a **habis dibagi** b jika $a \div b$ adalah bilangan bulat.

Berikut ini adalah rangkuman uji keterbagian beberapa bilangan bulat:

- Keterbagian oleh 2.
Suatu bilangan habis dibagi 2 jika angka satuannya 0, 2, 4, 6, atau 8.

- Keterbagian oleh 3.
Suatu bilangan habis dibagi 3 jika jumlah angka-angka penyusun bilangan tersebut habis dibagi 3.
- Keterbagian oleh 4.
Suatu bilangan habis dibagi 4 jika bilangan yang dibentuk oleh dua angka terakhirnya adalah habis dibagi 4.
- Keterbagian oleh 5.
Suatu bilangan habis dibagi 5 jika angka satuannya 0 atau 5.
- Keterbagian oleh 6.
Suatu bilangan habis dibagi 6 jika bilangan tersebut habis dibagi 2 dan 3.
- Keterbagian oleh 9.
Suatu bilangan habis dibagi 9 jika jumlah angka-angka penyusun bilangan tersebut habis dibagi 9.
- Keterbagian oleh 10.
Suatu bilangan habis dibagi 10 jika angka satuannya 0.

Contoh B.1:

Diketahui A adalah angka satuan dari bilangan empat angka 463A. Jika 463A habis dibagi 3 dan 4 tentukan semua nilai yang mungkin dari A .

Pembahasan B.1:

Karena bilangan 463A habis dibagi 4 maka bilangan yang dibentuk oleh dua angka terakhirnya, yaitu 3A, harus habis dibagi 4 juga. Bilangan dua angka kelipatan 4 dengan 3 sebagai angka puluhan adalah 32 dan 36. Sehingga kemungkinan bilangan empat angka tersebut adalah 4632 dan 4636.

Selanjutnya bilangan 463A juga harus habis dibagi 3. Untuk menguji keterbagian oleh 3, kita harus menentukan jumlah angka-angka dari masing-masing 4632 dan 4636 yang harus habis dibagi 3. Dari 4632 diperoleh $4 + 6 + 3 + 2 = 15$, yang habis dibagi 3. Sehingga 4632 habis dibagi 3. Dari 4636 diperoleh $4 + 6 + 3 + 6 = 19$, yang tidak habis dibagi 3. Sehingga 4636 tidak habis dibagi 3. Dengan demikian nilai A yang mungkin adalah 2.

Contoh B.2:

Diketahui N adalah angka puluhan dari bilangan bulat lima angka $246N8$. Jika $246N8$ habis dibagi 9, apakah $246N8$ juga habis dibagi 4?

Pembahasan B.2:

Ciri bilangan habis dibagi 9 adalah jumlah angka-angkanya juga habis dibagi 9. Jumlah angka-angka dari bilangan $246N8$ adalah $2 + 4 + 6 + N + 8 = 20 + N$. Satu-satunya nilai N yang mungkin supaya $20 + N$ habis dibagi 9 adalah 7. Sehingga bilangan tersebut adalah 24678.

Selanjutnya ciri bilangan habis dibagi 4 adalah bilangan yang dibentuk oleh dua angka terakhirnya habis dibagi 4. Bilangan yang dibentuk oleh dua angka terakhir dari 24678 adalah 78. Karena 78 tidak habis dibagi 4 maka bilangan 24678 juga tidak habis dibagi 4.

Latihan:

Kerjakan dengan langkah-langkah yang lengkap.

1. Berapa banyak bilangan dari 1 sampai dengan 400 yang mempunyai angka satuan 2 dan habis dibagi 4?
2. Bilangan ABC dan $3D8$ adalah bilangan bulat tiga angka sedemikian hingga $ABC - 3D8 = 269$. Apabila $3D8$ habis dibagi 9, bilangan berapakah ABC tersebut?
3. Tentukan angka terbesar d sehingga bilangan $214d07$ habis dibagi 3.

C. BILANGAN PRIMA

Setiap bilangan bulat positif habis dibagi 1 dan bilangan itu sendiri. Beberapa bilangan tidak habis dibagi sebarang bilangan bulat positif lain. Sebagai contoh, 5 habis dibagi 1 dan 5, tetapi 5 tidak habis dibagi bilangan bulat positif lain. Adapun 6 selain habis dibagi 1 dan 6 juga habis dibagi 2 dan 3.

Dari contoh tersebut, 5 dikatakan sebagai bilangan prima, sedangkan 6 dikatakan sebagai bilangan komposit. Bilangan 1 adalah satu-satunya bilangan bulat positif yang bukan prima dan bukan komposit. Setiap bilangan bulat lebih dari 1 pasti merupakan bilangan prima atau komposit.

Definisi:

Bilangan prima adalah bilangan bulat lebih dari 1 yang habis dibagi hanya oleh 1 dan bilangan itu sendiri. **Bilangan komposit** adalah bilangan bulat

positif yang habis dibagi oleh lebih dari dua bilangan bulat positif.

Contoh C.1:

Tentukan bilangan komposit dua angka terbesar yang kedua angkanya adalah bilangan prima.

Pembahasan C.1:

Bilangan prima satu angka adalah 2, 3, 5, dan 7. Menggunakan angka-angka tersebut, bilangan dua angka terbesar yang dapat dibentuk adalah 77. Karena $77 = 7 \cdot 11$ maka 77 adalah bilangan komposit. Dengan demikian 77 bilangan komposit dua angka terbesar yang kedua angkanya adalah bilangan prima.

Contoh C.2:

Tentukan seluruh pasangan bilangan prima yang hasil penjumlahannya 61.

Pembahasan C.2:

Apabila hasil penjumlahan dua bilangan bulat adalah 61, maka salah satu bilangan pasti bilangan genap dan bilangan yang lain pasti bilangan ganjil. Satu-satunya bilangan prima yang genap adalah 2. Sehingga satu bilangan tersebut pasti 2. Selanjutnya $61 - 2 = 59$. Ternyata 59 adalah bilangan prima. Dengan demikian satu-satunya pasangan bilangan prima yang jumlahnya 61 adalah 2 dan 59.

Latihan:

Kerjakan dengan langkah-langkah yang lengkap.

1. Tentukan jumlah seluruh bilangan prima antara 80 dan 90.
2. Tentukan bilangan prima terbesar p sedemikian hingga 8 dikalikan p kurang dari 1000.
3. Hasil perkalian seluruh bilangan prima antara 1 dan 80 dibagi dengan 10. Tentukan sisa baginya.

D. FAKTORISASI PRIMA

Apabila kita memfaktorkan suatu bilangan bulat, kita menyatakan dalam bentuk perkalian bilangan-bilangan bulat. Jika bilangannya adalah bilangan komposit, kita memfaktorkan dengan menyatakan sebagai perkalian dua bilangan bulat yang lebih kecil. Bagaimana dengan bilangan prima?

Sebagai contoh, kita memfaktorkan 12 sebagai $12 = 2 \cdot 6$. Karena 6 adalah bilangan komposit, kita dapat memfaktorkan 6 sebagai perkalian 2 dan 3. Sehingga $12 = 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Selanjutnya karena 2 dan 3 adalah bilangan prima, kita tidak dapat menyatakannya dalam bentuk perkalian dua bilangan bulat yang lebih kecil. Karena $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, bentuk ini dikatakan sebagai faktorisasi prima dari 12. Bilangan-bilangan prima yang muncul pada bentuk faktorisasi prima dari 12 disebut sebagai faktor prima dari 12. Sehingga 2 dan 3 adalah faktor-faktor prima dari 12.

Definisi:

Faktorisasi prima dari suatu bilangan bulat adalah perkalian bilangan-bilangan prima yang hasilnya sama dengan bilangan bulat tersebut. Bilangan-bilangan prima pada bentuk faktorisasi prima tadi disebut sebagai **faktor prima** dari bilangan bulat tersebut.

Bentuk faktorisasi prima biasanya dituliskan dalam bentuk pangkat. Dengan demikian faktorisasi prima dari 12 adalah $2^2 \cdot 3^1$. Bisa juga dituliskan dalam bentuk $2^2 \cdot 3$ dengan menghilangkan penulisan pangkat 1.

Teorema Fundamental Aritmetika:

Setiap bilangan bulat positif mempunyai tepat satu bentuk faktorisasi prima.

Contoh D.1:

Tentukan bilangan bulat positif yang kuadratnya sama dengan $96 \cdot 486$.

Pembahasan D.1:

Mula-mula kita tentukan bentuk faktorisasi prima dari 96 dan 486.

$$\begin{aligned}
 96 &= 32 \cdot 3 \\
 &= (4 \cdot 8) \cdot 3 \\
 &= 2^2 \cdot 2^3 \cdot 3 \\
 &= 2^{2+3} \cdot 3 \\
 &= 2^5 \cdot 3^1 \\
 \\
 486 &= 6 \cdot 81 \\
 &= (2 \cdot 3) \cdot (9 \cdot 9) \\
 &= 2^1 \cdot 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \\
 &= 2^1 \cdot 3^{1+2+2} \\
 &= 2^1 \cdot 3^5
 \end{aligned}$$

Selanjutnya kedua bentuk faktorisasi prima dikalikan diperoleh:

$$\begin{aligned}
 96 \cdot 486 &= (2^5 \cdot 3^1) \cdot (2^1 \cdot 3^5) \\
 &= 2^5 \cdot 3^1 \cdot 2^1 \cdot 3^5 \\
 &= (2^5 \cdot 2^1) \cdot (3^1 \cdot 3^5) \\
 &= 2^{5+1} \cdot 3^{1+5} \\
 &= 2^6 \cdot 3^6
 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa pangkat dari kedua faktor prima adalah genap, sehingga bentuk $2^6 \cdot 3^6$ adalah bilangan kuadrat.

$$\begin{aligned}
 2^6 \cdot 3^6 &= 2^{3 \cdot 2} \cdot 3^{3 \cdot 2} \\
 &= (2^3 \cdot 3^3)^2 \\
 &= (8 \cdot 27)^2 \\
 &= 216^2
 \end{aligned}$$

Dengan demikian bilangan bulat positif tersebut adalah 216.

Contoh D.2:

Yafi mengalikan dua bilangan bulat positif dan memperoleh hasil perkaliannya adalah 16000. Apabila angka satuan dari kedua bilangan tadi tidak sama dengan 0 tentukan hasil penjumlahan kedua bilangan bulat positif tersebut.

Pembahasan D.2:

Mula-mula kita tentukan bentuk faktorisasi prima dari 16000.

$$\begin{aligned}
 16000 &= 16 \cdot 1000 \\
 &= (4 \cdot 4) \cdot 10^3 \\
 &= 2^2 \cdot 2^2 \cdot (2 \cdot 5)^3 \\
 &= 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \\
 &= 2^{2+2+3} \cdot 5^3 \\
 &= 2^7 \cdot 5^3
 \end{aligned}$$

Selanjutnya kita menentukan dua bilangan yang hasil perkaliannya adalah $2^7 \cdot 5^3$ dan angka satuan kedua bilangan tersebut bukan 0. Setiap bilangan kelipatan 10 pasti angka satuannya 0. Setiap bilangan yang mempunyai faktor prima 2 dan 5 dalam bentuk faktorisasi primanya pasti adalah bilangan kelipatan 10. Sehingga masing-masing dari kedua bilangan yang dikalikan Yafi tidak mungkin mempunyai sekaligus faktor prima 2 dan 5 dalam bentuk faktorisasi primanya. Dengan kata lain, seluruh faktor 2 dari perkalian $2^7 \cdot 5^3$ pasti muncul dari satu bilangan dan seluruh faktor 5 pasti muncul dari bilangan kedua. Ini berarti satu-satunya kemungkinan bilangan-bilangan yang memenuhi adalah $2^7 = 128$ dan $5^3 = 125$.

Dengan demikian hasil penjumlahan kedua bilangan tersebut adalah $128 + 125 = 253$.

Latihan:

Kerjakan dengan langkah-langkah yang lengkap.

1. Jika x, y , dan z adalah bilangan bulat positif dan $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z = 54000$, tentukan nilai $x + y + z$.
2. Tentukan bilangan kuadrat terkecil yang habis dibagi oleh empat bilangan prima terkecil.
3. Hasil perkalian dua bilangan bulat positif adalah 504 dan masing-masing bilangan habis dibagi 6. Kedua bilangan tersebut tidak sama dengan 6. Tentukan bilangan terbesar dari kedua bilangan tersebut.
4. Pada persamaan $858 = a \cdot b$, masing-masing bilangan a dan b adalah bilangan bulat positif dua angka. Tentukan hasil terbesar yang mungkin dari $a + b$.

E. KELIPATAN PERSEKUTUAN TERKECIL

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat positif. Jika suatu bilangan bulat positif lain adalah kelipatan dari a dan b , kita katakan bahwa bilangan tersebut adalah **kelipatan persekutuan** dari a dan b . Bilangan bulat positif terkecil yang menjadi kelipatan persekutuan dari a dan b disebut sebagai **kelipatan persekutuan terkecil (KPK)** dari a dan b . KPK dari a dan b dinotasikan dengan $KPK[a, b]$.

Sebagai contoh, 12 adalah kelipatan persekutuan dari 2 dan 3, sedangkan 6 adalah kelipatan persekutuan terkecil dari 2 dan 3. Dinotasikan $KPK[2, 3] = 6$.

Konsep kelipatan persekutuan dapat diperluas untuk lebih dari dua bilangan bulat positif. Sebagai contoh, 12 adalah kelipatan persekutuan dari 2, 3, dan 4 karena 12 adalah kelipatan dari setiap bilangan tersebut. 12 juga merupakan kelipatan persekutuan terkecil dari 2, 3, dan 4 dinotasikan dengan $KPK[2, 3, 4] = 12$.

Contoh E.1:

Tentukan faktorisasi prima dari lima bilangan bulat positif terkecil kelipatan 18. Amati dan bandingkan setiap faktorisasi prima dari lima bilangan tersebut dengan faktorisasi prima dari 18. Jelaskan hal menarik dari hasil pengamatan Anda.

Pembahasan E.1:

Faktorisasi prima dari 18 adalah $2^1 \cdot 3^2$. Faktorisasi prima dari lima bilangan bulat positif terkecil kelipatan dari 18 adalah:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 18 &= 1 \cdot (2^1 \cdot 3^2) = 2^1 \cdot 3^2 \\ 2 \cdot 18 &= 2 \cdot (2^1 \cdot 3^2) = 2^2 \cdot 3^2 \\ 3 \cdot 18 &= 3 \cdot (2^1 \cdot 3^2) = 2^1 \cdot 3^3 \\ 4 \cdot 18 &= 2^2 \cdot (2^1 \cdot 3^2) = 2^3 \cdot 3^2 \\ 5 \cdot 18 &= 1 \cdot (2^1 \cdot 3^2) = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \end{aligned}$$

Setiap kelipatan 18 adalah hasil perkalian 18 dengan suatu bilangan bulat positif. Sehingga faktorisasi prima dari setiap kelipatan 18 pasti memuat faktor-faktor prima pada faktorisasi prima dari 18. Dengan demikian faktorisasi prima dari setiap kelipatan 18 pasti memuat 2 pangkat paling sedikit 1 dan 3 pangkat paling sedikit 2.

Contoh E.2:

Bagaimana cara menggunakan faktorisasi prima dari 24 dan 90 untuk menentukan $KPK[24, 90]$?

Pembahasan E.2:

Faktorisasi prima dari 24 dan 90 berturut-turut adalah $24 = 2^3 \cdot 3^1$ dan $90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$.

Perhatikan bahwa pangkat dari 2 pada faktorisasi prima kelipatan 24 pasti paling kecil 2^3 dan pangkat dari 2 pada faktorisasi prima kelipatan 90 pasti paling kecil 2^1 . Untuk memenuhi syarat tersebut, pangkat dari 2 pada kelipatan persekutuan 24 dan 90 pasti paling kecil 2^3 . Sehingga pangkat terkecil dari 2 pada faktorisasi prima dari $KPK[24, 90]$ adalah 2^3 .

Dengan cara berpikir yang sama, pangkat dari 3 pada faktorisasi prima kelipatan 24 pasti paling kecil 3^1 dan pangkat dari 3 pada faktorisasi prima kelipatan 90 pasti paling kecil 3^2 . Untuk memenuhi syarat tersebut, pangkat dari 3 pada kelipatan persekutuan 24 dan 90 pasti paling kecil 3^2 . Sehingga pangkat terkecil dari 3 pada faktorisasi prima dari $KPK[24, 90]$ adalah 3^2 .

Selanjutnya pangkat dari 5 pada faktorisasi prima kelipatan 90 pasti 5^1 sehingga pangkat terkecil dari 5 pada faktorisasi prima dari $KPK[24, 90]$ adalah 5^1 .

Dari tiga hal tersebut kita mengetahui bahwa faktorisasi prima dari $KPK[24, 90]$ pasti memuat $2^3, 3^2$, dan 5^1 . Berdasarkan penalaran tersebut kita mengetahui cara menggunakan faktorisasi prima dari 24 dan 90 untuk mencari faktorisasi prima dari $KPK[24, 90]$.

Kita mengambil pangkat paling tinggi dari setiap faktor prima yang muncul pada faktorisasi prima 24 dan 90.

$$\begin{aligned} 24 &= 2^3 \cdot 3^1 \\ 90 &= 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \end{aligned}$$

Selanjutnya kita mengalikan pangkat-pangkat tertinggi tersebut untuk membentuk KPK[24, 90]:

$$\text{KPK}[24, 90] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 360$$

Untuk mengecek apakah 360 memang kelipatan persekutuan terkecil dari 24 dan 90 dapat dilakukan dengan membuat daftar kelipatan 90 sampai dengan 360 seperti berikut: 90, 180, 270, 360. Tiga bilangan pertama pada daftar tersebut jelas bukan kelipatan 24, sedangkan $360 = 15 \cdot 24$ adalah kelipatan 24. Dengan demikian 360 adalah kelipatan persekutuan terkecil dari 24 dan 90.

Pembahasan E.2 tersebut tidak hanya menjelaskan cara mencari faktorisasi prima dari kelipatan persekutuan terkecil dari 24 dan 90. Akan tetapi juga menjelaskan bahwa faktorisasi prima tersebut juga termuat dalam setiap kelipatan persekutuan dari 24 dan 90, pasti memuat 2 dengan pangkat paling sedikit 3, 3 dengan pangkat paling sedikit 2, dan 5 dengan pangkat paling sedikit 1. Selain itu setiap kelipatan dari KPK[24, 90] pasti merupakan kelipatan persekutuan dari 24 dan 90.

Hal tersebut dapat digeneralisasi sebagai berikut:

Misal a dan b adalah bilangan bulat positif. Setiap kelipatan dari KPK[a, b] adalah kelipatan persekutuan dari a dan b . Setiap kelipatan persekutuan dari a dan b adalah kelipatan dari KPK[a, b].

Contoh E.3:

Bilangan 16128 adalah kelipatan 6, 7, dan 8. Tentukan kelipatan terkecil 6, 7, dan 8 yang lebih dari 16128.

Pembahasan E.3:

Kelipatan persekutuan 6, 7, dan 8 adalah kelipatan dari KPK[6, 7, 8]. Sehingga kita akan mencari kelipatan terkecil dari KPK[6, 7, 8] yang lebih dari 16128.

Faktorisasi prima dari 6, 7, dan 8 masing-masing adalah $6 = 2^1 \cdot 3^1$, $7 = 7^1$, dan $8 = 2^3$. Sehingga $\text{KPK}[6, 7, 8] = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^1$. Karena 16128 adalah kelipatan 6, 7, dan 8, maka kita tahu bahwa 16128 juga kelipatan dari KPK[6, 7, 8]. Dengan demikian

kelipatan terkecil 6, 7, dan 8 yang lebih dari 16128 adalah $16128 + 168 = 16296$.

Contoh E.4:

- Tentukan bilangan bulat positif terkecil lebih dari 1 yang bersisa 1 jika dibagi 6, 7, dan 8.
- Tentukan bilangan bulat positif terkecil yang bersisa 5 jika dibagi 6, bersisa 6 jika dibagi 7, dan bersisa 7 jika dibagi 8.

Pembahasan E.4:

- Suatu bilangan bulat yang bersisa 1 jika dibagi 6 adalah 1 lebihnya dari suatu bilangan kelipatan 6. Dengan cara berpikir yang sama, suatu bilangan bulat yang bersisa 1 jika dibagi 7 adalah 1 lebihnya dari suatu bilangan kelipatan 7 dan suatu bilangan bulat yang bersisa 1 jika dibagi 8 adalah 1 lebihnya dari suatu bilangan kelipatan 8. Karena $\text{KPK}[6, 7, 8] = 168$ maka bilangan bulat tersebut adalah $168 + 1 = 169$.
- Suatu bilangan bulat yang bersisa 5 jika dibagi 6 adalah 1 kurangnya dari suatu bilangan kelipatan 6. Dengan cara berpikir yang sama suatu bilangan bulat yang bersisa 6 jika dibagi 7 adalah 1 kurangnya dari suatu bilangan kelipatan 7 dan suatu bilangan bulat yang bersisa 7 jika dibagi 8 adalah 1 kurangnya dari suatu bilangan kelipatan 8. Sehingga bilangan bulat yang akan dicari adalah 1 kurangnya dari kelipatan persekutuan 6, 7, dan 8. Dari soal sebelumnya diperoleh $\text{KPK}[6, 7, 8] = 168$, maka bilangan terkecil yang memenuhi syarat adalah $168 - 1 = 167$.

Latihan:

Kerjakan dengan langkah-langkah yang lengkap.

- Tentukan kelipatan persekutuan terbesar dari 8 dan 12 yang kurang dari 200.
- Tentukan bilangan bulat positif empat angka terkecil yang habis dibagi 2, 3, 4, 5, 6, dan 7.
- Mona mencacah setiap kelipatan 6 dari 6 sampai 2400. Ira mencacah setiap kelipatan 4 dari 4 sampai 2400. Berapa banyak bilangan yang dicacah Mona yang sekaligus juga dicacah Ira?

F. FAKTOR/PEMBAGI

Apabila 12 adalah kelipatan 4, hal tersebut dapat dikatakan bahwa 4 adalah pembagi dari 12, karena 12

sama dengan 4 dikalikan suatu bilangan bulat. Dapat juga dikatakan bahwa 4 adalah faktor dari 12.

Definisi:

Misalkan a adalah bilangan bulat bukan 0 dan b adalah bilangan bulat. Kita katakan a adalah **pembagi** atau **faktor** dari b jika b adalah kelipatan a . Dengan kata lain b sama dengan a dikalikan suatu bilangan bulat.

Istilah pembagi dan faktor merujuk ke hal yang sama maknanya. Pada tulisan ini, kedua hal tersebut akan digunakan bergantian. Sebagai contoh, faktor positif atau pembagi positif dari 6 adalah 1, 2, 3, dan 6. Adapun faktor negatif atau pembagi negatif dari 6 adalah $-1, -2, -3$, dan -6 .

Contoh F.1:

- Tentukan faktor-faktor positif setiap bilangan bulat dari 8 sampai dengan 18. Bilangan-bilangan bulat mana saja yang mempunyai faktor positif sebanyak ganjil?
- Terdapat satu bilangan bulat antara 20 dan 30 yang mempunyai faktor positif sebanyak ganjil. Bilangan berapakah itu?
- Bilangan bulat positif yang bagaimanakah yang mempunyai faktor positif sebanyak ganjil?

Pembahasan F.1:

- Mula-mula kita buat tabel faktor positif setiap bilangan bulat dari 8 sampai dengan 18 sebagai berikut.

Bilangan	Faktor Positif	Banyak Faktor Positif
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3
10	1, 2, 5, 10	4
11	1, 11	2
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6
13	1, 13	2

14	1, 2, 7, 14	4
15	1, 3, 5, 15	4
16	1, 2, 4, 8, 16	5
17	1, 17	2
18	1, 2, 3, 6, 9, 18	6

Bilangan bulat dari 8 sampai dengan 18 yang mempunyai faktor positif sebanyak ganjil adalah 9 dan 16.

- Dari bagian (a) diperoleh bahwa 9 dan 16 yang merupakan bilangan kuadrat adalah bilangan yang mempunyai faktor positif sebanyak ganjil. Sehingga kita dapat menduga bahwa bilangan bulat antara 20 dan 30 yang mempunyai faktor positif sebanyak ganjil adalah 25 yang juga merupakan bilangan kuadrat. Kita mengeceknya dengan membuat daftar faktor positif dari 25, yaitu 1, 5, dan 25. Dengan demikian 25 memang merupakan bilangan bulat antara 20 dan 30 yang mempunyai faktor positif sebanyak ganjil.
- Berdasarkan bagian (a) dan (b) kita dapat membuat dugaan (konjektur) bahwa bilangan kuadrat adalah bilangan bulat positif yang mempunyai faktor positif sebanyak ganjil, sedangkan bilangan bulat positif yang bukan bilangan kuadrat mempunyai faktor positif sebanyak genap.

Contoh F.2:

- Misalkan 3 adalah pembagi dari k . Apakah 3 juga pembagi dari $k + 3$?
- Misalkan 3 adalah pembagi dari b dan c . Apakah 3 juga pembagi dari $b + c$?
- Misalkan 3 adalah pembagi dari $b + c$. Apakah 3 juga pembagi dari b dan c ?

Pembahasan F.2:

- Karena 3 adalah pembagi dari k , maka k adalah kelipatan 3. Tambahkan 3 ke kelipatan 3 akan memberikan satu lagi kelipatan 3, sehingga $k + 3$ adalah kelipatan 3. Dengan demikian 3 adalah pembagi dari $k + 3$.

- b. Karena 3 adalah pembagi dari b dan c , maka b dan c adalah kelipatan 3. Jumlah dari dua bilangan kelipatan 3 pasti juga merupakan 3. Dengan demikian $b + c$ juga kelipatan 3, atau dengan kata lain 3 adalah pembagi dari $b + c$.
- d. Apabila 3 adalah pembagi dari $b + c$, maka 3 bukan pembagi dari b dan c . Kita ambil contoh, misalkan $b = 2$ dan $c = 1$. Jelas bahwa 3 adalah pembagi dari $2 + 1 = 3$, tetapi 3 bukan pembagi 2 dan 3 juga bukan pembagi 1.

Berdasarkan contoh F.2 tersebut misalkan a, b , dan c adalah bilangan bulat. Apabila c adalah faktor dari a dan dari b , maka c juga faktor dari $a + b$ dan $a - b$.

Latihan:

Kerjakan dengan langkah-langkah yang lengkap.

- Berapa banyak bilangan bulat n sedemikian hingga $28 \div n$ juga bilangan bulat?
- Hasil perkalian dua bilangan bulat positif adalah 2.005. Jika kedua bilangan tersebut bukan 1, tentukan hasil penjumlahan dua bilangan bulat tersebut.
- Hasil perkalian bilangan tiga angka ABC dan bilangan satu angka D adalah 1.673. Jika A, B, C , dan D menyatakan angka-angka yang berbeda, bilangan berapakah yang dinyatakan dengan ABC ?
- Tentukan bilangan bulat terbesar kurang dari 10.000 yang merupakan pembagi dari $11.000 + 1100 + 11$.

G. FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR

Apabila suatu bilangan bulat sekaligus merupakan faktor dari a dan b , dapat dikatakan bahwa bilangan tersebut adalah **faktor persekutuan** dari a dan b . Faktor persekutuan sering dinamakan juga sebagai **pembagi persekutuan**. Sebagai contoh, faktor dari 30 adalah $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15$, dan ± 30 . Sedangkan faktor dari 96 adalah $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \pm 24, \pm 32, \pm 48$, dan 96. Bilangan-bilangan yang termuat pada kedua daftar tersebut adalah $\pm 1, \pm 2, \pm 3$, dan ± 6 sehingga dinamakan faktor persekutuan dari 30 dan 96.

Bilangan bulat positif terbesar yang menjadi faktor dari a dan b dinamakan sebagai **faktor persekutuan**

terbesar (FPB) dari a dan b . Dinotasikan dengan **FPB(a, b)**.

Diantara seluruh faktor persekutuan dari 30 dan 96, yang terbesar adalah 6. Dengan demikian faktor persekutuan terbesar, sering juga dinamakan **pembagi persekutuan terbesar**, dari 30 dan 96 adalah 6. Secara notasi dinyatakan sebagai $\text{FPB}(30, 96) = 6$.

Faktorisasi prima dapat digunakan sebagai salah satu cara untuk menentukan kelipatan persekutuan terkecil. Adapun untuk menentukan faktor persekutuan terbesar, kita juga dapat menggunakan faktorisasi prima. Perhatikan Contoh G.1 berikut ini.

Contoh G.1:

Tentukan faktorisasi prima dari masing-masing faktor positif dari 24. Bandingkan faktorisasi-faktorisasi prima tersebut dengan faktorisasi prima dari 24. Apakah terdapat hal yang menarik? Jelaskan.

Pembahasan G.1:

Faktorisasi prima dari 24 adalah $2^3 \cdot 3^1$. Adapun faktorisasi prima dari masing-masing faktor dari 24 adalah:

1	$3 = 3^1$
$2 = 2^1$	$6 = 2^1 \cdot 3^1$
$4 = 2^2$	$12 = 2^2 \cdot 3^1$
$8 = 2^3$	$24 = 2^3 \cdot 3^1$

Mula-mula kita amati bahwa bilangan-bilangan prima yang muncul pada faktorisasi-faktorisasi prima tersebut adalah 2 dan 3, yang sekaligus juga merupakan bilangan prima yang muncul pada faktorisasi prima dari 24. Selanjutnya kita dapat melihat bahwa tidak ada faktorisasi prima masing-masing faktor dari 24 tersebut yang mempunyai pangkat dari 2 yang lebih besar dari 2^3 yang muncul pada faktorisasi prima dari 24. Dengan cara berpikir sama, tidak ada faktorisasi prima masing-masing faktor dari 24 tersebut yang mempunyai pangkat dari 3 yang lebih besar dari 3^1 yang muncul pada faktorisasi prima dari 24.

Dengan kata lain, faktorisasi prima dari 24 akan memuat faktorisasi prima dari masing-masing faktornya. Hal ini jelas masuk akal karena 24

merupakan kelipatan dari masing-masing faktornya tersebut.

Contoh G.2:

Bagaimana cara menggunakan faktorisasi prima dari 360 dan 48 untuk menentukan FPB[360, 48]?

Pembahasan G.2:

Faktorisasi prima dari 360 dan 48 berturut-turut adalah $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ dan $48 = 2^4 \cdot 3^1$. Perhatikan bahwa pangkat dari 2 pada faktorisasi prima faktor dari 360 pasti paling besar adalah 2^3 dan pangkat dari 2 pada faktorisasi prima faktor dari 48 pasti paling besar adalah 2^4 . Untuk memenuhi syarat tersebut, pangkat dari 2 pada faktor persekutuan 360 dan 48 pasti paling besar 2^3 . Sehingga pangkat terbesar dari 2 pada faktorisasi prima dari FPB(360, 48) adalah 2^3 .

Dengan cara berpikir yang sama, pangkat dari 3 pada faktorisasi prima faktor dari 360 pasti paling besar 3^2 dan pangkat dari 3 pada faktorisasi prima faktor dari 48 pasti paling besar 3^1 . Untuk memenuhi syarat tersebut, pangkat dari 3 pada faktor persekutuan 360 dan 48 pasti paling besar 3^1 . Sehingga pangkat terbesar dari 3 pada faktorisasi prima dari FPB(360, 48) adalah 3^1 .

Selanjutnya faktor dari 48 tidak dapat memuat 5 pada faktorisasi primanya sehingga faktorisasi prima dari FPB(360, 48) tidak dapat memuat 5. Dengan cara berpikir yang sama, faktorisasi prima dari FPB(360, 48) tidak dapat memuat faktor prima yang lebih besar dari 3.

Dari penjelasan tersebut kita mengetahui bahwa faktorisasi prima dari FPB(360, 48) hanya dapat memuat faktor prima 2 dan 3. Pangkat terbesar dari 2 pada faktorisasi prima tersebut adalah 2^3 sedangkan pangkat terbesar dari 3 adalah 3^1 . Berdasarkan penalaran tersebut kita mengetahui cara menggunakan faktorisasi prima dari 360 dan 48 untuk mencari faktorisasi prima dari FPB(360, 48).

Kita mengambil pangkat paling kecil dari setiap faktor prima yang muncul pada faktorisasi prima 360 dan 48.

$$\begin{aligned} 360 &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 48 &= 2^4 \cdot 3^1 \end{aligned}$$

Selanjutnya kita mengalikan pangkat paling kecil tersebut untuk membentuk FPB(360, 48).

$$\text{FPB}(360, 48) = 2^3 \cdot 3^1 = 24$$

Perhatikan bahwa kita tidak memasukkan pangkat dari 5 pada faktorisasi prima dari FPB(360, 48). Faktor-faktor prima dari FPB(360, 48) adalah bilangan-bilangan prima yang menjadi faktor prima sekaligus dari 360 dan 24. Karena 5 adalah faktor prima dari 360 tetapi bukan faktor prima dari 48, maka 5 bukan faktor prima dari FPB(360, 48).

Apa yang terjadi apabila tidak ada faktor prima yang muncul pada seluruh faktorisasi prima tersebut? Akibatnya kita tidak dapat mempunyai faktor prima pada faktorisasi prima dari FPB. Hal ini berarti FPBnya adalah 1. Kita katakan bahwa dua bilangan bulat tersebut **saling prima relatif** jika FPBnya adalah 1.

Latihan:

Kerjakan dengan langkah-langkah yang lengkap.

1. Apabila a dan b adalah bilangan bulat positif dengan $\text{FPB}(a, b) = 8$, tentukan faktor persekutuan positif dari a dan b .
2. Jika 66117A adalah kelipatan 12, tentukan nilai A.
3. Misalkan a, b , dan c adalah bilangan-bilangan bulat sedemikian hingga a dan b saling prima relatif, b dan c juga saling prima relatif. Apakah a dan c juga saling prima relatif?
4. Pembagi-pembagi positif dari 175 selain 1 disusun mengelilingi suatu lingkaran sehingga setiap pasangan bilangan bulat yang bersebelahan mempunyai pembagi persekutuan lebih dari 1. Tentukan jumlah dua bilangan yang bersebelahan dengan 7.

Soal Tantangan:

Kerjakan dengan langkah-langkah yang lengkap.

1. Misalkan a dan b adalah bilangan-bilangan bulat positif sedemikian hingga a adalah faktor dari b .
 - a. Tentukan $\text{FPB}(a, b)$.
 - b. Tentukan $\text{KPK}[a, b]$.
2. Misalkan a dan b adalah bilangan bulat positif dengan $a > b$, $\text{KPK}[a, b] = 462$, dan $\text{FPB}(a, b) = 33$. Tentukan faktor prima terbesar dari a yang bukan merupakan faktor prima dari b .
3. Tentukan kelipatan positif terkecil dari 45 yang disusun hanya dengan menggunakan angka 0 dan 1.

4. Tentukan jumlah angka-angka dari bilangan $(10^{22} + 8) \div 9$.
5. Berapa banyak bilangan bulat positif kurang dari 1000 yang habis dibagi 2 dan 3 tetapi tidak habis dibagi 5?

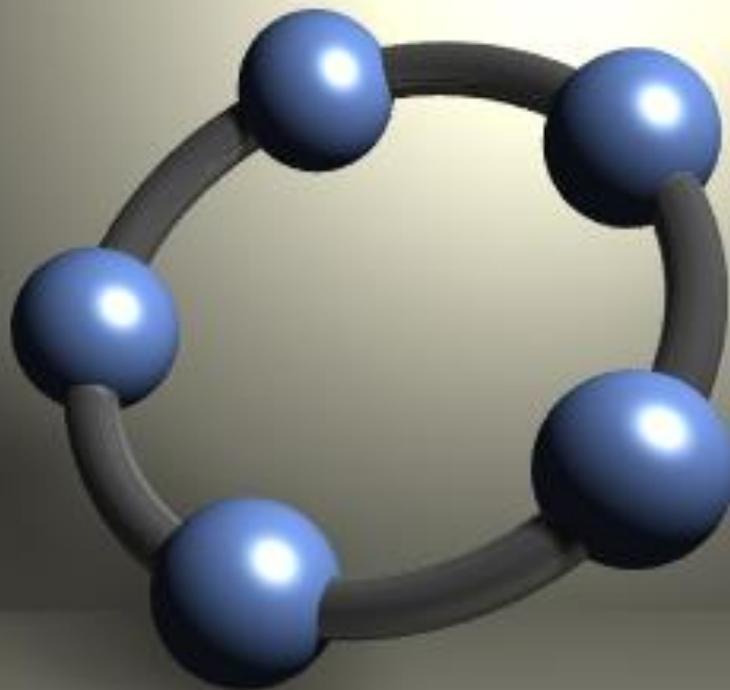
Demikianlah bagian pertama dari materi teori bilangan yang membahas hal-hal mendasar tentang kelipatan, bilangan prima, faktorisasi prima, KPK, faktor/pembagi, dan FPB. Selanjutnya pada bagian kedua dari materi teori bilangan, insyaa Allah akan dibahas hal-hal lebih lanjut dan lebih mendalam tentang faktorisasi prima, KPK, FPB, hubungan antara KPK dan FPB, serta masalah banyak pembagi suatu bilangan bulat positif.

REFERENSI

- Faires, J. Douglas. 2006. *First Steps for Math Olympians: Using the American Mathematics Competitions*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- Kalman, Richard. 2008. *Math Olympiad Contest Problems Volume 2*. Bellmore, NY: Mathematical Olympiads for Elementary and Middle School, Inc.
- Crawford, Mathew. 2006. *The Art of Problem Solving: Introduction to Number Theory*. Alpine, CA: AoPS Inc.
- Rusczyk, Richard, David Patrick dan Ravi Boppana. 2011. *The Art of Problem Solving: Prealgebra*. Alpine, CA: AoPS Inc.
- Wiworo. 2011. *Pengoptimalan Potensi dan Pembentukan Karakter Siswa Berbakat Melalui Klub Matematika dan Sains di Sekolah (Refleksi 8 Tahun Perjalanan Tim Olimpiade Sains SMP Negeri 8 Yogyakarta, 2003 – 2011)*. Disampaikan pada *Talkshow Lomba Matematika Nasional 2011*, Departemen Matematika, FMIPA, UGM.
- Wiworo. 2014. *Model Kegiatan Olimpiade Matematika di Sekolah dalam Rangka Pengoptimalan Potensi Siswa Berbakat Matematika (Contoh Kegiatan Pembinaan Olimpiade Matematika di SMP Negeri 8 Yogyakarta)*. Paper pada *Proceeding Seminar Nasional Pendidikan Matematika (SeNdiMat) I Tahun 2013*. Yogyakarta: PPPPTK Matematika.
- Wiworo. 2015. *Cara Menentukan Banyak Faktor Bilangan Bulat Positif*. Paper pada *Proceeding Seminar Nasional Pendidikan Matematika (SeNdiMat) II Tahun 2014*. Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

*) Wiworo, S.Si, M.M.

Widyaiswara PPPPTK Matematika Yogyakarta
dan Pembina Tim Olimpiade Matematika SMPN 8 Yogyakarta tahun 2003 - sekarang



<https://help.geogebra.org>

Pembelajaran Himpunan Menggunakan GeoGebra

*) Fadjar Noer Hidayat

GeoGebra sebagai perangkat lunak matematika sudah banyak digunakan oleh guru matematika untuk menerangkan berbagai materi pelajaran matematika agar lebih mudah dipahami oleh siswa. Namun dari penerapan GeoGebra pada berbagai materi matematika di kelas oleh guru, materi himpunan belum banyak dijumpai. Materi himpunan yang diberikan untuk siswa kelas VII sering disampaikan oleh guru dengan cara konvensional menggunakan papan tulis atau paparan dengan menuliskan himpunan dengan anggotanya dan memberikan hasil operasi himpunannya dengan menuliskan hasilnya atau menampilkan hasil yang sudah disiapkan sehingga kurang interaktif. Dengan menggunakan GeoGebra guru dapat menampilkan himpunan secara langsung dan interaktif. Dengan menggunakan GeoGebra, guru cukup mengganti atau memberikan anggota himpunan yang berbeda, dan memilih operasi himpunan yang diinginkan, maka GeoGebra akan langsung menunjukkan hasil yang sesuai. Jadi seperti kalkulator himpunan dengan masukan berupa anggota-anggota dari himpunan yang dioperasikan.

GeoGebra dapat digunakan sebagai media dalam pembelajaran himpunan untuk menunjukkan contoh himpunan secara nyata karena tersedianya fasilitas himpunan dalam bentuk *List*/daftar. *List* ini dapat dioperasikan seperti kita mengoperasikan himpunan. Dalam pembelajaran himpunan menggunakan GeoGebra dapat dilakukan entah itu dengan mengembangkan aplikasi atau memanfaatkan CAS secara langsung yang dapat digunakan oleh guru untuk menerangkan himpunan di depan kelas atau digunakan secara mandiri oleh siswa.

Ada 2 metode di GeoGebra yang dapat digunakan dalam himpunan yaitu:

1. Penggunaan perintah *List* (*List Command*) seperti *union*, *intersection*, *append*, *remove* dan operator *list* seperti \in (*element*), \subset (*strict subset*), \subseteq (*subset*), atau \setminus (*different*).
2. Penggunaan operator *boolean* seperti AND (&&/ $\&$), OR (|| / \vee), atau NOT (!/ \neg)

Untuk itu guru perlu mengetahui perintah-perintah di Geogebra yang terkait dengan himpunan dan dapat langsung menerapkan perintah-perintah itu menggunakan fitur Tampilan CAS.

Pembelajaran Himpunan dengan Fitur Tampilan CAS GeoGebra

Himpunan dalam GeoGebra diimplementasikan menggunakan fitur *List*/Daftar. Namun ada perbedaan antara konsep himpunan dengan fitur *List* Geogebra. Beberapa perbedaannya antara lain:

1. *List* di GeoGebra urutan anggotanya sangat menentukan sehingga jika $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{3,1,2\}$ maka A dan B dikatakan tidak sama. Sedangkan di konsep himpunan, dua himpunan A dan B dikatakan sama bila mereka mempunyai anggota yang sama tanpa memperhatikan urutan.
2. *List* dalam GeoGebra tidak bisa menyatakan himpunan tak hingga (*infinite set*) sehingga harus didaftar atau dinyatakan batasnya saat mendefinisikan himpunannya dan selalu merupakan himpunan hingga (*finite set*).
3. Operasi penjumlahan dan pengurangan *List* di GeoGebra memberikan hasil yang berbeda dengan operasi penjumlahan dan pengurangan di himpunan. Perintah $A + B$ atau $A - B$ pada *list* di GeoGebra akan menjumlahkan atau mengurangi anggota *list* yang sesuai urutan dalam kedua *list*. Sedangkan penjumlahan dan pengurangan (selisih) 2 himpunan di konsep himpunan mempunyai definisi sebagai berikut:

$$A + B = \{x \mid x \in A, x \in B, x \notin A \cap B\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

Misal: Jika $A = \{2,3,4\}$ dan $B = \{1,2,3\}$ maka di GeoGebra perintah $A + B$ dan $A - B$ akan menghasilkan $A + B = \{3,5,7\}$ dan $A - B = \{1,1,1\}$. Padahal di konsep himpunan hasilnya harusnya adalah $A + B = \{4,1\}$ dan $A - B = \{4\}$. Oleh karena itu harus hati-hati menggunakan operasi tersebut agar tidak membingungkan siswa.

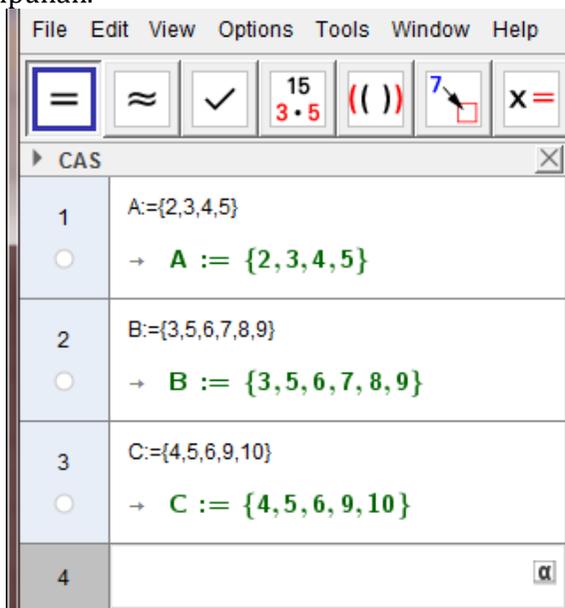
Selanjutnya akan diberikan contoh penerapan GeoGebra pada konsep himpunan menggunakan fitur CAS View yang langsung memberikan hasilnya ketika perintahnya dijalankan. Di GeoGebra, dapat didefinisikan himpunan sebagai *List* yang dituliskan menggunakan tanda kurung kurawal $\{ \}$. Beberapa operasi himpunan yang disediakan antara lain $\in, \subset, \subseteq, \setminus$ perintah *Intersection*, perintah *Union* dan perintah *Remove*.

Sebagai contoh kita mempunyai himpunan sebagai berikut:

$$A = \{2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{3, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad C = \{4, 5, 6, 9, 10\},$$

dan himpunan semesta $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

1. Pertama, harus didefinisikan himpunan tersebut di GeoGebra. Untuk itu, buka GeoGebra dan tampilkan fitur CAS-nya (Gunakan aplikasi GeoGebra yang paling lengkap yaitu GeoGebra Classic 5 atau 6).
2. Ketikkan perintah berikut di Tampilan CAS untuk mendefinisikan himpunan A , B , dan C di atas. Penggunaan perintah $:=$ untuk memberikan nilai pada suatu variabel agar tidak rancu dengan perintah $=$ yang bisa berarti perintah logika yang bernilai benar atau salah dengan membandingkan kesamaan 2 nilai. Tanda apit kurung kurawal menunjukkan bahwa nilai A , B , dan C berupa suatu *list* dalam GeoGebra atau himpunan dalam konsep himpunan.

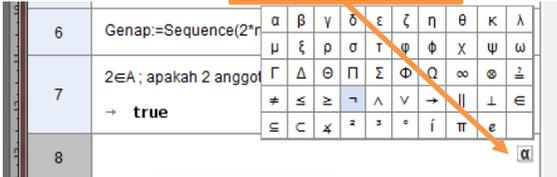


3. Untuk himpunan yang mempunyai anggota bilangan yang berurutan seperti himpunan A atau himpunan S (semesta), bisa digunakan perintah $A:=2..5$ atau $S:=1..10$. Perintah $1..10$ akan memberi nilai suatu himpunan yang berisi bilangan bulat dari 1 sampai 10. Himpunan barisan bilangan juga bisa didefinisikan dengan perintah **Sequence**. Perintah **Sequence** ($2*n, n, 1, 10$) artinya membuat himpunan bilangan genap berbentuk $2 \times n$, dengan variabel n mulai dari 1 sampai 10.

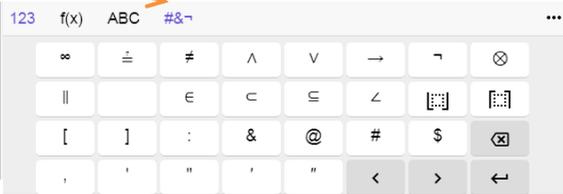
4	$S:=1..10$ → $S := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
5	$K:=Sequence(10)$ → $K := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
6	$Genap:=Sequence(2*n, n, 1, 10)$ → $Genap := \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

4. Untuk menulis operator \in (anggota/element), \subset (himpunan bagian sebenarnya/wajar/proper subset/strict subset) atau \subseteq (himpunan bagian/subset), klik tanda α di sebelah kanan baris perintah yang aktif dan pilih operator yang sesuai (untuk GeoGebra 5). Untuk GeoGebra 6, klik tab $\# \& \neg$ di Tampilan Keyboard.

Klik tanda α atau $\# \& \neg$ untuk memunculkan operator



GeoGebra 5



GeoGebra 6

5. Untuk mengetahui apakah :

- $2 \in A$
- $A \subseteq S$
- $C \subset Genap$
- $\{\} \subset A$

Catatan: Perintah setelah tanda ; hanya sebagai keterangan dan bukan perintah yang dijalankan oleh GeoGebra.

7	$2 \in A$; apakah 2 anggota A? → true
8	$A \subseteq S$; Apakah A himpunan bagian S? → true
9	$C \subset Genap$; apakah C himpunan bagian Genap? → false
10	$\{\} \subset A$; apakah himpunan kosong himpunan bagian A? → true

6. Untuk menunjukkan himpunan bagian pada pembelajaran himpunan dengan GeoGebra di sekolah sebaiknya menggunakan operator \subseteq (*proper subset* atau *strict subset*) daripada operator \subset (*subset*) karena di GeoGebra $A \subset A$ akan bernilai salah (*false*) dan $A \subset B$ akan bernilai benar (*true*) jika ada anggota B yang bukan merupakan anggota A. Padahal di sekolah dinyatakan setiap himpunan merupakan himpunan bagian dirinya sendiri. Untuk lebih jelasnya diberikan contoh berikut:

$P = \{2,3,4\}$ $Q = \{1,2,3,4\}$ $R = \{4,3,2\}$
 $P \subset Q$ bernilai Benar
 $P \subset R$ bernilai Salah
 $P \subseteq R$ bernilai Benar

CAS	
1	$P:=\{2,3,4\}$ → $P := \{2,3,4\}$
2	$Q:=\{1,2,3,4\}$ → $Q := \{1,2,3,4\}$
3	$R:=\{4,3,2\}$ → $R := \{4,3,2\}$
4	$P \subset Q$ → true
5	$P \subset R$ → false
6	$P \subseteq R$ → true

7. Di GeoGebra operasi himpunan seperti gabungan \cup atau irisan \cap dapat dilakukan dengan menggunakan perintah berupa fungsi *Union* dan *Intersection* dan hanya bisa mengoperasikan 2 himpunan maka jika ingin mengoperasikan lebih dari 2 himpunan maka kita menggunakan fungsi tersebut lebih dari sekali. Sebagai contoh:

$A \cap B$ dituliskan *Intersection (A,B)*
 $A \cup B$ dituliskan *Union (A,B)*
 $A \cap B \cap C$ dituliskan *Intersection(A, intersection(B,C))*

Tentukan $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, dan $A \cap B \cap C$.

10	<i>Intersection(A, B); A irisan B</i> → $\{3, 5\}$
11	<i>Intersection(A, C)</i> → $\{4, 5\}$
12	<i>Intersection(B, C)</i> → $\{5, 6, 9\}$
13	<i>Intersection(A, Intersection(B, C)); A irisan B irisan C</i> → $\{5\}$

Tentukan $A \cup B$, $B \cup C$, $C \cup A$, dan $A \cup B \cup C$

14	<i>Union(A, B); A gabungan B</i> → $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
15	<i>Union(B, C)</i> → $\{3, 5, 6, 7, 8, 9, 4, 10\}$
16	<i>Union(C, A)</i> → $\{4, 5, 6, 9, 10, 2, 3\}$
17	<i>Union(Union(A, B), C); A gab B gab C</i> → $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

8. Untuk operasi Selisih Himpunan, GeoGebra memberikan operator yang khusus berupa tanda \setminus (*backslash*), sehingga untuk menyatakan operasi selisih himpunan $A - B$ dituliskan dalam GeoGebra sebagai $A \setminus B$. Sebenarnya ada perintah **Remove** untuk menghapus anggota himpunan dari suatu himpunan yang lain, namun tanda \setminus lebih mudah digunakan.

Perlu kehati-hatian dalam menggunakan perintah $A - B$ untuk himpunan di GeoGebra, karena $A - B$ di GeoGebra akan mengurangi anggota himpunan yang sesuai urutan dalam kedua himpunan dan bukan menghasilkan selisih himpunan di konsep himpunan yang mempunyai definisi $A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$

Perhatikan contoh berikut untuk menunjukkan selisih dua himpunan menggunakan GeoGebra.

Tentukan: $A - B$ dan $B - A$

6	A <input type="radio"/> → {2, 3, 4, 5}
7	B <input type="radio"/> → {3, 5, 6, 7, 8, 9}
8	$A \cap B$; $A - B$ <input type="radio"/> → {2, 4}
9	$B \cap A$; $B - A$ <input type="radio"/> → {6, 7, 8, 9}

9. Untuk mencari komplemen suatu himpunan maka harus melibatkan semestanya. Untuk itu harus dinyatakan secara jelas himpunan semestanya. Sebagai contoh seperti di atas harus ditentukan lebih dahulu himpunan S sebagai himpunan semestanya. Dalam contoh di atas $S := 1..10$ atau $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ sebagai himpunan semestanya.

Untuk menyatakan komplemen suatu himpunan di GeoGebra dapat dilakukan dengan menggunakan operasi selisih himpunan tersebut dengan himpunan semestanya. Sebagai contoh: B^c dapat dituliskan $S \setminus B$.

Tentukan A^c dan B^c

10	S <input type="radio"/> → {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
11	A <input type="radio"/> → {2, 3, 4, 5}
12	B <input type="radio"/> → {3, 5, 6, 7, 8, 9}
13	$S \setminus A$; Komplemen himpunan A <input type="radio"/> → {1, 6, 7, 8, 9, 10}
14	$S \setminus B$; komplemen himpunan B <input type="radio"/> → {1, 2, 4, 10}

10. Selain anggota himpunan berupa bilangan, kita juga bisa menyatakan anggota himpunan dalam bentuk lain. Misalnya H adalah himpunan hewan di sekitar kita dapat dituliskan sebagai $H := \{\text{"Kucing"}, \text{"Ayam"}, \text{"Anjing"}, \text{"Tikus"}, \text{"Bebek"}\}$.

Jangan lupa anggotanya dituliskan dalam tanda petik ganda karena dikhawatirkan namanya merupakan suatu variabel yang sudah digunakan sehingga akan berisi nilai dari variabel tersebut.

Perhatikan contoh berikut.

15	H:={"Kucing","Ayam","Anjing","Tikus", "Bebek"} → H := {"Kucing", "Ayam", "Anjing", "Tikus", "Bebek" }
16	Hewanberkaki2:={"Ayam","Bebek"} → Hewanberkaki2 := {"Ayam", "Bebek" }
17	HewanBerkakiLebihdari2:=H \ Hewanberkaki2 → HewanBerkakiLebihdari2 := {Kucing, Anjing, Tikus}
18	Huruf={"A","B","C","D","E"} → Huruf := {"A", "B", "C", "D", "E" }
19	Union(H, Huruf) → {Kucing, Ayam, Anjing, Tikus, Bebek, A, B, C, D, E}
20	

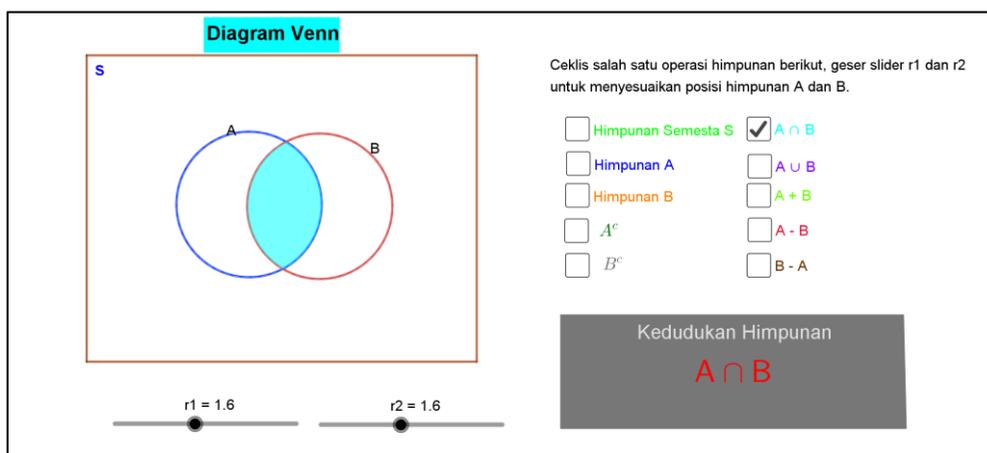
Untuk baris no 18, jika huruf A,B, dan C ditulis tidak dalam tanda petik maka himpunan Huruf akan berisi nilai variabel A dan bukan huruf A.

Dengan menguasai perintah-perintah himpunan di GeoGebra, guru dapat menggunakan GeoGebra untuk mendemonstrasikan materi tentang himpunan kepada peserta didiknya dan bisa langsung menunjukkan hasil dari operasi-operasi himpunan sehingga akan memperkuat pemahaman mereka.

Pembelajaran Himpunan dengan Diagram Venn

Pembelajaran himpunan dengan Diagram Venn menggunakan GeoGebra sudah banyak tersedia di situs GeoGebra. Kita tinggal menggunakannya dengan menjalankan aplikasi tersebut. Salah satu aplikasi yang penulis pernah kembangkan dan dapat langsung dijalankan tersedia di alamat <https://ggbm.at/JAu2p9Bu> atau bisa diunduh file GeoGebranya dengan nama **Himpunan.ggb** di alamat ini <https://s.id/MSTMatSMP> dan untuk menjalankan dan membukanya harus menggunakan program GeoGebra.

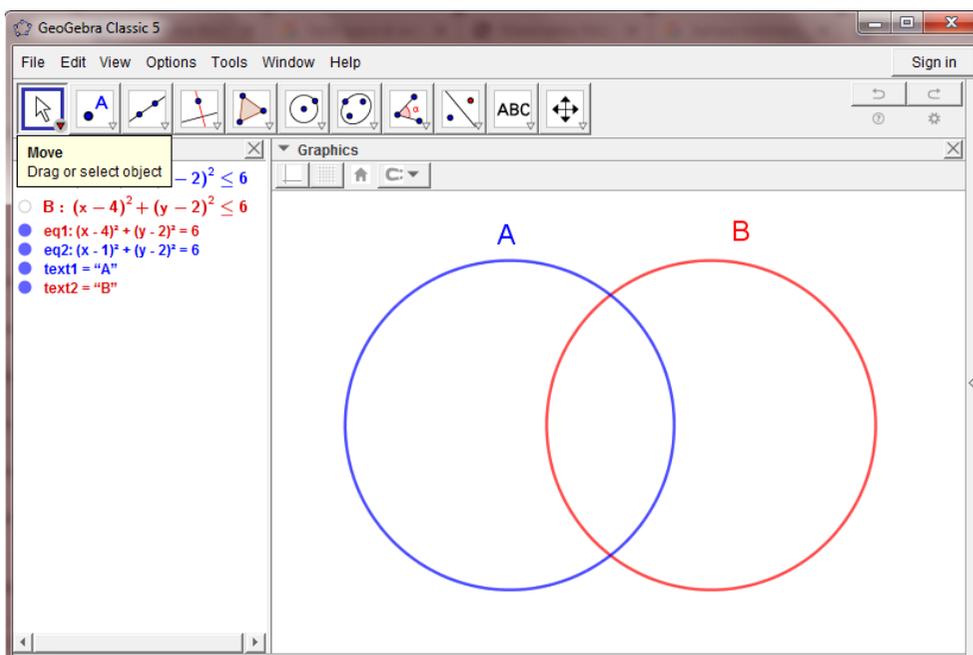
Aplikasi ini dapat digunakan untuk menunjukkan operasi antara 2 himpunan dengan diagram Venn. Berikut ini adalah tampilan programnya.



1. Anda bisa mengatur kedudukan kedua himpunan tersebut dengan menggeser *slider* **r1** dan **r2**. Kedudukan himpunan tersebut bisa diatur keduanya saling beririsan, saling asing, dan satu himpunan menjadi subset himpunan yang lain.
2. Setelah itu Anda dapat mencetang salah satu operasi himpunan dengan mengklik kotak ceklisnya maka pada diagram Venn akan ditunjukkan hasil operasinya yang ditandai dengan warna yang sesuai.

Aplikasi GeoGebra tersebut dibuat menggunakan pertidaksamaan lingkaran dan mengoperasikan pertidaksamaan tersebut dengan operasi boolean GeoGebra seperti AND (& / \cap), OR (\cup / \cup), atau NOT (! / \cup). Tanda &, \cup atau ! dapat langsung diketik dari *keyboard* sehingga lebih cepat menuliskannya dibandingkan dengan menggunakan tanda \cap , \cup atau \cup yang harus dipilih dari simbol-simbol yang disediakan GeoGebra. Berikut ini sekilas bagaimana membuat aplikasi ini.

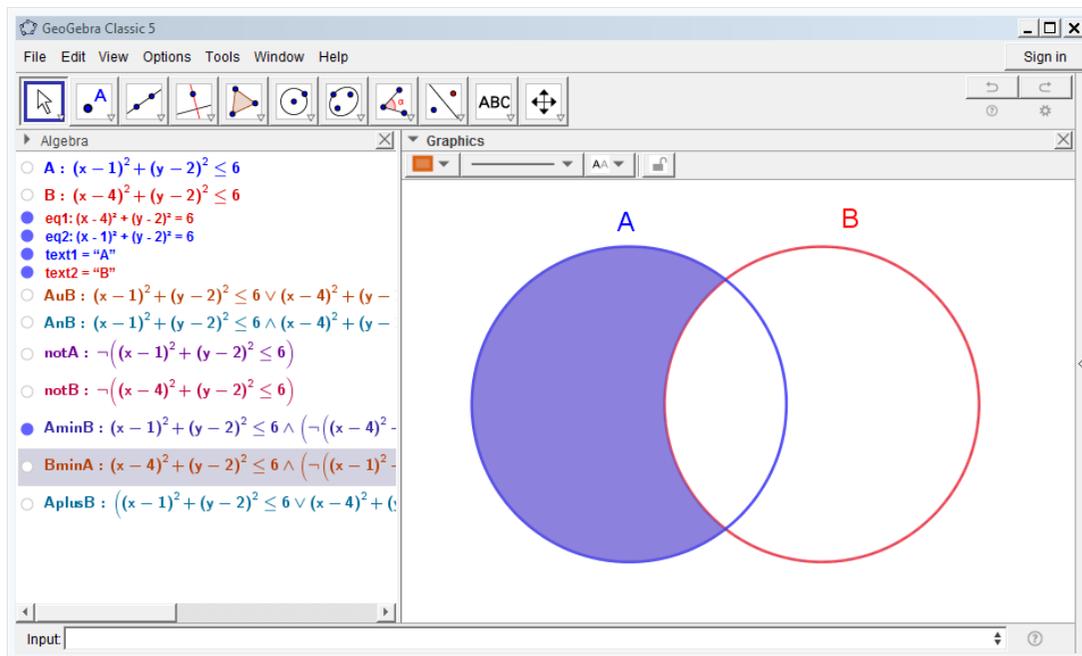
1. Membuat 2 lingkaran dalam bentuk 2 persamaan lingkaran dan 2 pertidaksamaan lingkaran setara yang berpotongan. Misalnya,
 Persamaan lingkaran: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 6$ dan $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 6$. Pertidaksamaan lingkarannya: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 6$ dan $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 \leq 6$.
 Persamaannya untuk menggambar garis lingkaran dan pertidaksamaannya untuk dikenakan operasi *boolean* karena persamaan tidak bisa diberikan operasi logika di GeoGebra. Pertidaksamaannya dibuat tersembunyi (*hidden*) sehingga tidak tampil di tampilan grafik. Atur tampilannya sehingga seperti tampilan di bawah ini



2. Setelah itu tinggal membuat irisan, gabungan, dan operasi-operasi himpunan lain memanfaatkan operasi boolean seperti AND, OR dan NOT. Untuk operator AND dapat dituliskan dengan &&, operator OR dengan \cup , dan operator NOT dengan !. Kita ketikkan perintah berikut ini di kotak input untuk membuat tampilan irisan, gabungan, dan seterusnya.
 - Tampilan $A \cup B$ dituliskan **AuB = A && B**
 - Tampilan $A \cap B$ dituliskan **AnB = A \cup B**
 - Tampilan A^c dituliskan **notA = !A**
 - Tampilan B^c dituliskan **notB = !B**
 - Tampilan $A - B$ dituliskan **AminB = A && notB**
 - Tampilan $B - A$ dituliskan **BminA = B && notA**
 - Tampilan $A + B$ dituliskan **AplusB = AuB && !AnB**

Setelah itu kita tinggal atur mana yang mau ditampilkan. Cara yang paling mudah adalah dengan dengan mengklik bulatan yang ada di depan nama variabel di Tampilan Aljabar (Algebra view) untuk menampilkan atau menyembunyikan tampilan di Tampilan Grafik (Graphics View). Sebagai contoh tampilan berikut yang hanya menampilkan tampilan **AminB** untuk menunjukkan diagram venn $A - B$.

3. Anda dapat memperbaiki tampilan dengan memanfaatkan komponen checkbox untuk mengatur mana yang akan ditampilkan di Tampilan Grafik dengan mencentang objeknya seperti aplikasi yang penulis buat.



Mengembangkan Pembelajaran Himpunan dengan Aplikasi GeoGebra

Di laman GeoGebra, banyak terdapat aplikasi tentang himpunan yang sudah dikembangkan orang. Anda dapat mencarinya menggunakan kata kunci **Himpunan** dan dapat langsung digunakan dalam pembelajaran. Namun begitu aplikasi yang dibuat oleh orang lain pasti tidak akan memuaskan Anda ketika menggunakannya, oleh karena itu Anda dapat membuat aplikasi sendiri agar sesuai dengan keinginan Anda.

Berikut ini adalah beberapa hasil pencarian tentang himpunan di laman GeoGebra.

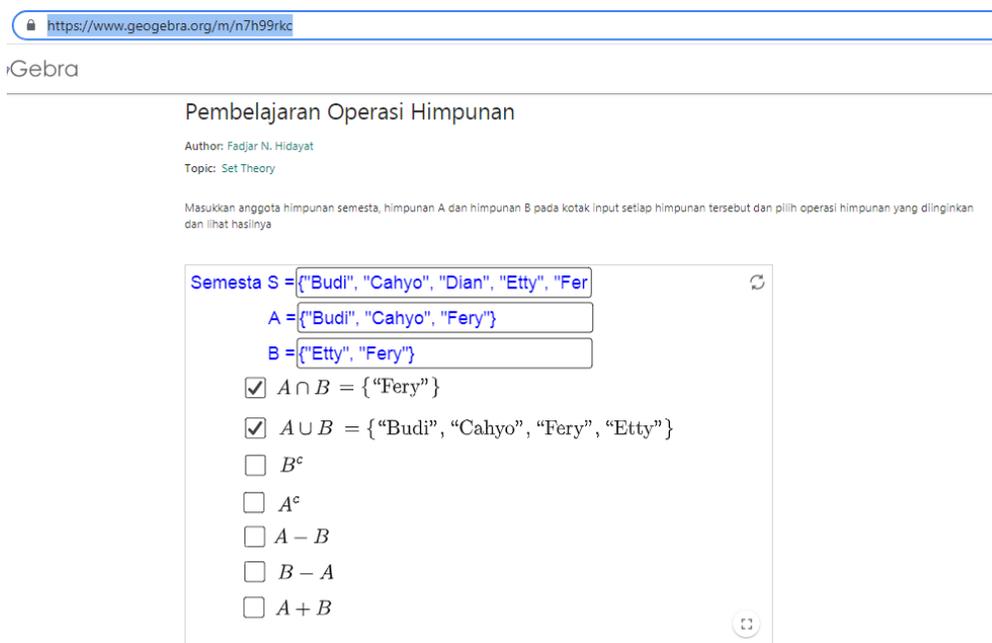
The screenshot shows a search results page on the GeoGebra website. The search term is "himpunan". The page displays a grid of resource cards under the heading "Resources".

The resources listed include:

- ACTIVITY Operasi Himpunan (Untung Trisna S.)
- ACTIVITY Himpunan (I Gede Sukaryo)
- ACTIVITY Operasi pada Himpunan (I Gede Sukaryo)
- ACTIVITY Pembelajaran Operasi Himpunan (Fadjar N. Hidayat)
- ACTIVITY Himpunan kosong dan himpunan (Yayat Dewi Riyani)
- ACTIVITY Operasi Himpunan Part 2 (I Gede Sukaryo)
- ACTIVITY LKPD Pertemuan 1 Himpunan (Astri Onelna)
- ACTIVITY Operasi Himpunan Part 1 (I Gede Sukaryo)

Salah satu aplikasi tersebut adalah aplikasi Pembelajaran Operasi Himpunan yang penulis kembangkan yang dapat Anda buka di alamat <https://www.geogebra.org/m/n7h99rk>. Pada aplikasi ini Anda dapat menentukan sendiri anggota-anggota himpunan semesta dan himpunan A dan B yang dapat Anda isikan pada kotak input yang disediakan. Tetapi untuk memasukkan anggotanya jangan lupa diawali dan diakhiri dengan kurung kurawal untuk menyatakan sebagai

himpunan. Untuk anggota himpunan yang bukan bilangan masukkan namanya di antara tanda petik ganda. Setelah itu Anda tinggal mencentang operasi himpunannya dan melihat hasilnya.



Aplikasi ini bisa digunakan di kelas dengan mendemonstrasikan suatu himpunan yang kita definisikan anggota-anggota himpunannya dan kemudian ditunjukkan hasil operasinya.

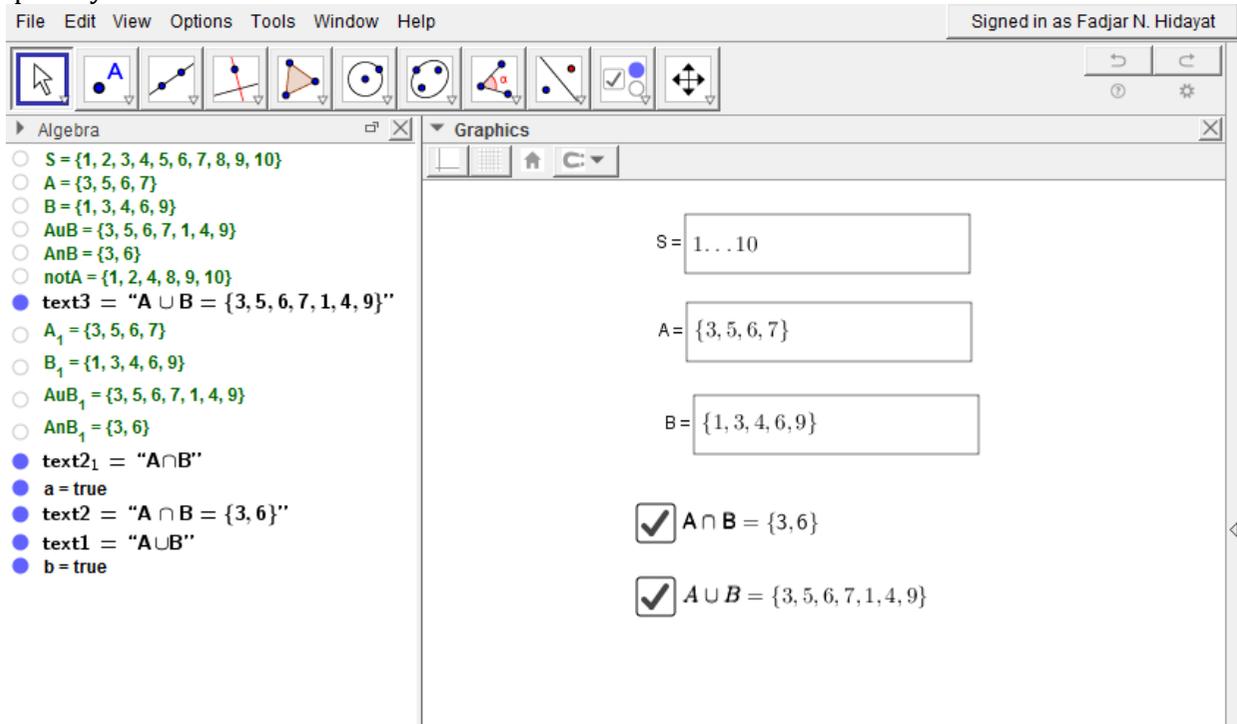
Untuk membuatnya sebenarnya cukup mudah. Berikut ini beberapa petunjuk dalam membuat aplikasi tersebut.

1. Buat tiga buah himpunan, yaitu himpunan S, A, dan B. Himpunan S sebagai himpunan semesta mempunyai anggota yang lebih banyak dan menampung semua anggota himpunan A, dan B. Sebagai contoh Anda bisa ketikkan perintah berikut:
 - S={1..10}
 - A={3,5,6,7}
 - B={1,3,4,6,9}

Membuat himpunan bilangan yang berurutan menggunakan tanda .. jauh lebih cepat daripada mendaftar seluruh anggotanya (menulis S={1..10} lebih cepat daripada mendaftar seperti ini S={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10})

2. Buat 3 Input Box yang mengaitkannya dengan variabel tersebut sehingga akan muncul di tampilan grafik, 3 kotak input yang menampilkan anggota himpunannya. Anggota himpunannya bisa diedit tetapi usahakan di dalamnya tetap menggunakan kurung kurawal.
3. Buat variabel baru yang berisi semua hasil operasi himpunan A dan B. Misalnya: variabel AnB untuk menampung hasil irisan himpunan A dan B. Begitu juga untuk operasi yang lain. Jadi Anda bisa ketikkan:
 - AnB=intersection(A,B)
 - AuB=Union(A,B)
 - notA=S \ A
 - notB=S \ B
 - AminB=A \ B
 - BminA=B \ A
 - AplusB=AuB\AnB
4. Setelah semua variabel yang menampung hasil operasi himpunan telah terbentuk. Selanjutnya tinggal mengatur tampilan di tampilan grafiknya. Kita bisa menggunakan Text dan untuk menampilkan nilai hasil operasi dan Check

Box untuk menentukan text mana yang ditampilkan dan yang disembunyikan. Berikut ini contoh sebagian tampilannya.



Penutup

Materi himpunan yang diberikan untuk siswa kelas VII biasanya disampaikan guru dengan cara konvensional. Konvensional ini, salah satunya diartikan sebagai proses pembelajaran di mana guru menggunakan papan tulis atau paparan dengan menuliskan himpunan dengan anggotanya dan memberikan hasil operasi himpunannya dengan cara menuliskannya. Cara ini kurang interaktif. Dengan GeoGebra kita bisa menampilkan himpunan secara langsung dan interaktif. Cukup dengan memberikan anggota himpunan yang berbeda, hasil operasi himpunan akan langsung ditunjukkan.

GeoGebra dengan fasilitas pendefinisian variabel berbentuk *List*/Daftar dapat digunakan untuk menunjukkan contoh himpunan secara nyata. *List* ini dapat dioperasikan seperti halnya mengoperasikan himpunan. Dalam pembelajaran himpunan penggunaan GeoGebra dapat dilakukan dengan mengembangkan aplikasi atau memanfaatkan CAS secara langsung yang dapat digunakan oleh guru untuk menerangkan himpunan di depan kelas atau digunakan secara mandiri oleh siswa. Diharapkan dengan menggunakan GeoGebra, pembelajaran himpunan menjadi lebih riil dan interaktif sehingga materi himpunan menjadi lebih menarik dan lebih memperkuat pemahaman siswa.

Referensi

- M. Ali Fauzi. 2020. *Matematika Komputasional: Himpunan*. PTIIK - UB. Diakses dari <http://malifauzi.lecture.ub.ac.id/files/2015/09/Himpunan.pdf>
- Ponidi & Masayuki Nugroho. 2020. *Pembelajaran SMP Terbuka Matematika Kelas VII: Modul 3 Himpunan*. Direktorat SMP, Ditjen PAUD, Dikdasmen, Kemdikbud. Jakarta. Diakses dari <http://ditsmp.kemdikbud.go.id/matematika-modul-3-himpunan/>
- Geogebra. 2020. *GeoGebra Classic Manual: Lists*. diakses dari <https://wiki.geogebra.org/en/Lists>

*) Fadjar Noer Hidayat, M.Ed
Widyaiswara PPPPTK Matematika Yogyakarta



PEMBELAJARAN SOSIAL DAN EMOSIONAL BERDASARKAN KERANGKA CASEL

*) Muhammad Arif

<https://www.kompasiana.com>

A. Pendahuluan

Kompetensi sosial dan emosional mengacu pada kemampuan untuk mengatur pikiran, emosi, dan perilaku seseorang. Keterampilan ini berbeda dengan kemampuan kognitif seperti melek huruf atau berhitung karena menyangkut bagaimana mengelola emosi, memahami diri sendiri dan terlibat dengan orang lain, daripada menunjukkan kemampuan mentah mereka untuk memproses informasi. Seperti halnya literasi dan numerasi, keterampilan sosial dan emosional bergantung pula pada faktor situasional dan responsif terhadap perubahan dan perkembangan melalui pengalaman belajar formal dan informal.

Dalam dunia yang semakin cepat berubah dan beragam, peran kompetensi sosial dan emosional menjadi lebih penting. Pergerakan manusia yang lebih cepat dan peralihan ke lingkungan perkotaan menuntut berpikir kreatif dan bekerja dengan orang baru. Populasi yang lebih beragam dan perubahan jaringan sosial memberikan penekanan tambahan pada rasa kepercayaan, kerja sama, dan kasih sayang orang-orang. Meningkatnya kompleksitas dan kecepatan teknologi perubahan menuntut kemampuan untuk bertindak secara mandiri dan menyesuaikan diri dengan perubahan saat bepergian.

Kompetensi sosial dan emosional menentukan seberapa baik orang menyesuaikan diri dengan lingkungan dan seberapa banyak yang dicapai dalam hidup mereka. Pengembangan kompetensi ini penting bukan hanya untuk kesejahteraan individu, tetapi juga untuk komunitas yang lebih luas dan masyarakat secara keseluruhan. Kemampuan warga negara untuk beradaptasi, berpikir asional, menghormati, bekerja sama dengan orang lain, bertanggung jawab secara pribadi dan kolektif yang menjadi ciri masyarakat semakin berfungsi dengan baik. Meningkatnya polarisasi ideologi dan ketegangan sosial meningkatkan kebutuhan akan toleransi dan rasa hormat, empati dan kemurahan hati, serta kemampuan untuk bekerja sama untuk mencapai dan melindungi kebaikan bersama. Kompetensi sosial dan emosional telah terbukti mempengaruhi banyak hasil kehidupan yang penting, mempengaruhi mengembangkan keterampilan kognitif.

B. Pembelajaran Sosial dan Emosional

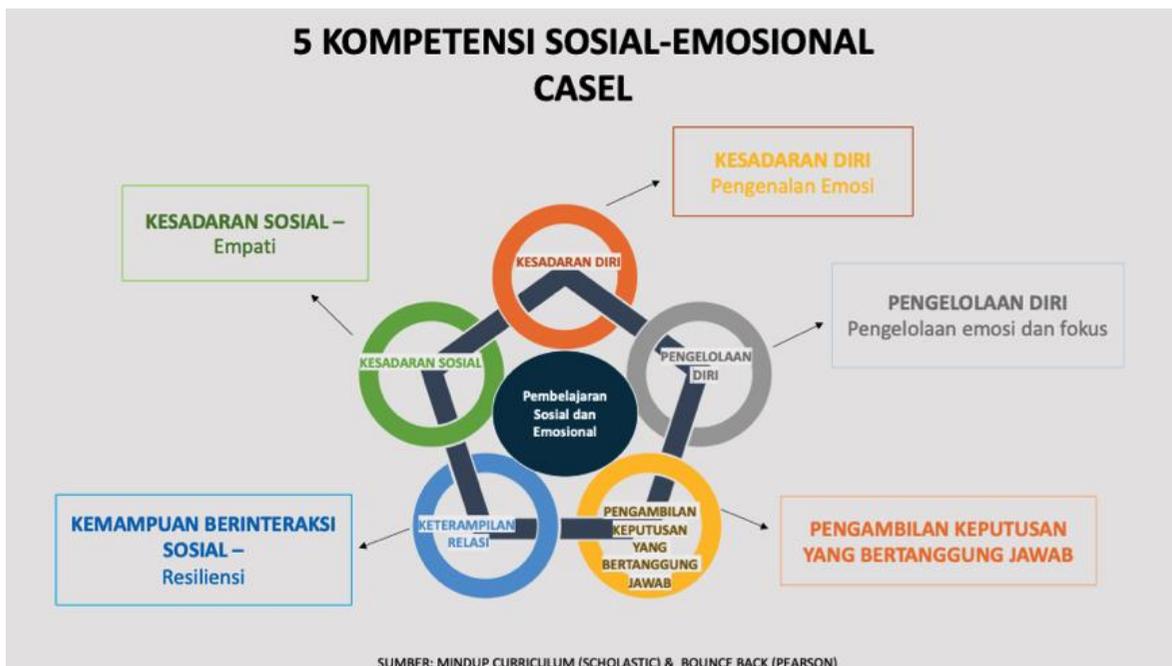
Menurut *Collaborative for Academic, Social, and Emotional, Learning* (CASEL), pembelajaran sosial dan emosional adalah pembelajaran yang dilakukan secara kolaboratif seluruh komunitas sekolah. Proses kolaborasi ini memungkinkan anak dan orang dewasa di sekolah memperoleh dan menerapkan pengetahuan, keterampilan dan sikap positif mengenai aspek sosial dan emosional. Pembelajaran sosial dan emosional bertujuan untuk 1) memberikan pemahaman, penghayatan dan kemampuan untuk mengelola emosi; 2) menetapkan dan mencapai tujuan positif; 3) merasakan dan menunjukkan empati kepada orang lain; 4) membangun dan mempertahankan hubungan yang positif; dan 5) membuat keputusan yang bertanggung jawab.

Pembelajaran sosial dan emosional (PSE) adalah hal yang sangat penting. Pembelajaran ini berisi keterampilan-keterampilan yang dibutuhkan anak untuk dapat bertahan dalam masalah sekaligus memiliki kemampuan memecahkannya, juga untuk mengajarkan mereka menjadi orang yang baik. PSE mencoba untuk memberikan keseimbangan pada individu dan mengembangkan kompetensi personal yang dibutuhkan untuk dapat menjadi sukses. Bagaimana kita sebagai pendidik dapat menggabungkan itu semua dalam pembelajaran sehingga anak-anak dapat belajar menempatkan diri secara efektif dalam konteks lingkungan dan dunia.

Pembelajaran sosial dan emosional adalah mengenai bagaimana kita menjalankan sekolah. Pengalaman apa yang akan dialami siswa, apa yang dipelajari siswa dan bagaimana guru mengajar. Kita dapat merancang bagaimana sekolah dan ruangan kelasnya, bagaimana waktu belajar, ruang-ruangan yang ada di sekolah, hubungan dengan komunitas sekolah dan keluarga dan yang lainnya sebagai tempat pertukaran pengetahuan, pengetahuan tentang dunia, pengetahuan tentang diri sendiri dan pengetahuan tentang orang lain yang berinteraksi dengan kita. Pengalaman-pengalaman tersebut membantu membentuk bagaimana siswa memahami diri mereka sendiri dan orang lain.

C. Kompetensi Sosial dan Emosional

CASEL menyoroti lima bidang penting kompetensi untuk keberhasilan akademis dan hubungan. Kompetensi itu meliputi kesadaran diri, manajemen diri, kesadaran sosial, keterampilan hubungan, dan pengambilan keputusan yang bertanggung jawab. Mengembangkan kompetensi sosial dan emosional anak dapat dilakukan baik di kelas maupun di rumah. Hal terpenting adalah hadir dan meluangkan waktu untuk berbagi dengan anak-anak. Membantu mereka mengembangkan keterampilan yang diperlukan.



Sumber: Modul Pembelajaran Sosial Emosional Program Guru Penggerak

Berikut ini kompetensi sosial dan emosional menurut CASEL.

1. Kesadaran Diri (*Self Awareness*)

Kesadaran diri adalah suatu kesadaran dalam memahami sifat, perilaku, dan perasaan diri sendiri. Mengenali emosi dan pikiran, memahami bagaimana mereka mempengaruhi perilaku dan menilai kekuatan dan kelemahan pribadi. Contoh seorang siswa yang sadar diri mungkin memperhatikan respons emosionalnya yang ketakutan saat dia akan mengikuti ujian. Dia mungkin merasakan jantungnya berdetak lebih cepat, membuat pikirannya berpacu saat dia

khawatir gagal dalam ujian. Untuk keluar dari keadaan ini, awalnya dia mempertimbangkan untuk memberi tahu gurunya bahwa dia merasa sakit, tetapi pada akhirnya dia menyadari bahwa perilaku ini adalah hasil dari emosi dan pikirannya yang mengamuk, dan dia menerima bahwa reaksi ini dapat terjadi ketika dia mengalami kecemasan.

Keterampilan yang mengembangkan kesadaran diri meliputi 1) mengidentifikasi dan menganalisis emosi seseorang, dan bagaimana pengaruhnya terhadap orang lain; 2) memahami hubungan antara emosi, pikiran, nilai, dan perilaku seseorang; 3) mengintegrasikan identitas pribadi dan sosial; 4) mengidentifikasi aset pribadi, budaya, dan bahasa; 5) menunjukkan kejujuran dan integritas; 6) memeriksa prasangka dan bias; 7) mengalami efikasi diri; 8) memiliki mindset berkembang; serta 9) mengembangkan minat dan rasa tujuan

2. Manajemen Diri (*Self Management*)

Manajemen diri adalah kemampuan untuk menavigasi, mengubah pikiran, emosi, dan perilaku seseorang dengan cara yang sehat untuk membuat keputusan dan mencapai tujuan yang bermanfaat bagi diri sendiri dan orang lain. Contoh seorang siswa yang tamat dari SD dan baru memulai belajar di SMP, merasa takut dengan situasi sekolah yang baru. Namun dia mengubah perasaan takut dengan melihatnya sebagai petualangan yang mungkin membawa teman-teman baru, guru-guru yang luar biasa, dan peluang-peluang menarik.

Keterampilan manajemen diri meliputi 1) mengatur dan mengekspresikan emosi seseorang dengan penuh pertimbangan; 2) menunjukkan ketekunan dan ketangguhan untuk mengatasi rintangan; 3) mempertahankan batasan yang sehat; 4) mengidentifikasi dan menggunakan strategi manajemen stres; 5) menetapkan tujuan pribadi dan kolektif; 6) menggunakan keterampilan perencanaan dan organisasi; 7) menunjukkan keberanian untuk mengambil inisiatif; 8) mendemonstrasikan agensi pribadi dan kolektif; 9) menjaga perhatian; 9) menggunakan umpan balik secara konstruktif; serta 10) melatih belas kasihan diri sendiri

Pada akhirnya, kesadaran diri dan manajemen diri terkait erat. Misalnya mampu berhenti dan tenang ketika seseorang sedang kesal (manajemen diri), membutuhkan keterampilan seperti mengenali dan memberi label pada emosi dan mempertimbangkan bagaimana emosi tersebut dapat mempengaruhi pilihan perilaku seseorang (kesadaran diri).

2. Kesadaran Sosial (*Social Awareness*)

Kesadaran sosial melibatkan kemampuan untuk memahami dan berempati dengan orang lain, terutama dengan orang-orang dari latar belakang yang berbeda dari dirinya sendiri. Contoh seorang guru memupuk empati siswa dengan mendorong mereka untuk menempatkan diri pada posisi orang-orang yang terkena musibah bencana alam. Kegiatan ini untuk membantu siswa memahami perasaan dan berusaha melakukan aksi nyata untuk membantu meringankan penderitaan yang dialami korban bencana.

Keterampilan yang mengembangkan kesadaran sosial meliputi 1) mengidentifikasi isyarat sosial (verbal, fisik) untuk menentukan bagaimana perasaan orang lain; 2) mengambil perspektif orang lain; 3) menunjukkan empati dan kasih sayang; 4) menunjukkan kepedulian terhadap perasaan orang lain; 5) memahami dan mengungkapkan rasa terima kasih; 6) mengenali kelebihan orang lain; 7) mengidentifikasi norma-norma sosial yang beragam, termasuk yang tidak adil; 8) mengenali tuntutan dan peluang situasional; serta 9) peduli dan termotivasi untuk berkontribusi pada kesejahteraan keluarga, teman, sekolah, masyarakat, lingkungan, dan kebaikan yang lebih besar.

3. Keterampilan Hubungan (*Relationship skills*)

Keterampilan hubungan adalah kemampuan untuk membangun hubungan positif, terutama dengan individu dan kelompok yang beragam, menggunakan berbagai metode seperti mendengarkan secara aktif, dan keterampilan komunikasi dan resolusi konflik. Keterampilan ini juga mencakup kemampuan untuk melawan tekanan dan untuk mencari dan menawarkan bantuan.

Keterampilan hubungan meliputi 1) memulai kontak dengan orang lain dan memupuk persahabatan, 2) berbagi pikiran dan perasaan dengan tepat, 3) berkomunikasi secara efektif, 4) mengembangkan hubungan positif, 5) menunjukkan kerendahan hati budaya, 6) mempraktikkan kerja tim dan pemecahan masalah kolaboratif, 7)

menyelesaikan konflik secara konstruktif, 8) mendekati hubungan dengan praanggapan positif, 9) menolak tekanan sosial negatif, 10) menolak stereotip, 11) mempertahankan hak orang lain, 12) menunjukkan kepemimpinan dalam kelompok, dan 12) mencari atau menawarkan dukungan dan bantuan saat dibutuhkan

Pada akhirnya, kesadaran sosial dan keterampilan hubungan saling terkait erat. Misalnya, ketika siswa berusaha menyelesaikan konflik di antara mereka sendiri (keterampilan hubungan), prosesnya menjadi lebih mudah ketika keduanya mampu berempati satu sama lain (kesadaran sosial).

4. Pengambilan Keputusan yang Bertanggung Jawab

Pengambilan keputusan yang bertanggung jawab adalah kemampuan untuk membuat pilihan yang peduli dan konstruktif tentang bagaimana berperilaku, berdasarkan pertimbangan standar etika yaitu manfaat dan konsekuensi bagi kesejahteraan pribadi, sosial, dan kolektif serta norma-norma sosial yang relevan dan masalah keselamatan. Komponen ini menekankan dimensi etis membuat keputusan yang bertanggung jawab secara pribadi dan sosial. Mulai dari pilihan sehari-hari yang sederhana sampai hal yang lebih kompleks dan lebih konsekuensial, siswa menghadapi segudang keputusan dengan implikasi etis. Contoh sahabat seorang siswa mengalami masalah pada mata pelajaran matematika dan bertanya apakah dia bersedia membantunya dalam tugas yang dibawa pulang. Guru mereka dengan jelas menetapkan bahwa tugas ini harus dilakukan secara individu.

Contoh lain seorang siswa menyaksikan beberapa teman sekelasnya mengejek teman sekelasnya yang baru saja pindah dari sekolah lain. Mereka mengejek aksennya dan mengolok-olok cara dia berpakaian. Siswa yang melihat ini merasa tidak nyaman, tetapi semua orang tampaknya ikut tertawa. Dia khawatir jika dia campur tangan, dia sendiri akan menjadi target.

Keterampilan yang terlibat dalam pengambilan keputusan yang bertanggung jawab meliputi 1) menunjukkan rasa ingin tahu dan pikiran terbuka; 2) mempelajari cara membuat penilaian yang masuk akal setelah menganalisis informasi, data, dan fakta; 3) membuat keputusan etis berdasarkan saling menghormati dan norma-norma sosial yang relevan secara budaya; 4) menyadari tanggung jawab seseorang untuk berperilaku etis; 5) mengidentifikasi solusi untuk masalah pribadi dan sosial; 6) mengantisipasi dan mengevaluasi konsekuensi dari tindakan seseorang; 7) menyadari bagaimana keterampilan berpikir kritis digunakan baik di dalam maupun di luar sekolah; 8) merefleksikan peran seseorang untuk meningkatkan kesejahteraan pribadi, keluarga, dan masyarakat; serta 9) mengevaluasi dampak pribadi, interpersonal, komunitas, dan institusi.

Konsep pengambilan keputusan etis dan tanggung jawab terkait erat dengan kompetensi sosial dan emosional lainnya. Misalnya, untuk melakukan hal yang benar dengan membela teman yang memperlakukan orang lain dengan buruk, seorang siswa perlu berhubungan dengan nilai-nilai mereka sendiri (kesadaran diri) dan mampu mengatur emosi yang saling bertentangan (manajemen diri); mereka juga harus mampu berempati dengan mereka yang terkena dampak (kesadaran sosial) dan menolak tekanan teman sebaya untuk bergabung (keterampilan hubungan).

D. Teknik Pembelajaran Sosial dan Emosional

Pembelajaran sosial dan emosional dapat diberikan dalam tiga ruang lingkup yaitu 1) rutin, pada saat kondisi yang sudah ditentukan di luar waktu belajar akademik, misalnya kegiatan lingkaran pagi (*circle time*), kegiatan membaca setelah jam makan siang; 2) terintegrasi dalam mata pelajaran, misalnya melakukan refleksi setelah menyelesaikan sebuah topik pembelajaran, membuat diskusi kasus atau kerja kelompok untuk memecahkan masalah; serta 3) protokol, menjadi budaya atau aturan sekolah yang sudah menjadi kesepakatan bersama dan diterapkan secara mandiri oleh murid atau sebagai kebijakan sekolah untuk merespon situasi atau kejadian tertentu. Misalnya, menyelesaikan konflik yang terjadi dengan membicarakannya tanpa kekerasan, mendengarkan orang lain yang sedang berbicara.

Berikut ini beberapa teknik pembelajaran sosial yang dapat diterapkan di kelas.

1. Emoji Pengenal Emosi (Emoji Emotions)

Dalam kegiatan ini siswa menggunakan emoji untuk mengomunikasikan apa yang mereka rasakan, membangun empati dengan mendengarkan orang lain. Emoji adalah ekspresi visual yang dapat mengungkapkan emosi seseorang. Pada pembelajaran tatap muka guru dapat memproyeksikan slide atau membuat selebaran dengan emoji yang mewakili berbagai macam emosi. Beri judul setiap emoji atau undang siswa untuk menyebutkan emosi



Sumber: <https://twitter.com/joypixels/status/1328777477062238209>

untuk masing-masing emoji atau menggambar emoji baru jika tidak ada pilihan yang sesuai dengan mereka. Kemudian minta mereka untuk menulis tanggapan jurnal singkat untuk menjelaskan bagaimana emoji mencerminkan apa yang mereka rasakan.

Pada pembelajaran daring guru membagikan layar untuk memproyeksikan *Google Slide* atau *google docs* dengan emoji yang mencerminkan berbagai emosi. Ketika memilih emoji dan memberikan masing-masing judul, siswa akan menggunakan jendela obrolan untuk berpartisipasi. Siswa diminta menjelaskan secara lisan atau tertulis mengapa memilih emoji dan apa yang memengaruhi perasaannya.

2. Latihan Kesadaran Penuh (*mindfulness*)

Kompetensi sosial dan emosional yang dikembangkan adalah kesadaran diri, manajemen diri. Istirahat *mindfulness* dapat membantu siswa dari segala usia belajar bagaimana mengidentifikasi dan mengatur emosi mereka ketika mereka sedih, takut atau stres.

Ajarkan teknik STOP ketika mereka menghadapi situasi emosional. Kendalikan stres dan ajari siswa untuk

- **Stop.** Hentikan sejenak segala aktivitas.
- **Take a breath to calm down.** Mengambil napas untuk menenangkan diri.
- **Observe the situation.** Mengamati situasi kondisi tubuh.
- **Proceed with a solution.** Melanjutkan dengan solusi.

Mintalah siswa untuk mengidentifikasi bagian tubuh yang terasa tegang. Ini bisa berupa bahu yang tegang, cemberut, atau bahkan kaki yang terasa kaku. Bimbing mereka dengan melepaskan stres untuk tubuh yang lebih seimbang.

Perhatikan indera. Mintalah siswa untuk mengidentifikasi:

- Lima hal yang bisa mereka **lihat**
- Empat hal yang bisa mereka **sentuh**
- Tiga hal yang bisa mereka **dengar**
- Dua hal yang bisa mereka **cium**
- Satu hal yang bisa mereka **rasakan**

3. Tantangan sasaran SMART

Kompetensi sosial dan emosional yang dikembangkan adalah manajemen diri. Motivasi diri adalah komponen penting untuk pembelajaran sosial-emosional. Jika Anda tidak yakin bagaimana memotivasi diri siswa, coba tantang mereka untuk mencapai potensi mereka dengan menetapkan sasaran SMART. SMART merupakan kependekan dari *Specific, Measurable, Achievable, Relevant* dan *Timebound*. Sasaran SMART harus Spesifik, Terukur, Dapat dicapai, Relevan, dan Terikat Waktu. Pada awal bulan atau semester, bekerjalah dengan setiap siswa untuk menetapkan tujuan SMART bagi diri mereka sendiri. Periksa dengan siswa beberapa kali sepanjang bulan untuk mengukur kemajuan dan mendukung mereka jika ada tantangan yang muncul. Jika siswa memenuhi tujuan mereka pada tanggal akhir yang disepakati, beri mereka penghargaan, atau bentuk apresiasi lainnya.

4. Penulisan jurnal

Kompetensi sosial dan emosional yang dikembangkan adalah kesadaran diri. Menulis jurnal merupakan cara yang cocok untuk sekolah menengah. Tujuan dalam penulisan jurnal untuk memproses informasi, memahami emosi, dan merenungkan pelajaran. Pembuatan jurnal dapat dilakukan setiap hari atau setiap minggu. Beri pertanyaan seperti apa yang sudah kamu pahami hari ini? Apa yang ingin kami pelajari lebih lanjut hari ini? Untuk mendorong refleksi siswa, pertimbangkan untuk menilai hanya satu atau dua entri yang dipilih siswa untuk ditunjukkan dalam jurnal.

5. Debat

Keterampilan sosial dan emosional yang dikembangkan adalah kesadaran diri adalah keterampilan hubungan, manajemen diri, dan pengambilan keputusan yang bertanggung jawab. Materi debat adalah pertanyaan yang berkaitan dengan pelajaran. Debat merupakan cara yang bagus untuk mengajar siswa merumuskan argumen, mendengarkan secara aktif, menyatakan tidak setuju secara terhormat dengan teman-teman mereka. Debat mudah diterapkan di dalam kelas, pilih topik debat yang baru saja dibahas, atau apapun yang disukai oleh siswa. Membagi siswa menjadi beberapa tim, lalu meminta siswa membuat argumen terstruktur dan menanggapi teman sekelas mereka. Ini juga merupakan cara yang bagus bagi siswa untuk melatih keterampilan berbicara di depan umum.

6. Rapat kelas

Kompetensi sosial dan emosional yang dikembangkan adalah pengambilan keputusan yang bertanggung jawab dan keterampilan hubungan. Berikan ruang untuk komunitas dan tanggung jawab. Adakan pertemuan kelas setiap minggu atau setiap bulan. Tantang siswa untuk membawa ide-ide yang membuat kelas menjadi lebih baik, libatkan semua siswa dalam kegiatan dan selesaikan masalah. Menggunakan rapat kelas sebagai ruang untuk mengumpulkan umpan balik siswa, menyelesaikan perselisihan, merencanakan acara kelas, atau bahkan hanya berbagi. Pertimbangkan untuk menggunakan formulir google atau kotak saran di kelas, lalu sampaikan umpan balik sebagai kelompok dan kembangkan solusi bersama.

E. Kesimpulan

Berdasarkan uraian di atas dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Pembelajaran sosial dan emosional adalah pembelajaran yang dilakukan secara kolaboratif seluruh komunitas sekolah yang memungkinkan anak dan orang dewasa di sekolah memperoleh dan menerapkan pengetahuan, keterampilan dan sikap positif mengenai aspek sosial dan emosional.
2. Pembelajaran sosial dan emosional bertujuan untuk memberikan pemahaman, penghayatan dan kemampuan untuk mengelola emosi; menetapkan dan mencapai tujuan positif; merasakan dan menunjukkan empati kepada orang lain; membangun dan mempertahankan hubungan yang positif; dan membuat keputusan yang bertanggung jawab teman sekelasnya tentang apa yang telah mereka pelajari dan menggunakan umpan balik dari hasil monitoring ini untuk membuat penyesuaian diri, adaptasi, dan perubahan perbaikan lainnya untuk meningkatkan keberhasilan belajarnya.
3. Kompetensi sosial dan emosional meliputi kesadaran diri (*Self awareness*), manajemen diri (*Self management*), kesadaran sosial (*Social awareness*), keterampilan hubungan (*Relationship skills*), dan pengambilan keputusan yang bertanggung jawab (*Responsible decision-making*).
4. Pembelajaran sosial dan emosional dapat diberikan dalam tiga ruang lingkup yaitu a) rutin, pada saat kondisi yang sudah ditentukan di luar waktu belajar akademik; b) terintegrasi dalam mata pelajaran, dan 3) protokol, menjadi budaya atau aturan sekolah yang sudah menjadi kesepakatan bersama dan diterapkan secara mandiri oleh murid atau sebagai kebijakan sekolah untuk merespon situasi atau kejadian tertentu.
5. Teknik pembelajaran kompetensi sosial dan emosional yang dapat diterapkan di kelas adalah emoji pengenalan emosi, latihan kesadaran penuh (*mindfulness*), tantangan sasaran SMART, penulisan jurnal, debat dan rapat kelas.

DAFTAR PUSTAKA

Ika W, Caesilia, dkk. 2021 *Paket Modul 2. Praktik Pembelajaran yang Berpihak Pada Murid Modul 2.2 Pembelajaran Sosial dan emosional*. Jakarta: Program Guru Penggerak. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

<https://casel.org/what-is-sel/>, diakses pada 29 Juli 2021.

<https://www.oecd.org>, diakses 29 Juli 2021

<https://www.prodigygame.com/main-en/blog/social-emotional-learning-activities/>, diakses 29 Juli 2021

https://ggie.berkeley.edu/student-well-being/sel-for-students-self-awareness-and-self-management/#tab_1, diakses 31 Agustus 2021

<https://blog.joypixels.com/how-teachers-use-emoji/>, diakses 05 September 2021.

*) Muhammad Arif

Guru SMA Negeri 12 Makassar, Kota Makassar, Provinsi Sulawesi Selatan/ CGP Angkatan 2 Kota Makassar.

*) Muhammad Arif

SMA Negeri 12 Makassar, Kota Makassar, Prov. Sulawesi Selatan



MENDORONG SISWA KELAS 7-12 UNTUK BERNALAR DAN MEMBUKTIKAN

*) Ulfa Aulyah Idrus

A. Pendahuluan

Berkat kemajuan teknologi, perhitungan matematis, mulai dari operasi aljabar sederhana hingga formulasi modern, dapat dilakukan dengan pemrograman komputer. Namun, hal itu tidak mengarah pada kesimpulan bahwa manusia tidak perlu lagi belajar matematika. Meskipun teknologi dapat melakukan perhitungan, komputer tidak dapat menalar, menganalisis, memodelkan, dan menyimpulkan situasi matematis dengan tingkatan yang sekompleks manusia. Di sisi lain, karena masalah sehari-hari yang dihadapi orang semakin sulit dan rumit; pengetahuan terpadu, berpikir kritis, dan pemecahan masalah adalah beberapa keterampilan yang dibutuhkan di abad 21 (Allen dan Velden, 2012).

Sejalan dengan penjelasan di atas, Yackel dan Hanna (2000) memaparkan bahwa belajar dan bernalar adalah dua hal yang tidak dapat dipisahkan. Penalaran di dalam matematika selalu diharapkan dapat menuju pada pembuktian (Yackel dan Hanna, 2000). Pembuktian matematis dibutuhkan untuk verifikasi kebenaran pernyataan, penjelasan mengapa sebuah pernyataan benar, dan sistematisasi kebenaran pernyataan. Dari sisi siswa, pentingnya pembuktian matematis tercantum dalam Stein dkk (2000) yang mengategorikan pembuktian sebagai level tertinggi pada *The Mathematical Task Analysis*, yaitu melakukan penugasan matematika. Tahap ini penting bagi pengembangan siswa karena menggunakan domain kognitif yang tinggi serta dapat melatih kemampuan kompleks dan non-algoritmik sehingga siswa dapat mengerti dan menghubungkan konsep dan proses dalam matematika. Pembuktian juga membuat siswa lebih mandiri dalam belajar karena membutuhkan monitor dan pengaturan sendiri untuk level kognitifnya.

Tulisan ini akan menjelaskan empat tingkat penjelasan matematis, modifikasi soal pembuktian, tiga fase penalaran matematis, dan syarat pembuktian matematis.

B. Empat Tingkat Penjelasan Matematis

Ketika siswa memberikan penjelasan matematis, terkadang informasi yang diberikan cukup untuk dikategorikan sebagai pembuktian, namun terkadang pula masih membutuhkan penalaran yang lebih jauh sebelum diklasifikasikan sebagai pembuktian. Berikut adalah tabel tingkatan penjelasan matematis menurut Stylianides (2019) dalam Stylianides (2010):

Tingkat Kecanggihan	Bukan Pembuktian	Pembuktian
↑	Rasionale	Demonstrasi
	Argumen Empiris	Argumen Generik

Tabel 1. Tingkatan Penjelasan Matematis

Perlu diperhatikan bahwa memberikan konsep yang salah seperti salah menggunakan definisi, menyajikan hubungan logika yang keliru seperti *circular reasoning*, dan melakukan operasi matematika yang keliru tidak dianggap ke dalam kategori bukan pembuktian di atas. Untuk lebih memahami tiap level pada tabel 1, kita bisa membahas contoh soal 1 berikut:

Solal 1

Buktikan bahwa jumlah tiga bilangan asli berurutan habis dibagi 3.

Ada beberapa kemungkinan penjelasan siswa dari soal 1, seperti solusi 1.1 berikut:

Solusi 1.1

Bisa dilihat bahwa

$$\begin{aligned}1 + 2 + 3 &= 6, \\5 + 6 + 7 &= 19, \\23 + 24 + 25 &= 72.\end{aligned}$$

Karena 6, 17, dan 72 habis dibagi 3, jumlah tiga bilangan asli berurutan selalu habis dibagi 3.

Solusi 1.1 memberikan beberapa contoh yang terkait dengan pernyataan yang akan diberikan sehingga dikategorikan sebagai *Argumen Empiris*. Solusi 1.1 menunjukkan bahwa 3 kelompok bilangan yang diberikan jumlahnya habis dibagi 3, namun tidak memberikan jaminan bagi kelompok bilangan yang lainnya. Dalam matematika, menunjukkan beberapa contoh, bukannya memeriksa semua kemungkinan kasus, tidak dianggap sebagai pembuktian.

Selanjutnya, perhatikan solusi 1.2 berikut:

Solusi 1.2

Jika ada 3 bilangan berurutan, salah satunya pasti habis dibagi 3, yang lainnya bersisa 1, dan yang lainnya bersisa 2, sehingga jumlah dari sisa pembagian adalah 3. Dengan demikian, total ketiga bilangan habis dibagi 3.

Solusi 1.2 memberikan informasi penting yang dibutuhkan dalam pembuktian soal 1. Pernyataan yang diberikan merupakan tahapan awal yang baik, namun belum cukup untuk menjadi pembuktian. Masih banyak konsep dan hubungan logis yang perlu dijelaskan, seperti alasan di balik klaim pada kalimat pertama dan kesimpulan yang diberikan. Penalaran seperti ini dikategorikan *Rasionale*.

Perhatikan pula solusi 1.3 berikut ini:

Solusi 1.3

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}1 + 2 + 3 &= 6 \\2 + 3 + 4 &= 9 \\3 + 4 + 5 &= 12 \\&\dots\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa hasil penjumlahan 6, 9, dan 12 habis dibagi 3. Untuk baris selanjutnya, setiap suku di ruas kiri ditambah 1, sehingga terjadi penambahan 3 angka untuk totalnya. Karena bilangan kelipatan tiga, jika ditambah 3 hasilnya kelipatan tiga, total setiap kelompok habis dibagi 3.

Solusi 1.3 dinilai memberikan *contoh generik*, yaitu hanya memberikan sedikit contoh, lalu dengan penjelasan yang cukup bisa menggeneralisasi pernyataan untuk semua angka. Penjelasan seperti ini biasanya digunakan oleh siswa yang sudah memiliki ide pembuktian yang baik namun masih kekurangan bahasa matematis untuk menjelaskan pembuktiannya.

Penjelasan matematis yang terakhir adalah *demonstrasi*. Demonstrasi bisa berupa segala jenis pembuktian formal yang biasa digunakan dalam matematika, seperti bukti langsung, bukti dengan pembagian kasus, bukti dengan induksi matematika, bukti dengan kontradiksi, bukti dengan contoh penyangkal, dan lain-lain. Perhatikan solusi 1.4 berikut:

Solusi 1.4

Bersasarkan algoritma pembagian, setiap bilangan bulat dapat dinyatakan dalam bentuk $3k$, $3k + 1$, atau $3k + 2$ untuk suatu bilangan bulat k .

Kasus 1. Misalkan bilangan pertama berbentuk $3k$, maka kelompok bilangan yang berurutan kita adalah $3k, 3k + 1, 3k + 2$.

$$\begin{aligned} 3k + 3k + 1 + 3k + 2 &= 9k + 3 && \because \text{Sifat komutatif penjumlahan} \\ &= 3(3k + 1) && \because \text{Sifat distributif} \end{aligned}$$

Kasus 2. Misalkan bilangan pertama berbentuk $3k + 1$, maka kelompok bilangan yang berurutan kita adalah $3k + 1, 3k + 2, 3k + 3$.

$$\begin{aligned} 3k + 1 + 3k + 2 + 3k + 3 &= 9k + 6 && \because \text{Sifat komutatif penjumlahan} \\ &= 3(3k + 2) && \because \text{Sifat distributif} \end{aligned}$$

Kasus 3. Misalkan bilangan pertama berbentuk $3k + 2$, maka kelompok bilangan yang berurutan kita adalah $3k + 2, 3k + 3, 3k + 4$.

$$\begin{aligned} 3k + 2 + 3k + 3 + 3k + 4 &= 9k + 9 && \because \text{Sifat komutatif penjumlahan} \\ &= 3(3k + 3) && \because \text{Sifat distributif} \end{aligned}$$

Solusi 1.4 dikategorikan demonstrasi karena meninjau semua kasus secara umum, serta menuliskan landasan konsep matematika serta hubungan logika dan operasi matematika yang jelas dan tepat.

C. Modifikasi Soal Pembuktian

Pemilihan soal pembuktian dan penentuan tingkatan penjelasan matematis yang diharapkan dari siswa perlu dipertimbangan berdasarkan level kognitif siswa dan tujuan pembelajaran di dalam kelas. Oleh karena itu, beberapa soal pembuktian bisa dimodifikasi sesuai kebutuhan. Sebagai contoh, jika siswa dianggap belum memiliki pengetahuan dan keterampilan prasyarat yang dibutuhkan untuk mengerjakan soal 1, guru bisa menggunakan soal 2 berikut:

Soal 2

Di antara kelompok bilangan di bawah ini, yang mana saja yang jumlahnya habis dibagi tiga? Buktikan.

- a. 23, 24, 25
- b. 28, 30, 40
- c. 16, 19, 22
- d. 20, 25, 31

Untuk soal 2, siswa hanya perlu melakukan penjumlahan dan mengecek apakah jumlah yang diperoleh habis dibagi tiga, lalu menuliskan prosedur yang dilakukannya sebagai pembuktian.

Soal 2 lebih mudah dibanding soal 3 berikut.

Soal 3

Tuliskan beberapa contoh kelompok tiga bilangan yang jumlahnya habis dibagi 3.

Untuk mengerjakan soal 3, siswa perlu menganalisis dan mencoba sendiri prosedur yang bisa digunakan untuk bisa menemukan jawaban yang diminta. Siswa bisa mencoba tiga bilangan secara acak, lalu menguji apakah jumlahnya habis dibagi 3, lalu memodifikasi bilangannya sedikit jika belum habis dibagi 3. Siswa juga bisa mengambil 3 bilangan kembar dan memindahkan sebagian nilai dari satu bilangan ke bilangan yang lain. Soal 2 dan soal 3 bisa diberikan kepada siswa yang telah mempelajari operasi dasar matematika. Ini berbeda dengan soal 1 yang membutuhkan pengetahuan dan keterampilan siswa tentang keterbagian dan perhitungan aljabar.

Kata *buktikan* pada soal 1 memudahkan siswa karena siswa bisa langsung percaya bahwa pernyataan yang diberikan pasti benar. Soal 1 bisa dibuat lebih menantang dengan mengubahnya seperti soal 4 berikut:

Soal 4

Periksa apakah jumlah tiga bilangan asli berurutan selalu habis dibagi 3.

Dengan menggunakan kata *periksa*, bukannya *buktikan*, siswa perlu melakukan analisis yang lebih dalam. Mereka pertama-tama bisa mencoba beberapa contoh yang bisa melatih mereka untuk berargumen secara empiris. Lalu mereka bisa memikirkan pernyataan pendukung untuk membantu mereka menyusun konjektur, sehingga mereka melatih teknik menjelaskan dengan *rasionale*. Mereka selanjutnya bisa memperhatikan contoh yang mereka telah pilih dan menganalisis pola untuk kelompok selanjutnya, lalu menganalisis hubungan kasus tersebut, yang merupakan teknik memberikan contoh generik. Akhirnya, ketika siswa telah yakin dengan konjektur yang dibuat, siswa bisa menguji konjektur ini dengan sebuah demonstrasi.

Soal 1 masih bisa dikembangkan lebih kompleks seperti soal 5 berikut:

Soal 5

Jika jumlah n bilangan berurutan selalu habis dibagi n , tentukan sebanyak-banyaknya nilai n yang mungkin.

Jika siswa telah mengerjakan soal 1, tentu mereka telah menemukan salah satu nilai n yang mungkin, yaitu tiga. Namun soal 5 ini merangsang siswa untuk berpikir lebih jauh tentang mengapa tiga bisa menjadi nilai untuk n , lalu sifat apa yang perlu dimiliki sebuah bilangan untuk bisa menjadi nilai dari n .

D. Tiga Fase Penalaran Matematis

Fase-fase dalam pembuktian matematis bisa diadopsi dari fase pemecahan masalah menurut Mason dkk (2010), yaitu fase awal, menyerang, dan meninjau ulang. Sebelum membahas fase-fase tersebut, perhatikan soal 6 berikut:

Soal 6

Apakah jumlah dua bilangan ganjil adalah bilangan genap?

Setelah membaca soal 6, siswa masuk pada fase *awal*. Di tahap ini, siswa bisa bertanya ke diri sendiri tentang apa yang mereka ketahui dan akan lakukan. Siswa perlu memastikan apakah mereka tahu definisi bilangan ganjil dan bilangan genap beserta sifat-sifat yang dimilikinya. Siswa juga perlu memikirkan strategi apa yang bisa mereka gunakan.

Fase kedua dalam penalaran matematis adalah *menyerang* yang kemudian terbagi ke dalam beberapa bagian. Bagian pertama adalah *membuat konjektur*. Di tahap ini siswa bisa mencoba beberapa bilangan ganjil lalu menemukan fakta bahwa contoh yang diambil selalu menghasilkan bilangan genap. Ini membuat siswa bisa membuat konjektur bahwa mungkin saja jumlah dua bilangan ganjil selalu genap. Setelah itu, siswa bisa *meyakinkan diri sendiri* dengan diawali rationale seperti apa yang terjadi dengan pola bilangan ganjil ketika dijumlahkan. Siswa kemudian bisa melanjutkan penalarannya dengan *pembuktian* menggunakan konsep-konsep matematika yang telah dipelajari. Siswa mungkin perlu mencoba beberapa strategi sebelum akhirnya menemukan strategi yang tepat. Misalnya, siswa bisa secara sistematis mencoba memasangkan tiap bilangan ganjil namun menemukan bahwa kombinasi yang dibutuhkan tidak terbatas. Lalu siswa bisa beralih untuk fokus pada satuan bilangan ganjil dan menemukan bahwa teknik ini menghasilkan kombinasi yang tidak terlalu banyak dan mungkin untuk dikerjakan.

Fase terakhir dalam penalaran matematis adalah *meninjau ulang*. Hal pertama yang bisa dilakukan siswa adalah *mengecek* kebenaran dan kelengkapan jawaban yang dituliskan. Setelah itu, siswa bisa *memperhatikan ide utama* yang digunakan dalam pembuktian lalu *menggunakan ide tersebut untuk konteks yang lebih luas*. Sebagai ilustrasi, siswa mungkin bisa mengeksplor apa yang terjadi jika ada tiga bilangan ganjil yang dijumlahkan? Atau bahkan secara umum, ada n bilangan ganjil yang dijumlahkan? Apakah hasilnya ganjil, genap, sekaligus kelipatan 3, 4, dst.? Bagaimana jika yang dijumlah adalah bilangan genap? Dan lain-lain.

E. Syarat Pembuktian Matematis

Lantas apa saja syarat yang harus dipenuhi oleh sebuah pembuktian yang baik? Tentu tidak ada jawaban yang tunggal untuk pertanyaan ini, semuanya bergantung pada level kognisi pembaca dan tujuan penulisan pembuktian. Thompson (1996) dalam Yackel dan Hanna (2003) mengemukakan bahwa pembuktian matematis membutuhkan inferensi, deduksi, induksi, dan hubungan antara kuantitas dan struktur. Di sisi lain, Krummheuer (1995) dalam Yackel dan Hanna (2003) menjelaskan dari segi sosial bahwa poin penting dari pembuktian matematis adalah adanya ruang bagi siswa untuk berinteraksi satu sama lain untuk menyelesaikan soal matematika.

Dari paragraf sebelumnya, kita bisa menyimpulkan bahwa dalam pembuktian matematis dibutuhkan fakta-fakta seperti definisi, teorema, lemma, dll, yang kemudian diberikan hubungan logis dan operasi matematis dan dijelaskan secara komunikatif. Fakta-fakta yang digunakan bisa diasumsikan telah disepakati oleh pembaca dan penulis, atau jika tidak, perlu diberikan penjelasan lebih untuk mencegah penjelasan matematis yang diberikan hanya sampai pada tahap rationale. Kelas bisa melakukan negosiasi tentang seperti apa ekspektasi guru terkait dengan pembuktian yang diberikan siswa. Kedalaman penjelasan juga disesuaikan dengan tujuan penulisan karena tidak dapat dipungkiri bahwa beberapa penjelasan dibuat tidak lengkap untuk merangsang pembaca berpikir lebih kritis.

Perhatikan soal 7 sebagai contoh:

Soal 7

Buktikan bahwa untuk semua bilangan asli n ,

$$2n + 2 = 2(n - 2) + 6.$$

Solusi 7.1 berikut merupakan sebuah alternatif penyelesaian dari soal 7.

Solusi 7.1

$$2n + 2 = 2(n - 2 + 2) + 2 = 2(n - 2) + 2(2) + 2 = 2(n - 2) + 4 + 2 = 2(n - 2) + 6.$$

Solusi 7.1 adalah sebuah pembuktian yang menggunakan *operasi matematika tanpa penjelasan*. Ini membuat pembaca bisa berpikir alasan untuk tiap tahap yang diberikan, misal sifat-sifat operasi dasar dalam aljabar, seperti komutatif, asosiatif, distributif, dll.

Selanjutnya, perhatikan solusi 7.2 berikut:

Solusi 7.2

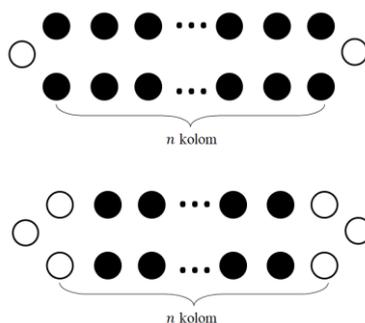
Konteks yang kita gunakan adalah banyaknya siswa yang sedang mengerjakan tugas secara berpasangan. Ekspresi $2n + 2$ bisa berarti sebanyak n pasangan masih di dalam kelas, sedangkan 2 siswa lainnya sudah bisa meninggalkan kelas karena telah menyelesaikan tugas. Jika 5 menit selanjutnya, 2 pasangan lainnya telah selesai, ada sebanyak $2(n - 2)$ siswa di dalam kelas dan 6 siswa yang meninggalkan kelas, sehingga total siswa adalah $2(n - 2) + 6$.

Solusi 7.2 adalah sebuah pembuktian yang menggunakan *argumen dengan operasi matematika yang terbatas*. Ini membuat pembaca bisa berpikir model matematis untuk tiap penjelasan yang diberikan.

Soal 7 bisa pula diselesaikan seperti solusi 7.3 berikut:

Solusi 7.3

Perhatikan gambar berikut:



Dengan demikian, $2n + 2 = 2(n - 2) + 6$.

Solusi 7.3 adalah sebuah pembuktian dengan *menggunakan diagram tanpa penjelasan*, sehingga pembaca bisa berpikir cara merepresentasikan diagram ke dalam bentuk aljabar yang diberikan. Walaupun solusi 7.1, 7.2, dan 7.3 tidak terlihat lengkap, namun ketiga pembuktian ini bisa diterima jika tujuannya adalah untuk merangsang pemikiran kritis dari siswa. Sebaliknya, jika siswa menyajikan solusi 7.1, 7.2, dan 7.3, guru bisa meminta siswa untuk menjelaskannya lebih jauh, baik secara lisan maupun tertulis.

F. Penutup

Karena penalaran matematis penting untuk mengasah kemampuan berpikir kritis siswa, guru perlu terus melatih siswa untuk mengemukakan idenya secara melalui tulisan maupun lisan. Penjelasan matematis bisa dilatihkan secara berurutan mulai dari tingkatan yang paling rendah ke tingkatan yang lebih tinggi. Tingkat tertinggi dari penjelasan matematis adalah pembuktian yang dapat dilakukan dengan mengerti dan terbiasa menggunakan konsep pembuktian, jenis-jenis pembuktian, dan fase-fase pembuktian.

Berikut daftar pertanyaan yang dapat digunakan untuk menilai apakah pembuktian yang diberikan siswa telah baik atau masih perlu ditingkatkan. Daftar pertanyaan ini bisa digunakan oleh guru, teman sekelas, maupun siswa yang menulis pembuktian.

1. Apakah definisi, teorema, dan prinsip yang digunakan sudah tepat?
2. Apakah definisi, teorema, dan prinsip yang digunakan sudah pernah dijelaskan di pertemuan sebelumnya atau di kelas yang lebih rendah? Jika belum, apakah definisi, teorema, dan prinsip baru tersebut dicantumkan atau dijelaskan dengan baik dalam pembuktian?
3. Apakah pembuktian yang diberikan sudah mencakup semua kemungkinan kasus yang dibutuhkan?
4. Apakah logika yang digunakan telah tepat?
5. Apakah simbol dan operasi matematika yang digunakan telah tepat?

G. Referensi

Allen, Jim dan Rolf van der Velden. (2012). Skills for the 21st century: Implications for Education. <https://www.researchgate.net/publication/254405698>.

Mason, John, Leone Burton, dan Kaye Stacey. 2010. Thinking Mathematically. Pearson.

Stein M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development, p. 16. New York: Teachers College Press.

Stylianides, Gabriel. (2010). Engaging Secondary Students in Reasoning and Proving. Mathematics Teaching 219.

Yackel, Erna dan Gila Hanna. (2000). Reasoning and Proof. A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics.

*) Ulfa Aulyah Idrus

Guru Matematika di SMA Golden Gate Makassar, Kota Makassar, Prov. Sulawesi Selatan



<https://news.clearnotebooks.com>

PEMANFAATAN BLOG MATEMATIKA SEBAGAI MEDIA PEMBELAJARAN DALAM JARINGAN

*) Maya Lestari Hutapea

Dunia saat ini sedang menghadapi pandemi *Covid-19* tidak terkecuali Indonesia. Penyebaran *Covid-19* yang masih terus meningkat mengakibatkan peserta didik tidak selalu bisa datang ke sekolah seperti pelaksanaan pembelajaran secara klasikal untuk memperoleh materi pelajaran; sebagai upaya menghentikan penyebaran *Covid-19* tersebut. Beberapa daerah sudah melaksanakan pembelajaran tatap muka secara terbatas, namun beberapa di tempat lain masih melaksanakan kegiatan pembelajaran secara full daring. Hal ini menyebabkan peserta didik tidak dapat berinteraksi secara efektif dengan guru dalam proses belajar mengajar dan hanya mendapatkan materi secara daring (dalam jaringan) serta mengumpulkan tugas secara luring (luar jaringan). Pembelajaran daring menjadi lebih monoton karena guru hanya dapat memberikan materi dan tugas tanpa dapat memberikan banyak penjelasan untuk membantu peserta didik lebih memahami materi dikarenakan kurang optimalnya penggunaan media yang dapat mendukung keefektifan proses belajar melalui daring.

Selain kendala di atas, pembelajaran daring umumnya membutuhkan ruang penyimpanan yang cukup besar pada perangkat dan mengharuskan peserta didik melakukan banyak pengunduhan karena materi dari setiap bidang studi diberikan setiap hari. Hal ini menyebabkan beberapa peserta didik akan menghapus *file* tersebut dan tidak dapat mereka pelajari lagi di kemudian hari. Banyaknya *file* yang tersimpan dalam perangkat elektronik juga membuat peserta didik kurang dapat mengorganisasikannya dengan baik, tugas-tugas dari beberapa mata pelajaran bercampur menjadi satu, sehingga peserta didik kebingungan untuk mencari materi ajar tertentu, hal ini tentu membutuhkan pengorganisasian yang baik dari file yang sudah dimiliki.

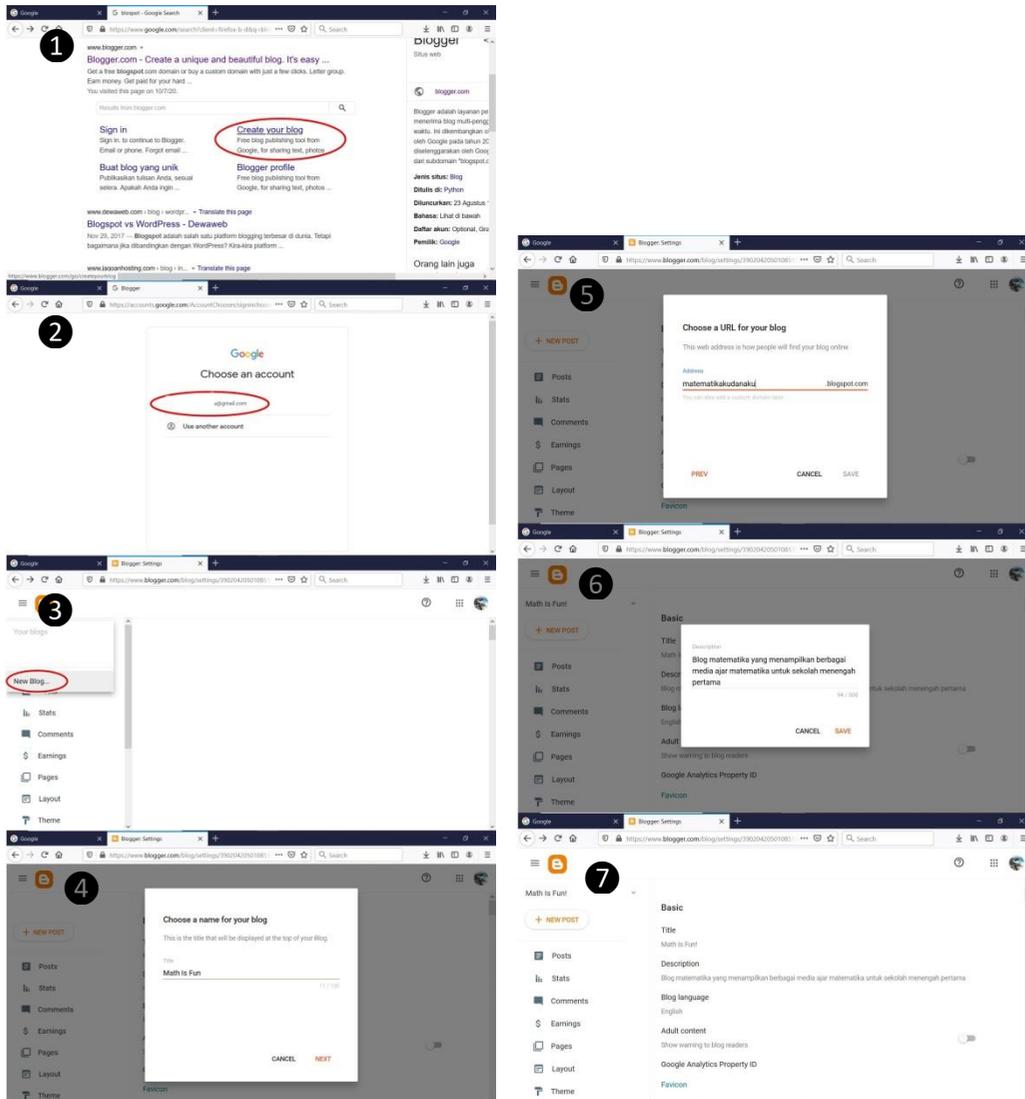
Blog adalah platform dalam jaringan internet yang dapat diakses siapa saja dan di mana saja. Blog berisi tulisan, video, foto dan konten-konten yang diunggah oleh pembuat atau pengelola blog tersebut. Blog matematika sebagai gagasan penyelesaian isu pembelajaran daring berisi konten-konten media ajar berupa video, tulisan, foto, *PowerPoint* yang edukatif dan dapat diakses dengan

mudah oleh peserta didik. Beberapa alasan mengapa penulis menggunakan blog matematika sebagai media pembelajaran adalah:

1. Mudah diakses melalui berbagai perangkat, baik *handphone*, komputer dan laptop yang tersambung dengan jaringan internet;
2. Mudah diakses melalui berbagai perambah/*browser*, artinya peserta didik tidak perlu mengunduh aplikasi tambahan untuk mengakses blog, cukup menggunakan perambah/*browser* yang sudah ada di dalam *handphone*;
3. Blog mengorganisasikan pokok-pokok bahasan dalam materi ajar dengan baik menggunakan fitur *archive* sehingga peserta didik dapat dengan mudah mencari materi ajar yang telah berlalu;
4. Blog dapat diakses kapan saja dan dimana saja, sehingga peserta didik lebih fleksibel dalam memanfaatkan perangkat elektronik yang ada. Misalnya untuk peserta didik yang hanya dapat menggunakan *handphone* pada malam hari karena *handphone* tersebut dibawa orang tua saat bekerja, maka peserta didik tersebut dapat mengakses materi ajar yang ada di blog; di mana konten yang ada di blog sifatnya permanen selama tidak dihapus oleh pengelola blog;
5. Blog tidak memerlukan pengguna untuk *log-in* saat mengakses konten blog sehingga peserta didik tidak perlu membuat akun baru untuk masuk ke dalam blog.

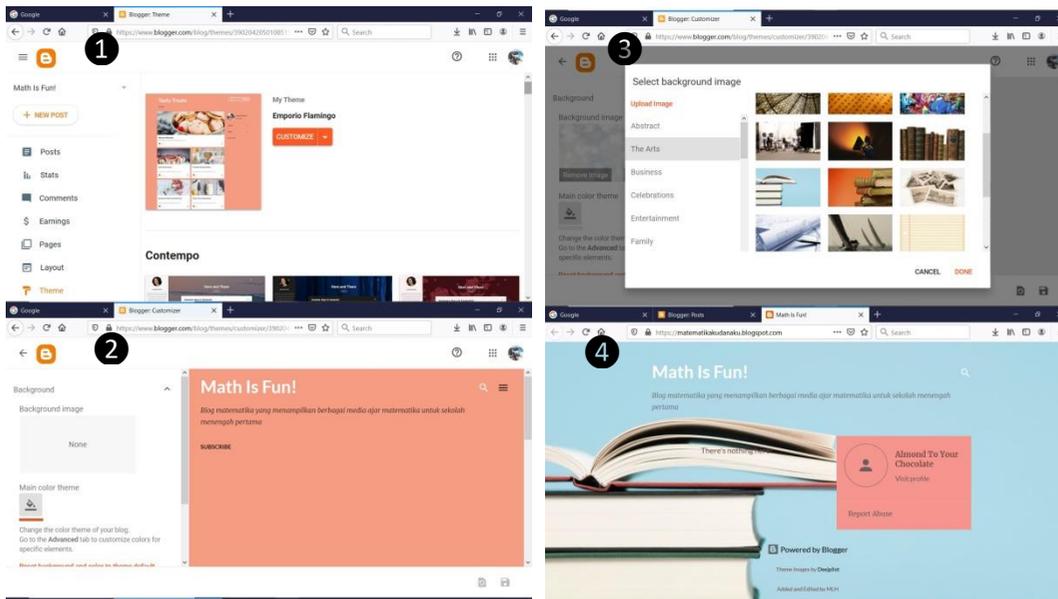
Dengan kelebihan tersebut pembelajaran daring melalui blog sangat tepat diterapkan dalam mengefektifkan proses pembelajaran daring sehingga tujuan pembelajaran dan tujuan organisasi sekolah dapat tercapai. Dalam memanfaatkan blog matematika, beberapa langkah yang perlu dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Menentukan *domain* yang akan digunakan dalam pembuatan blog matematika. Beberapa domain yang ada di internet yang dapat digunakan secara gratis untuk membuat blog matematika adalah Blogger, Wordpress, Weebly, Tumblr dan Livejournal. (Penulis menggunakan Blogger: blogspot sebagai *domain* dari blog karena penggunaannya cukup sederhana dengan tampilan yang dapat didesain agar lebih menarik bagi peserta didik).
2. Mengakses *blogger.com* dan melakukan *log-in* ke *Google account* menggunakan akun *Gmail* yang ada dan mengklik *New Blog* pada tampilan *blogger*.
3. Membuat judul blog yang menarik dan mudah diingat, contoh: *Math Is Fun!* untuk memotivasi peserta didik supaya tidak menganggap matematika itu adalah sesuatu yang sulit dan menakutkan. Untuk *link* blog matematika sendiri, penulis memilih nama: **matematikakudanaku** (Matematikaku dan Aku) agar mudah diingat dan dapat dicari dengan mesin pencari *Google*. Adapun langkah-langkah pembuatan blog matematika tersebut dapat dilihat pada rangkaian gambar di bawah ini:



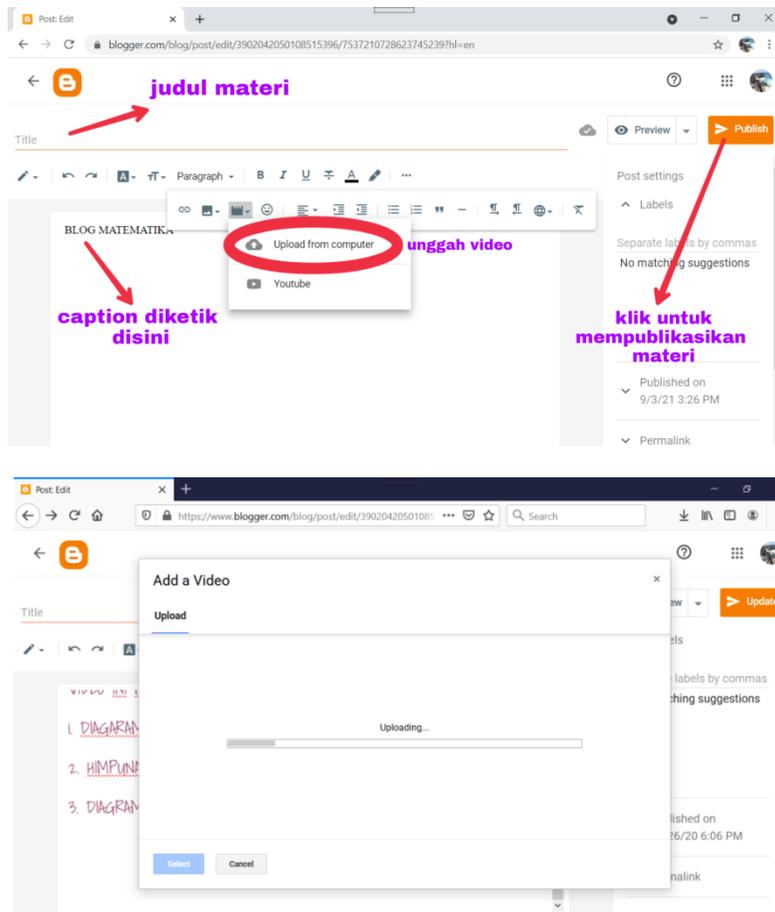
Gambar 1 Tahapan Pembuatan Blog Matematika

4. Mendesain Blog Matematika agar lebih menarik dan diminati peserta didik. Penulis mencoba beberapa tema dan *layout* yang tersedia pada *Blogger* untuk melihat tampilan seperti apa yang paling cocok dan menarik bagi peserta didik. Penulis memilih warna yang lembut untuk mata dan memberi kesan halus kepada orang yang mengakses blog tersebut. Adapun langkah-langkah mendesain blog matematika dapat dilihat secara ringkas pada gambar di bawah ini:



Gambar 2 Tahapan Mendesain Blog Matematika

5. Menguji coba pengaksesan blog matematika untuk menguji akses blog yang telah dibuat apakah dapat diakses oleh publik dan bagaimana proses mengaksesnya.
6. Menyiapkan materi ajar yang akan diunggah ke dalam blog matematika yang telah dibuat. Materi ajar yang dapat diunggah ke dalam blog matematika dapat berbentuk *file* gambar (.jpeg, .png dan .gif), *file* video (.mp4, .m4v, .mpg, .mov, .webm, .avi dan .3gp), *link* dari suatu *file* yang berada di arsip blog matematika atau *link* dari situs lain seperti *link* video Youtube, Wikipedia dan Quizizz, untuk *file* berbentuk presentasi (.ppt) harus diubah dulu ke dalam format video pada Microsoft PowerPoint sebelum dapat diunggah ke dalam blog matematika.
6. Mengunggah materi ajar yang telah dibuat ke dalam blog matematika sesuai dengan urutan pengalaman belajar yang tertuang di dalam kurikulum, sehingga nantinya ketika pengelola blog akan menambahkan materi dari bab selanjutnya, materi tersebut akan dapat dengan mudah ditemukan. Jadi tiap materi dalam satu bab berada dalam satu arsip yang terorganisasi dengan baik.

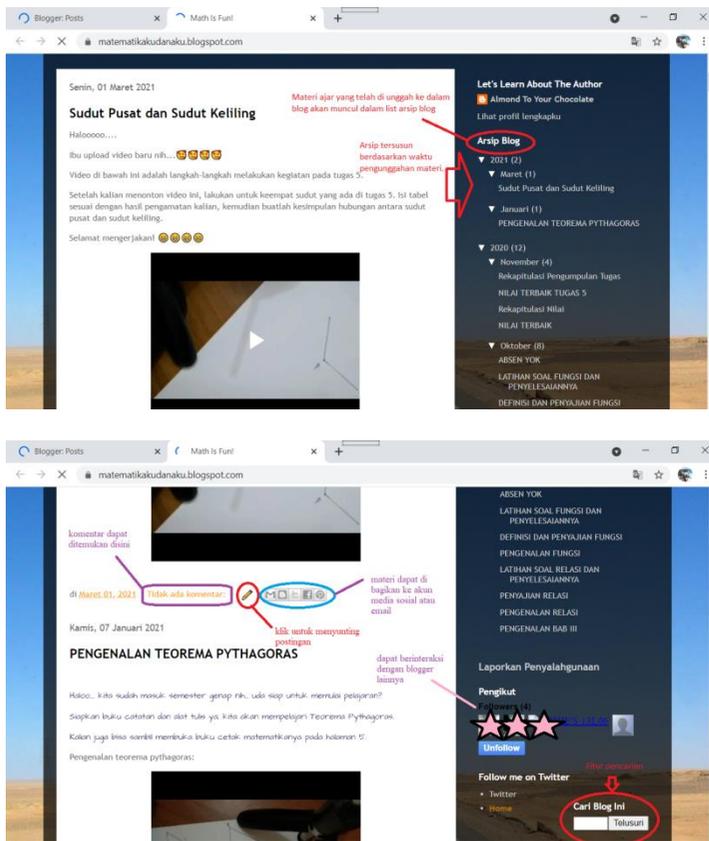


Gambar 3 Tahapan Mengunggah Materi Ajar ke dalam Blog Matematika

Caption berguna untuk menjelaskan secara singkat materi yang ada di dalam video atau gambar. Hal ini untuk memudahkan peserta didik dalam mempelajari materi sebelum membuka video atau gambar tersebut. Ini juga bermanfaat bagi peserta didik yang ingin mengulangi satu materi pokok tertentu, peserta didik tidak perlu membuka video ataupun gambar terlebih dahulu untuk mencari materi yang akan mereka ulangi, cukup dengan membaca ringkasan di dalam *caption*, peserta didik dapat menemukan materi yang mereka butuhkan.

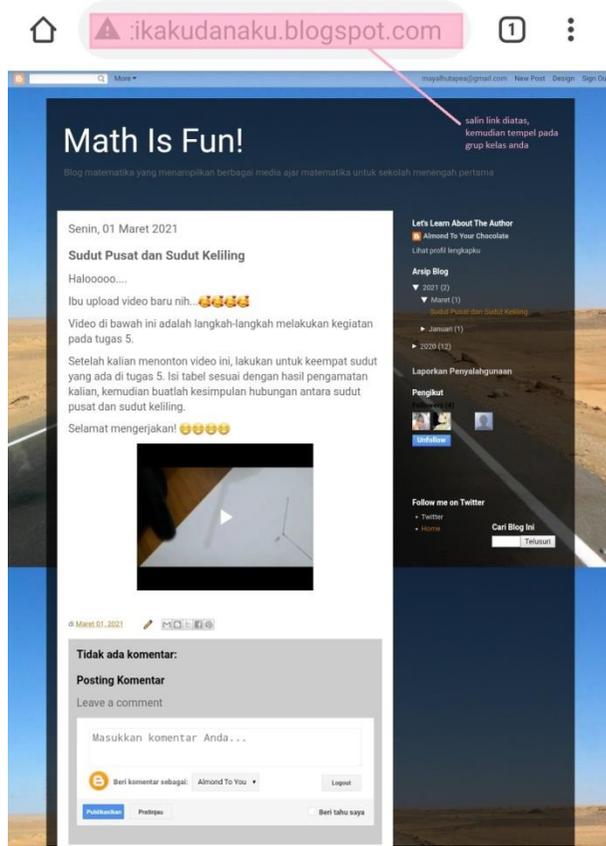
- Melakukan sosialisasi kepada peserta didik mengenai ketersediaan blog matematika. Hal ini dilakukan agar peserta didik mengetahui keberadaan blog matematika tersebut sebelum blog tersebut digunakan dalam pembelajaran. Hal ini juga dilakukan untuk memastikan bahwa blog matematika yang telah dibuat dapat diakses oleh peserta didik. Dalam hal ini peserta didik tidak hanya diharapkan dapat mengakses blog matematika tetapi juga dimotivasi untuk menggunakan berbagai fitur yang ada di dalam blog matematika. Contohnya fitur komentar di mana peserta didik tidak perlu melakukan *log in* untuk meninggalkan komentar pada konten yang ada di dalam blog. Peserta didik cukup memilih menjadi siapa ketika membubuhkan komentar, bahkan boleh memberi "*anonymous*/tidak bernama" pada kolom komentar. Fitur lain yang perlu dipahami peserta didik adalah *widget* yang berisi arsip dari materi ajar yang telah diunggah. Arsip menampilkan materi ajar secara terorganisir sehingga peserta didik dapat

mengakses materi ajar yang telah berlalu tanpa harus mengalami kesulitan mengecek satu per satu. Fitur pencarian juga memiliki fungsi yang serupa, peserta didik dapat mencari materi ajar di dalam blog matematika dengan kata kunci tertentu.



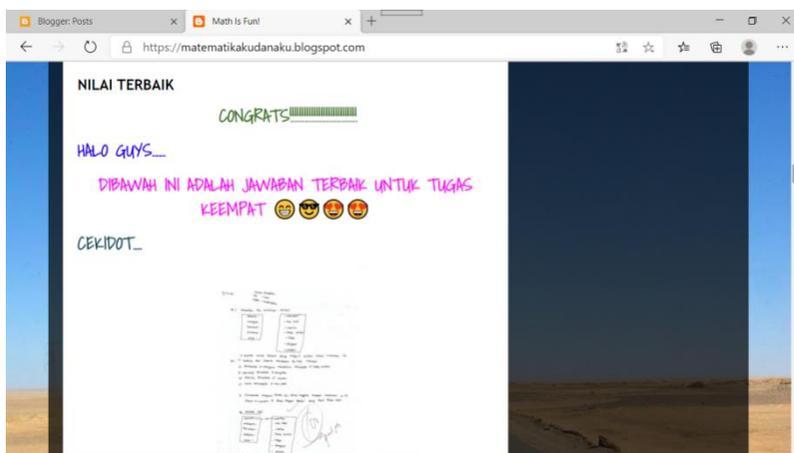
Gambar 4 Tampilan Depan dari Blog Matematika

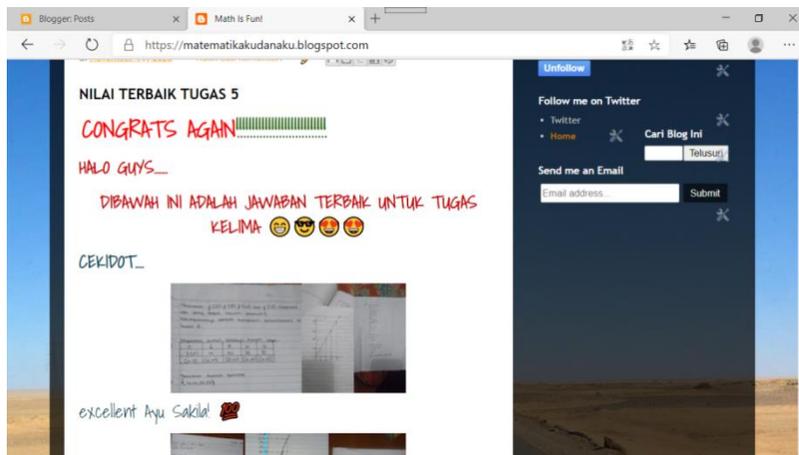
8. Membagikan *link* pembelajaran matematika dengan materi Relasi dan Fungsi. *Link* dibagikan melalui grup kelas di aplikasi *Whatsapp*. Meminta peserta didik mengakses *link* tersebut dan membuka tiap konten yang ada di dalamnya.



Gambar 5 Pembagian *Link* Pembelajaran

- Menampilkan jawaban peserta didik terbaik untuk tugas Relasi dan Fungsi sebagai *reward* atas hasil kerja yang peserta didik berikan. Hasil yang terbaik telah difoto dan diunggah ke dalam blog matematika dengan *caption* yang membangun dan mengapresiasi peserta didik. Diharapkan dengan adanya bentuk apresiasi seperti ini, peserta didik berusaha lebih keras lagi untuk mengerjakan tugas yang diberikan.





Gambar 5 Mengunggah jawaban terbaik peserta didik di blog matematika

Pada tahapan ini penulis memotivasi peserta didik untuk memberikan *feedback* atau tanggapan dengan fitur 'komentar' di blog matematika yang telah dijelaskan penulis pada kegiatan 4. *Feedback* yang diberikan menjadi masukan bagi penulis untuk mengembangkan blog matematika sehingga menjadi lebih baik dan lebih diminati oleh peserta didik.

Kesimpulan

Pembelajaran interaktif dalam jaringan dapat dilakukan dengan memanfaatkan media pembelajaran yang inovatif berbasis komputer. Salah satu alternatif dari pembelajaran interaktif tersebut adalah pemanfaatan blog matematika yang dapat dijadikan sebagai media pembelajaran; di mana blog tersebut dapat dibuat secara gratis dengan mengakses *domain* blog yang tersedia di internet. Blog dapat dengan mudah digunakan oleh siapa saja karena memiliki tahapan yang sederhana seperti penggunaan media sosial seperti Facebook dan Instagram. Walaupun guru harus melakukan pendaftaran menggunakan *email* dalam membuat blog tersebut, baik peserta didik maupun orang tua peserta didik tidak perlu melakukan pendaftaran atau melakukan *log in* untuk mengakses blog tersebut, sehingga akan sangat mudah mengakses materi ajar yang ada di dalam blog matematika tersebut. Blog matematika juga tidak membutuhkan ruang yang banyak pada gawai karena tidak melakukan pengunduhan apapun, materi yang ada di dalam blog matematika bisa langsung diakses tanpa perlu mengunduh *file-file* tersebut ke dalam perangkat gawai peserta didik. Materi yang ada di dalam blog dapat diakses kapan saja dan di mana saja. Pemanfaatan blog matematika sebagai media pembelajaran interaktif dapat memotivasi peserta didik dalam melaksanakan pembelajaran mandiri pada proses pembelajaran dalam jaringan.

Daftar Pustaka

Sanjaya, Ridwan. 2009. *Step by Step Blogspot*. Jakarta: PT Elex Media Komputindo.

*) Maya Lestari Hutapea
SMP Negeri 4 Tanjungbalai, Kota Tanjungbalai , Prov. Sumatera Utara



Mendesain Ulang Soal Matematika dengan Kerangka *Reasoning-and-Proving*

*)Muhammad Taqiyuddin

Penalaran dan pembuktian merupakan salah satu isu penting dalam pendidikan matematika (Stylianides, 2007, 2008). Pada praktiknya, kesempatan yang didapatkan siswa untuk mempelajari aspek penalaran dan pembuktian di dalam pembelajaran matematika tidak banyak. Salah satu penyebabnya adalah banyaknya soal di buku teks matematika yang belum mencakup kedua aspek ini (Johnson, Thompson, & Senk, 2010; Stylianides, 2009). Pada tulisan ini, penulis akan mengajak pembaca untuk memodifikasi soal yang sudah ada di buku teks agar dapat memberikan kesempatan siswa untuk meningkatkan kemampuan penalaran dan pembuktian matematika mereka.

Dengan tujuan tersebut, akan dipelajari salah satu kerangka konseptual yang sering digunakan dalam penalaran dan pembuktian yakni *reasoning-and-proving* (Stylianides, 2008). Dalam tulisan ini, akan diberikan beberapa contoh bagaimana mengubah sebuah soal yang diambil dari buku teks dan belum masuk kategori penalaran dan pembuktian, kemudian dimodifikasi sesuai dengan tujuan tulisan ini.

Reasoning-and-proving

Kerangka *reasoning-and-proving* (Stylianides et al., 2013) merujuk pada segenap aktivitas yang memberikan kesempatan kepada siswa untuk menggali mengapa sesuatu berlaku dalam matematika. Berdasarkan kerangka konseptual ini, melakukan kegiatan penalaran dan pembuktian dalam kegiatan pembelajaran melibatkan dua aktivitas utama sebagai berikut.

- (1) Membuat generalisasi tentang suatu pola atau relasi matematika. Rangkaian generalisasi matematis ini dapat meliputi paling tidak dua hal yakni mengidentifikasi suatu pola dan mengajukan sebuah konjektur.
- (2) Mengembangkan argument-argumen untuk mendukung atau menolak generalisasi matematis. Pada tahap ini, siswa memberikan bukti atau contoh penyangkal.

Mendesain Ulang Soal

Selanjutnya, akan ditunjukkan soal yang diambil dari buku, perlakuan/modifikasi dari soal tersebut, serta bagaimana dan mengapa soal dimodifikasi sedemikian rupa. Dalam rangkaian langkah ini, juga akan dipaparkan perkiraan alternatif jawaban yang mungkin siswa buat baik yang benar maupun yang salah. Soal tentang topik pertidaksamaan nilai mutlak dipilih karena topik ini cukup sulit bagi siswa (Almog dan Ilany, 2012).

Soal Asli (Fey et al., 2009)

Untuk setiap soal (pertidaksamaan) berikut:

g. $|x - 3| > 7$

h. $|2x + 5| \leq 3$

- (1) Seketsalah grafik yang menggambarkan bagaimana mengkaitkan dua komponen fungsi
- (2) Gunakan penalaran aljabar, kalkulator grafik, atau dengan estimasi tabel fungsi untuk menentukan titik potong dari dua fungsi
- (3) Gunakan pengetahuanmu tentang keterkaitan antara fungsi tersebut untuk menyelesaikan pertidaksamaan.
- (4) Tuliskan solusi dari pertidaksamaan tersebut dengan symbol dan juga grafik di garis bilangan.

Soal Modifikasi

Berikut adalah soal yang telah dimodifikasi.

(1) Untuk setiap pertidaksamaan berikut, seketsalah grafik dari fungsi yang terkait dengan pertidaksamaan untuk beberapa nilai dari a termasuk positif, nol, dan negatif.

- $|x - 3| > a$
- $|2x + 5| \leq a$

- (2) Apa saja pola yang dapat ditemukan dari grafik yang telah kamu buat? Sebutkan sebanyak yang kamu bisa.
- (3) Buatlah konjektur dari nilai a dan solusi dari dua pertidaksamaan di atas.
- (4) Paparkan alasan dari konjektur yang telah kamu usulkan.

Mengapa dan Bagaimana Soal Dimodifikasi?

Dalam tulisan ini, soal harus dimodifikasi karena soal yang asli tidak memenuhi kerangka konseptual *reasoning-and-proving* (Stylianides, 2008). Soal asli tidak mengharuskan siswa untuk menjelaskan solusi yang mereka tuangkan di jawaban. Selain itu, soal asli tidak memberikan kesempatan bagi siswa untuk mengidentifikasi suatu pola dan membuat konjektur.

Pertama, ruas kanan dari pertidaksamaan diubah dari yang sebelumnya berupa konstanta menjadi sebarang bilangan a . Langkah ini penting karena temuan dari beberapa penelitian menunjukkan bahwa banyak siswa tidak mengantisipasi kemungkinan lain, misalnya, kasus ketika solusinya hanya satu nilai (Almog & Ilany, 2012, p. 361). Penelitian lain menunjukkan bahwa siswa mengalami hambatan dalam menyelesaikan pertidaksamaan linear ketika solusinya adalah bilangan real atau himpunan kosong (Taqiyuddin et al., 2017).

Lebih lanjut, soal pertama dan kedua ditujukan untuk menemukan pola yang muncul dalam grafik yang mereka buat. Hal ini berbeda dengan soal asli yang meminta siswa untuk membuat grafik dan menemukan titik potong. Dengan perubahan itu, diharapkan siswa akan terlibat dalam proses mengidentifikasi pola matematis yang merupakan bagian awal dari *reasoning-and-proving* (Stylianides, 2008).

Langkah selanjutnya adalah mengubah tugas asli yang meminta siswa untuk menyelesaikan pertidaksamaan, menjadi soal baru untuk membuat dugaan tentang hubungan antara a dan solusi dari dua pertidaksamaan. Dengan demikian, diharapkan siswa akan mengembangkan keterampilan mereka dalam membuat konjektur. Untuk soal

yang terakhir, siswa diajak untuk terlibat dalam mengembangkan argumen untuk mendukung dugaan yang mereka usulkan atau menemukan contoh penyangkalnya.

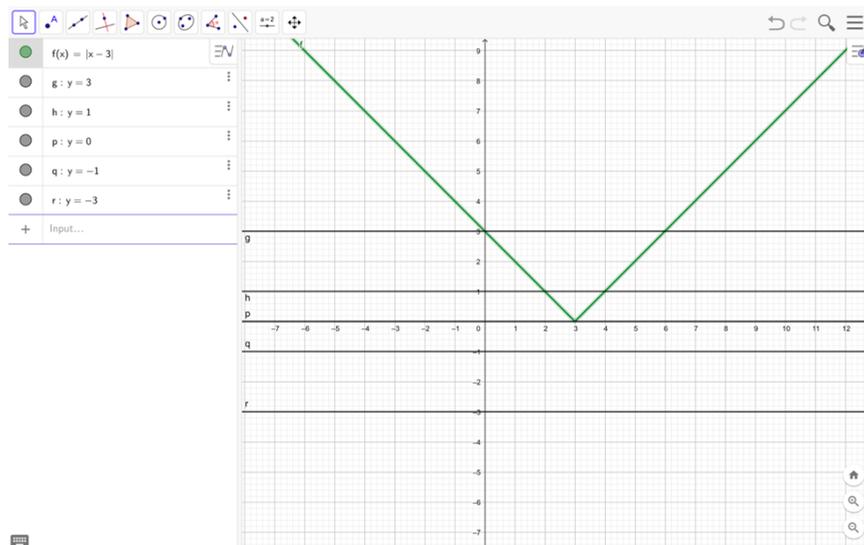
Alternatif Solusi

Pada bagian ini, akan dipaparkan kemungkinan solusi yang benar yang dapat dibuat oleh siswa. Bagian ini akan dibagi menjadi empat bagian berdasarkan empat pertanyaan yang dimodifikasi. Beberapa solusi yang mungkin akan dibahas terutama dalam pertanyaan keempat. Meskipun demikian, itu tidak berarti bahwa jawaban dari pertanyaan pertama sampai ketiga tidak dapat bervariasi.

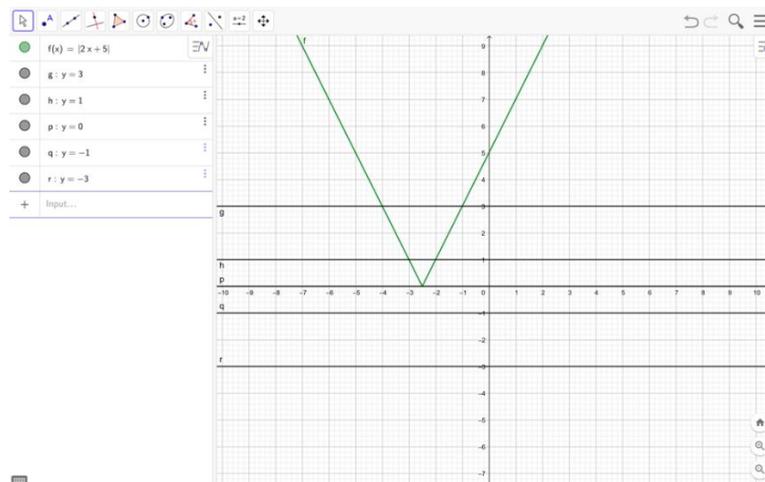
(1) Untuk setiap ketidaksetaraan yang diberikan di bawah ini, buat sketsa grafik fungsi-fungsi yang terlibat dalam ketidaksetaraan dan cobalah untuk beberapa nilai a yang berbeda, termasuk positif, nol, dan negatif.

- $|x - 3| > a$
- $|2x + 5| \leq a$

Alternatif solusi:



Gambar 1. Contoh grafik untuk pertidaksamaan pertama



Gambar 2. Contoh grafik untuk pertidaksamaan kedua

(2) Pola apa yang Anda perhatikan dari grafik yang telah Anda buat? Nyatakan sebanyak mungkin.

Alternatif solusi:

a. Grafik fungsi nilai mutlak selalu menghadap ke atas

b. Fungsi konstan bernilai negatif tidak memotong fungsi nilai mutlak

c. Untuk pertidaksamaan pertama, fungsi nol memotong fungsi nilai mutlak pada satu titik yaitu $(3,0)$

d. Untuk pertidaksamaan kedua, fungsi nol memotong fungsi nilai mutlak pada satu titik yaitu $(-2.5,0)$

e. Untuk pertidaksamaan pertama, fungsi konstan bernilai positif memotong fungsi nilai mutlak dalam dua titik yaitu $(3 - a, a)$ dan $(3 + a, a)$

f. Untuk pertidaksamaan kedua, fungsi konstan bernilai positif memotong fungsi nilai mutlak dalam dua titik yaitu $(\frac{a-5}{2}, a)$ dan $(\frac{5-a}{2}, a)$

(3) Membuat dugaan tentang hubungan antara a dan solusi dari dua ketidaksetaraan.

Alternatif solusi:

- Jika $a < 0$, maka solusi dari $|x - 3| > a$ adalah \mathbb{R} .
- Jika $a = 0$, maka solusi dari $|x - 3| > a$ adalah $\mathbb{R} - \{3\}$.
- Jika $a > 0$, maka solusi dari $|x - 3| > a$ adalah $\mathbb{R} - [3 - a, 3 + a]$.
- Jika $a < 0$, maka solusi dari $|2x + 5| \leq a$ adalah \emptyset .
- Jika $a = 0$, maka solusi dari $|2x + 5| \leq a$ adalah $\{-\frac{5}{2}\}$.
- Jika $a > 0$, maka solusi dari $|2x + 5| \leq a$ adalah $[-\frac{a+5}{2}, \frac{a-5}{2}]$.

(4) Membenarkan alasan Anda untuk dugaan yang Anda usulkan.

Alternatif Solusi 1: Solusi ini menggunakan penalaran berdasarkan beberapa kasus yang muncul dari definisi dari nilai mutlak yang dipandang sebagai fungsi sepotong-sepotong linear (Sierpinska, Bobos, & Pruncut, 2011, hal. 280).

Penyelesaian untuk pertidaksamaan $|x - 3| > a$

Kasus I: $x - 3 \geq 0$

Jika $x - 3 \geq 0$, maka $|x - 3| > a \Rightarrow x - 3 > a \Rightarrow x > a + 3$. Solusi dari kasus ini adalah $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x > a + 3\}$.

Kasus II: $x - 3 < 0$

Jika $x - 3 < 0$, maka $|x - 3| > a \Rightarrow -(x - 3) > a \Rightarrow x - 3 < -a \Rightarrow x < 3 - a$. Solusi dari kasus ini adalah $\{x \in \mathbb{R} | x < 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x < 3 - a\}$.

Dengan mengkombinasikan dua kasus tersebut kita mendapatkan solusi akhir

$$(\{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x > a + 3\}) \cup (\{x \in \mathbb{R} | x < 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x < 3 - a\}).$$

Solusi ini akan bervariasi tergantung dari nilai a . Coba perhatikan tiga kasus $a < 0$, $a = 0$, dan $a > 0$.

Jika $a < 0$, maka solusi akhirnya menjadi

$$\begin{aligned}
& (\{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x > a + 3\}) \cup (\{x \in \mathbb{R} | x < 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x < 3 - a\}) \\
&= (\{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\}) \cup (\{x \in \mathbb{R} | x < 3\}) \\
&= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Jika $a = 0$, maka solusi akhirnya adalah

$$\begin{aligned}
& (\{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x > 0 + 3\}) \cup (\{x \in \mathbb{R} | x < 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x < 3 - 0\}) \\
&= (\{x \in \mathbb{R} | x > 3\}) \cup (\{x \in \mathbb{R} | x < 3\}) \\
&= \mathbb{R} - \{3\}.
\end{aligned}$$

Jika $a > 0$, maka solusi akhirnya adalah

$$\begin{aligned}
& (\{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x > a + 3\}) \cup (\{x \in \mathbb{R} | x < 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x < 3 - a\}) \\
&= (\{x \in \mathbb{R} | x > a + 3\}) \cup (\{x \in \mathbb{R} | x < 3 - a\}) \\
&= \mathbb{R} - [3 - a, 3 + a].
\end{aligned}$$

Penyelesaian untuk pertidaksamaan $|2x + 5| \leq a$

Kasus I: $2x + 5 \geq 0$

Jika $2x + 5 \geq 0$, maka $|2x + 5| \leq a \Rightarrow 2x + 5 \leq a \Rightarrow 2x \leq a - 5 \Rightarrow x \leq \frac{a-5}{2}$.

Solusi dari kasus ini $\{x \in \mathbb{R} | x \geq -\frac{5}{2}\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x \leq \frac{a-5}{2}\}$.

Kasus II: $2x + 5 < 0$

Jika $2x + 5 < 0$, maka $|2x + 5| \leq a \Rightarrow -(2x + 5) \leq a \Rightarrow 2x + 5 \geq -a \Rightarrow 2x \geq -a - 5 \Rightarrow x \geq \frac{-a-5}{2}$.

Solusi dari kasus ini $\{x \in \mathbb{R} | x < -\frac{5}{2}\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x \geq \frac{-a-5}{2}\}$.

Dengan mengkombinasikan dua kasus tersebut, kita mendapatkan solusi akhir

$$\left(\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{5}{2} \right\} \cap \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{a-5}{2} \right\} \right) \cup \left(\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{2} \right\} \cap \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{-a-5}{2} \right\} \right).$$

Solusi ini akan bervariasi tergantung dari nilai a . Coba perhatikan tiga kasus $a < 0$, $a = 0$, and $a > 0$.

Jika $a < 0$, maka solusi akhirnya adalah

$$\begin{aligned}
& \left(\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{5}{2} \right\} \cap \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{a-5}{2} \right\} \right) \cup \left(\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{2} \right\} \cap \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{-a-5}{2} \right\} \right) \\
&= (\emptyset) \cup (\emptyset) \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Jika $a = 0$, maka solusi akhirnya adalah

$$\begin{aligned}
& \left(\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{5}{2} \right\} \cap \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{0-5}{2} \right\} \right) \cup \left(\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{2} \right\} \cap \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{-0-5}{2} \right\} \right) \\
&= \left(\left\{ -\frac{5}{2} \right\} \right) \cup (\emptyset) \\
&= \left\{ -\frac{5}{2} \right\}.
\end{aligned}$$

Jika $a > 0$, maka solusi akhirnya adalah

$$\begin{aligned} & \left(\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{5}{2} \right\} \cap \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{a-5}{2} \right\} \right) \cup \left(\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{2} \right\} \cap \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{-a-5}{2} \right\} \right) \\ &= \left(\left[-\frac{5}{2}, \frac{a-5}{2} \right] \right) \cup \left(\left[\frac{-a-5}{2}, -\frac{5}{2} \right] \right) \\ &= \left[-\frac{a+5}{2}, \frac{a-5}{2} \right]. \end{aligned}$$

Alternatif Solusi 2: Solusi ini menggunakan pendekatan grafik.

Penyelesaian untuk pertidaksamaan $|x - 3| > a$

Gambar 1, dapat digunakan untuk menemukan solusi soal $|x - 3| > a$ perlu ditemukan semua nilai x sedemikian sehingga grafik dari $y = |x - 3|$ berada di atas $y = a$. Akibatnya, solusinya akan bervariasi bergantung dengan nilai a .

Jika $a < 0$, maka grafik dari $y = |x - 3|$ selalu di atas grafik dari $y = a$. Artinya, solusi untuk kasus ini adalah \mathbb{R} . Jika $a = 0$, maka grafik dari $y = |x - 3|$ di atas grafik dari $y = a$ jika $x \neq 3$ karena kedua grafik berpotongan di $x = 3$. Karena itu, solusi untuk kasus ini adalah $\mathbb{R} - \{3\}$. Jika $a > 0$, maka grafik dari $y = |x - 3|$ di atas grafik dari $y = a$ ketika x tidak berada di interval $[3 - a, 3 + a]$. Artinya, solusi untuk kasus ini adalah $\mathbb{R} - [3 - a, 3 + a]$.

Penyelesaian untuk pertidaksamaan $|2x + 5| \leq a$

Gambar 2, akan digunakan untuk menemukan solusi soal $|2x + 5| \leq a$ berarti perlu ditemukan semua nilai x sedemikian sehingga grafik dari $y = |2x + 5|$ berada di bawah atau bertemu dengan grafik dari $y = a$. Dengan kata lain, perlu ditemukan semua nilai x sedemikian sehingga grafik dari $y = |2x + 5|$ tidak berada di atas grafik dari $y = a$. Akibatnya, solusinya akan bervariasi bergantung dengan nilai a .

Jika $a < 0$, maka grafik dari $y = |2x + 5|$ selalu berada di atas grafik dari $y = a$. Artinya, untuk kasus ini, tidak memiliki solusi atau himpunan solusinya adalah \emptyset . Jika $a = 0$, maka grafik dari $y = |2x + 5|$ bertemu dengan grafik dari $y = a$ ketika $x = -\frac{5}{2}$, dan berada di atas grafik dari $y = a$ untuk kasus lain. Akibatnya satu-satunya solusi adalah $\left\{ -\frac{5}{2} \right\}$. Jika $a > 0$, maka grafik dari $y = |2x + 5|$ berada di bawah atau sama dengan $y = a$ saat x berada di interval $\left[-\frac{a+5}{2}, \frac{a-5}{2} \right]$. Artinya, solusi untuk kasus ini adalah $\left[-\frac{a+5}{2}, \frac{a-5}{2} \right]$.

Alternatif Solusi 3: W Solusi ini memanfaatkan beberapa properti dari pertidaksamaan nilai mutlak.

Penyelesaian untuk pertidaksamaan $|x - 3| > a$

Dengan menggunakan sifat $|X| > a \Leftrightarrow X < -a \text{ or } X > a$, dapat diperoleh $|x - 3| > a \Leftrightarrow x - 3 < -a \text{ atau } x - 3 > a \Leftrightarrow x < 3 - a \text{ atau } x > 3 + a$. Berdasarkan hal ini, solusi akhir akan memiliki bentuk akhir $x < 3 - a \text{ or } x > 3 + a$ namun akan bergantung dengan nilai a yang dijabarkan sebagai berikut. Jika $a < 0$, maka solusinya adalah $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 - a\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3 + a\} = \mathbb{R}$. Jika $a = 0$, maka solusinya adalah $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 - 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3 + 0\} = \mathbb{R} - \{3\}$. Jika $a > 0$, maka solusinya adalah $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 - a\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3 + a\} = \mathbb{R} - [3 - a, 3 + a]$.

Penyelesaian untuk pertidaksamaan $|2x + 5| \leq a$

Untuk $a > 0$, dapat digunakan sifat $|X| \leq a \Leftrightarrow -a \leq X \leq a$, $a > 0$. Dengan memanfaatkan sifat tersebut akan diperoleh $|2x + 5| \leq a \Leftrightarrow -a \leq 2x + 5 \leq a \Leftrightarrow \frac{-a-5}{2} \leq x \leq \frac{a-5}{2}$. Hal ini menunjukkan bahwa solusinya adalah $\left[-\frac{a+5}{2}, \frac{a-5}{2}\right]$ untuk kasus $a > 0$.

Jika $a = 0$, maka diperoleh $|2x + 5| \leq 0$. Karena $|2x + 5| \geq 0$ juga benar, maka dapat diperoleh $0 \leq |2x + 5| \leq 0 \Rightarrow |2x + 5| = 0$. Akibatnya, solusi untuk kasus ini adalah $\left\{-\frac{5}{2}\right\}$.

Jika $a < 0$, maka didapat $0 \leq |2x + 5| \leq a < 0$ yang mana tidak akan pernah berlaku, tidak peduli apa nilai x . Akibatnya, tidak ada solusi untuk $a < 0$.

Contoh Solusi yang Salah

Salah satu kemungkinan langkah yang menyebabkan siswa menemukan solusi yang salah adalah, siswa mengkuadratkan kedua sisi dari pertidaksamaan untuk menghilangkan tanda nilai mutlak, dan kemudian menyelesaikan ketidaksetaraan tersebut. Ide ini dapat berasal dari pengalaman siswa dalam menyelesaikan persamaan nilai mutlak dan menggeneralisir ide secara berlebihan ke pertidaksamaan (Almog & Ilany, 2012, hal. 359). Kemungkinan lain adalah, siswa mendapatkan ide ini dari sifat yang menyatakan bahwa $|a| \geq |b|$ setara dengan $a^2 \geq b^2$ dan menerapkan ide ini untuk apa pun nilai absolutnya. Dalam hal ini, solusi yang salah akan muncul ketika $a > 0$. Untuk itu, akan ditunjukkan untuk kasus $a > 0$.

Penyelesaian untuk pertidaksamaan $|x - 3| > a$

Dengan menggunakan sifat yang telah disebutkan, dapat diperoleh $|x - 3| > a \Rightarrow (|x - 3|)^2 > a^2 \Rightarrow (x - 3)^2 > a^2 \Rightarrow (x - 3)^2 - a^2 > 0 \Rightarrow ((x - 3) + a)((x - 3) - a) > 0$. Akhirnya didapatkan dua kasus berikut.

Kasus I: $(x - 3) + a > 0$ dan $(x - 3) - a > 0 \Leftrightarrow x > 3 - a$ dan $x > 3 + a$

Kasus II: $(x - 3) + a < 0$ dan $(x - 3) - a < 0 \Leftrightarrow x < 3 - a$ dan $x < 3 + a$

Jika $a > 0$, maka dua kasus di atas menjadi sebagai berikut.

Kasus I: $x > 3 + a$

Kasus II: $x < 3 - a$

Akibat hal tersebut, solusi yang muncul adalah $[3 - a, 3 + a]$ untuk kasus ini. Hal ini tentu saja salah karena seharusnya solusinya adalah $\mathbb{R} - [3 - a, 3 + a]$ sebagaimana telah dijelaskan sebelumnya.

Penyelesaian untuk pertidaksamaan $|2x + 5| \leq a$

Dengan menggunakan sifat yang telah disebutkan, dapat diperoleh $|2x + 5| \leq a \Rightarrow (|2x + 5|)^2 \leq a^2 \Rightarrow (2x + 5)^2 \leq a^2 \Rightarrow (2x + 5)^2 - a^2 \leq 0 \Rightarrow ((2x + 5) + a)((2x + 5) - a) \leq 0$. Akhirnya didapatkan dua kasus berikut.

Kasus I: $(2x + 5) + a \leq 0$ dan $(2x + 5) - a \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{-a-5}{2}$ dan $x \geq \frac{a-5}{2}$

Kasus II: $(2x + 5) + a \geq 0$ dan $(2x + 5) - a \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-a-5}{2}$ dan $x \leq \frac{a-5}{2}$

Jika $a < 0$, maka dua kasus di atas menjadi sebagai berikut.

$$\text{Kasus I: } \frac{a-5}{2} \leq x \leq \frac{-a-5}{2}$$

Kasus II: Tidak ada bilangan real yang memenuhi

Akibatnya, solusi untuk kasus ini adalah $\left[\frac{a-5}{2}, \frac{-a-5}{2}\right]$. Hal ini bertentangan dengan apa yang kita temukan sebelumnya yakni tidak ada solusi untuk kasus $a < 0$.

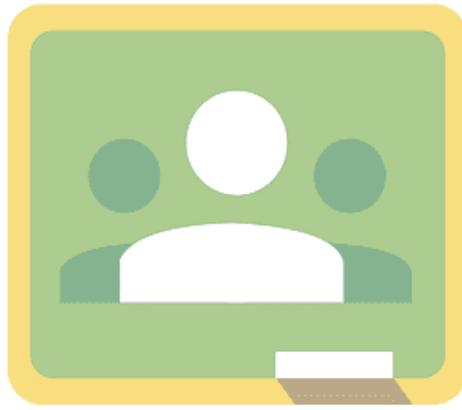
Kesimpulan

Pada artikel ini, telah dijelaskan bagaimana cara mengubah soal yang belum mengakomodasi penalaran dan pembuktian agar selaras dengan kerangka konseptual *reasoning-and-proving*. Selain itu, dalam tulisan di atas juga diilustrasikan kemungkinan jawaban siswa berdasarkan beberapa metode yang benar maupun berdasarkan teknik yang menggiring ke jawaban yang tidak tepat. Hal ini perlu dilakukan oleh guru agar ruh pembelajaran yang selaras dengan penalaran dan pembuktian.

Daftar Pustaka

- Almog, N., & Ilany, B. S. (2012). Absolute value inequalities: High school students' solutions and misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 81(3), 347-364. doi:10.1007/s10649-012-9404-z
- Fey, J.T., Hirsch, C.R., Hart, E.W., Schoen, H.L., & Watkins, A.E. (2009). *Core-plus mathematics: Contemporary mathematics in context course 3 student edition* (p. 116). United States of America: Glencoe/McGraw-Hill.
- Johnson, G. J., Thompson, D. R., & Senk, S. L. (2010). Proof-related reasoning in high school textbooks. *Mathematics Teacher*, 103(6), 410-417. Retrieved from <https://www.jstor-org.proxy-remote.galib.uga.edu/stable/20876654>
- Stylianides, A. L. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321. <https://doi.org/10.2307/30034869>
- Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the learning of mathematics*, 28(1), 9-16. Retrieved from <https://www.jstor.org/stable/40248592>
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Shilling-Traina, L. N. (2013). Prospective teachers' challenges in teaching reasoning-and-proving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11(6), 1463-1490.

*) Muhammad Taqiyuddin
University of Auckland, New Zealand



Pemanfaatan Google Classroom dari Akun Belajar.id dengan Fitur yang Semakin Lengkap

*) Atika Dewi

<https://www.pngegg.com>

Proses belajar mengajar semakin berkembang seiring dengan perkembangan teknologi, terutama di bidang informasi dan komunikasi. Pemanfaatan metode dan media berbasis TIK dalam kegiatan pembelajaran menjadi tak terelakkan demi meningkatkan motivasi, prestasi belajar peserta didik, serta tercapainya tujuan pembelajaran. Salah satu metode pembelajaran berbasis TIK yang dapat diaplikasikan dalam pembelajaran terutama di masa pandemi ini adalah pembelajaran *e-learning*. Waller dan Wilson (dalam Hartanto, 2016) menyebutkan pembelajaran *e-learning* sebenarnya telah dikenal sejak tahun 1970-an, yang diartikan sebagai pembelajaran yang berbasis komputer dan jaringan. Menurut Michael (2013:27), pembelajaran *e-learning* merupakan pembelajaran yang disusun dengan tujuan menggunakan sistem elektronik atau komputer sehingga mampu mendukung proses pembelajaran. Fahmi dan Cipta (dalam Fahmi, 2020) menyebutkan bahwa di masa kini, pembelajaran *e-learning* dimanfaatkan untuk mengatasi kendala belajar yang berhubungan dengan ruang dan waktu karena tingkat fleksibilitasnya yang tinggi sehingga mampu diakses melalui website dan mobile.

E-learning lebih cepat diterima penggunaannya karena memiliki beberapa keunggulan. Pertama, dapat mengurangi biaya dengan menyediakan sumber belajar virtual yang *paperless* sehingga tidak perlu mengeluarkan banyak biaya untuk membeli atau mencetak seluruh bahan cetak ajar. Kedua, fleksibel yang artinya dapat diakses di manapun dan kapanpun baik melalui laptop, komputer, maupun telepon pintar. Ketiga, distribusi materi ajar yang lebih cepat karena melalui jaringan internet. Keempat, dengan basis teknologi informasi, maka memiliki jangkauan yang lebih luas sehingga perbedaan ruang, tempat, dan waktu tidak menjadi sebuah kendala. Di sisi lain, tidak dapat dipungkiri bahwa pembelajaran dengan *e-learning* memiliki beberapa kekurangan seperti kurangnya interaksi antara pendidik dan peserta didik ataupun antarpeserta didik yang menghambat proses pembelajaran sosial. Proses belajar mengajar lebih condong ke arah kegiatan pelatihan karena penekanan lebih terpusat pada aspek pengetahuan dan psikomotorik. *E-learning* juga kurang efektif digunakan kepada peserta didik yang tidak memiliki motivasi belajar. Terbatasnya perangkat yang dimiliki peserta didik, serta kendala kuota data juga menghambat proses kegiatan pembelajaran. Perlu persiapan yang matang dalam pemanfaatannya agar kegiatan pembelajaran dapat berjalan secara efektif dan efisien.

Penggunaan *e-learning* dibedakan menjadi dua tipe, yakni *synchronous* dan *asynchronous*. Dalam Suranto (2019), *synchronous* diartikan sebagai interaksi yang berorientasi pada pembelajaran dan difasilitasi dengan instruksi secara langsung, *real-time*, dan terjadwal. Sedangkan *asynchronous* diartikan sebagai pembelajaran secara independen yang mana peserta didik dapat berinteraksi dengan materi yang tersedia pada waktu yang mereka pilih (Darmawan, 2018). Kedua tipe ini dapat diterapkan secara bersamaan untuk saling melengkapi kelemahan masing-masing. Kombinasi dari kedua tipe *e-learning* ini dapat diterapkan dalam sistem dan aplikasi *e-learning* yang disebut *Learning Management System* (LMS). Secara umum LMS adalah sistem perangkat lunak yang dirancang untuk membuat, mendistribusikan, dan mengatur penyampaian konten pembelajaran. Dewasa ini mulai banyak dikembangkan LMS untuk kepentingan dunia pendidikan baik yang sifatnya komersial maupun *open source*. Salah satu platform LMS yang dipandang mudah digunakan adalah Google Classroom.

Google Classroom adalah suatu aplikasi pembelajaran campuran secara *online* yang dapat digunakan secara gratis. Google Classroom dirancang untuk memfasilitasi pendidik dan peserta didik dalam mengorganisir komponen pembelajaran secara virtual. Google Classroom terintegrasi dengan aplikasi penyimpanan Google Drive sehingga pengguna dapat mengakses fitur-fitur lain dari Google yang dapat dimanfaatkan dalam kegiatan pembelajaran, seperti Google Document, Google Slide, Google Spreadsheet, Gmail, Google Calendar, dan lainnya. Google Classroom memiliki beberapa fungsi dan keunggulan sebagai LMS. Pertama, proses pembuatan kelas dalam Google Classroom sangatlah mudah. Pendidik cukup mengakses halaman *classroom.google.com* dan masuk menggunakan akun Google. Kedua, mampu meningkatkan kerjasama dan komunikasi. Google Classroom didesain untuk memudahkan proses kolaborasi baik antara pendidik dengan peserta didik, maupun antarsesama peserta didik secara *online*. Ketiga, semua data dalam *classroom* tersimpan secara terpusat di satu folder dalam Google Drive milik pendidik maupun peserta didik yang mudah diakses kembali. Keempat, mampu berbagi sumber belajar dengan berbagai format secara praktis, cepat, dan efisien.

Tampilan Google Classroom bagi pendidik dan bagi peserta didik tentu berbeda. Pada tampilan bagi pendidik terdapat empat bagian utama yaitu Forum, Tugas kelas, Anggota, dan Nilai. Forum sama halnya dengan halaman beranda, tertera nama dan profil kelas serta sebagai tempat untuk mengumumkan suatu informasi ataupun sebagai sarana untuk berdiskusi. Pada bagian Tugas kelas, terdapat tautan menuju ke Google Calendar dan Google Drive. Bagian ini merupakan bagian inti dari kelas, karena materi dan penugasan tersusun di bagian ini. Pendidik dapat memilih format postingan yang ingin ditampilkan, seperti berupa tugas, tugas kuis, pertanyaan, maupun materi. Postingan tersebut juga dapat disusun secara rapi dengan sistem pengelompokan topik. Pada bagian Anggota, terdapat daftar guru dan daftar siswa. Pendidik dapat menambahkan akun pengajar lain sebagai guru sehingga dapat berkolaborasi dalam kelas. Pengajar lain dan para peserta didik dapat bergabung ke dalam kelas dengan tiga cara, yakni dengan mengakses tautan kelas, memasukkan kode kelas, atau mendapat undangan langsung dari pendidik yang dikirim melalui email. Pada bagian Nilai terdapat tabel yang berisi kolom nama dan kolom setiap penugasan yang dilengkapi penghitungan rata-rata kelas. Pendidik dapat menentukan sistem penilaian baik berupa penilaian total poin, penilaian kategori, maupun tanpa penilaian. Sedangkan tampilan kelas bagi peserta didik hanya terdiri dari tiga bagian saja, yakni Forum, Tugas kelas, dan Anggota.

Selain menyematkan penugasan, pendidik dapat menyematkan materi dan bahan ajar pada bagian Tugas kelas. Hal ini cukup menarik, karena pendidik tidak hanya dapat menyematkan materi berupa buku teks virtual, namun juga dapat berupa tampilan ringkasan materi menggunakan Google Slide, video pembelajaran yang bisa diambil dari halaman Youtube, gambar, ataupun tautan halaman lain yang relevan. Penugasannya pun tidak selalu berupa lembar jawab dokumen yang harus dicetak, namun dapat dikerjakan secara langsung baik secara mandiri maupun berkelompok menggunakan Google Document. Ada pula lembar tugas berupa formulir atau kuis, yang dibuat dari Google Form yang dapat dijawab dan memunculkan nilainya secara langsung. Hal menarik lainnya adalah bahwa tiap penugasan dapat diatur waktunya dengan mengaktifkan pengatur batas waktu. Peserta didik akan menerima pengingat dari email masing-masing agar tidak terlambat dalam menyelesaikan tugasnya. Pengaturan lain adalah pendidik dapat membagikan penugasan kepada seluruh peserta didik ataupun beberapa saja dengan mengatur siapa saja yang menjadi penerima tugas.

Dari banyaknya keunggulan yang dimiliki Google Classroom, ternyata pendidik dan peserta didik juga dapat menikmati fitur yang lebih lengkap dibandingkan hanya menggunakan akun Google biasa, yakni dengan memanfaatkan akun *Google Workspace*. Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset dan Teknologi (Kemdikbudristek) memberikan akun *Google Workspace for Education* secara gratis kepada pendidik dan tenaga kependidikan dengan domain @belajar.id. Akun ini biasa disebut Akun Pembelajaran. Akun Pembelajaran merupakan akun elektronik yang memuat nama akun (*user ID*) dan akses masuk akun (*password*) yang diterbitkan oleh Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset dan Teknologi (Kemdikbudristek) dan dapat digunakan oleh peserta didik, pendidik, dan tenaga kependidikan sebagai akun untuk mengakses layanan/aplikasi pembelajaran berbasis elektronik. Akun Pembelajaran bertujuan untuk mendukung kegiatan belajar, baik Belajar Dari Rumah maupun pembelajaran tatap muka, melalui penerapan teknologi informasi dan komunikasi. Penggunaan Akun Pembelajaran bebas biaya. Untuk Siswa, Guru, dan Tenaga Kependidikan, mendapatkan nama akun (*user ID*) dan akses masuk akun (*password*) Akun Pembelajaran dari Operator Satuan Pendidikan di sekolah. Kemudian buka

halaman *mail.google.com*, lalu masukkan nama akun (user ID) dan akses masuk akun (*password*) yang telah didapatkan. Selanjutnya akan diminta untuk menyetujui syarat dan ketentuan penggunaan Akun Pembelajaran lalu mengganti akses masuk akun (*password*) dan Akun Pembelajaran telah siap digunakan. Sedangkan untuk Operator Satuan Pendidikan, buka laman *pd.data.kemdikbud.go.id*, lalu login dan klik tombol "Unduh Akun", pilih "Peserta Didik" atau "PTK" untuk mengunduh file csv berisi nama akun (*user ID*) dan akses masuk akun (*password*) Akun Pembelajaran untuk pengguna di satuan pendidikan, kemudian buka file csv yang sudah diunduh, lalu berikan informasi akun (*user ID* dan *password*) kepada pengguna yang bersangkutan secara pribadi.

Penggunaan Akun Pembelajaran bersifat opsional bagi peserta didik, pendidik, maupun tenaga kependidikan. Kemdikbudristek menyarankan untuk menggunakan Akun Pembelajaran karena: 1) Akun Pembelajaran akan menjadi salah satu jalur komunikasi resmi Kemdikbudristek ke peserta didik, pendidik, dan tenaga kependidikan, 2) Akun Pembelajaran akan digunakan untuk mengakses aplikasi-aplikasi resmi Kemdikbudristek; dan 3) Materi dan informasi dari Kemdikbudristek, misalnya terkait bantuan pemerintah dan Asesmen Nasional, akan dikirimkan ke alamat surat elektronik Akun Pembelajaran. Keamanan Akun Pembelajaran diatur sesuai dengan ketentuan peraturan perundang-undangan dalam rangka memberikan perlindungan terhadap kerahasiaan data, informasi, dan/atau dokumen aktivitas Akun Pembelajaran; dan kemungkinan terjadinya kelalaian dalam penggunaan dan/atau penyalahgunaan data, informasi, dan/atau dokumen aktivitas Akun Pembelajaran.

Ada beberapa keunggulan dari *classroom* yang berasal dari akun pembelajaran dibandingkan dengan yang berasal dari akun gmail. Pada *classroom* akun pembelajaran, telah tersedia tautan panggilan video bersama melalui Google Meet sehingga pendidik tidak perlu membuat untuk kegiatan *synchronous*. Tautan Google Meet ini tersedia di halaman utama *classroom* sehingga mudah untuk ditemukan dan diakses. Tautan Google Meet ini dapat digunakan lebih dari sekali dalam kegiatan *synchronous*. Penjadwalan tatap muka ini dapat dilakukan dengan mudah begitu pula dengan aksesnya. Selanjutnya, kapasitas peserta didik yang ditampung Google Classroom dari akun belajar bisa mencapai 1000 peserta. Ini lebih banyak dibandingkan dari akun Gmail yang hanya dapat menampung 250 peserta didik. Sedangkan kapasitas untuk pengajar masih sama, yakni dibatasi 20 pengajar. Pendidik dapat mengundang guru lain dalam *classroom* untuk berkolaborasi dalam kegiatan pembelajaran.

Keunggulan lain dari belajar.id ini adalah pendidik juga dapat mengundang orang tua siswa dengan memasukkan alamat surel orangtua di menu *invite guardians* di sebelah akun peserta didik untuk mendapatkan laporan wali. Laporan wali dikirim melalui alamat surat elektronik. Hal-hal yang disertakan dalam laporan tersebut adalah tugas yang tidak dikerjakan oleh peserta didik bersangkutan, tugas yang akan datang, serta kegiatan kelas seperti pengumuman, tugas, dan pertanyaan terbaru yang diposting oleh pengajar. Wali murid dapat menerima email laporan setiap hari atau setiap minggu dan dapat berhenti berlangganan kapan saja. Kemudian keunggulan lain di bagian penugasan, terdapat fitur impor nilai dari Google Form dengan syarat hanya terdapat satu lampiran tugas form dalam sebuah penugasan dan fitur *Check plagiarism (originality)* untuk mengecek tugas yang dikirimkan oleh siswa apakah hasil jiplakan dari rekannya maupun sumber internet lain atau memang orisinal mengerjakan sendiri. Dan khusus untuk pengguna Chromebook terdapat fitur *Locked* untuk mengunci semua program saat siswa melaksanakan ujian, jadi siswa tidak dapat membuka aplikasi lain saat ujian dilaksanakan.

Dari beberapa penelitian mengungkapkan bahwa penggunaan platform Google Classroom lebih efektif dibandingkan dengan platform lain. Hal ini dibuktikan dengan terjadinya peningkatan rata-rata nilai pretest dengan posttest sebesar 17,86% pada siswa kelas X Multimedia SMK Negeri 1 Kebumen (Susanto, 2020:60). Bukti lain mengungkapkan bahwa penggunaan Google Classroom berpengaruh positif terhadap pembelajaran pada mata pelajaran ekonomi kelas XI di MAN 1 Kota Tangerang Selatan yang dibuktikan dengan regresi linear berganda diperoleh nilai r 0,847, Nilai *Adjusted R²* sebesar 0,688 dan nilai t hitung $>$ t Tabel (2,357 $>$ 2,045) dengan signifikansi 0,025. Artinya semakin baik penggunaan Google Classroom maka akan semakin baik kualitas pembelajaran yang ada di kelas (Ernawati, 2020:126).

Penggunaan *classroom* dengan akun belajar.id ini membawa banyak keunggulan yang dapat dimanfaatkan pendidik dalam kegiatan pembelajaran, khususnya di masa pandemik seperti sekarang ini di mana sebagian besar sekolah belum dapat melaksanakan kegiatan belajar tatap muka secara efektif. Penggunaannya tidak hanya sebatas untuk memudahkan akses pembelajaran, akan tetapi juga bertujuan untuk penyeragaman. Sudah sepantasnya pendidik

dan peserta didik memiliki akun pembelajaran yang resmi dari Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset dan Teknologi seperti belajar.id ini mengingat banyaknya keuntungan yang dapat diperoleh. Telah disinggung sebelumnya bahwa akun belajar.id ini memiliki tingkat sistem keamanan yang lebih tinggi sehingga tidak mudah diretas dan terjaga kerahasiannya dibandingkan dengan akun gmail pribadi. Bagi pendidik maupun peserta didik yang sama sekali belum pernah mendapatkan atau mengaktivasi akun belajar.id nya, diharapkan untuk segera mengaktifkannya agar dapat segera mempergunakannya dalam kegiatan pembelajaran. Namun, demi kelancaran pemanfaatannya, diharapkan sekolah juga mempersiapkan segala fasilitas yang memadai guna mendukung berjalannya pembelajaran secara daring. Perangkat keras seperti komputer, laptop, telepon pintar, dan jaringan internet menjadi syarat penting terciptanya pembelajaran *online*. Sekolah tidak hanya menyiapkan bagi pendidik tetapi juga perlu mempertimbangkan ketersediannya untuk peserta didik.

DAFTAR PUSTAKA

Allen, Michael. 2013. *Michael Allen's Guide to E-learning*. Canada: John Willey & Sons.

Atikah, Rini dkk. 2021. Pemanfaatan Google Classroom sebagai Media Pembelajaran di Masa Pandemi: Jurnal Petik Volume 7, No.1, Maret 2021 Halaman 7 -18. Dalam <https://journal.institutpendidikan.ac.id/index.php/petik/article/view/988>

Darmawan, E. 2018. Implementasi Model Pembelajaran Asynchronous Dalam Perancangan Aplikasi Simulasi Panduan Pecinta Alam Berbasis Android. Cloud Information Jurnal : Jurnal of Information System Volume 3 No.2 diakses pada 6 September 2021 dari <https://journal.uniku.ac.id/index.php/cloudinformation/article/view/1303>

Ernawati. 2020. Pengaruh Penggunaan Aplikasi Google Classroom Terhadap Kualitas Pembelajaran dan Hasil Belajar Siswa pada Mata Pelajaran Ekonomi Kelas XI di MAN 1 Kota Tangerang Selatan. Skripsi. Jakarta: Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah dalam <http://repository.uinjkt.ac.id/dspace/bitstream/123456789/41841/2/ERNAWATI-FITK.pdf>

Fahmi, Muhammad Hanif. 2020. Komunikasi Synchronous Dan Asynchronous Dalam E-Learning Pada Masa Pandemic Covid-19. Jurnal Nomosleca Volume 6 No.2 diakses pada 4 September 2021 dari <https://jurnal.unmer.ac.id/index.php/n/article/view/4947/2596>

Hartanto, Wiwin. 2016. Penggunaan E-Learning sebagai Media Pembelajaran. Jurnal Pendidikan Ekonomi Volume 10 No.1. diakses pada 15 September 2021 dari <https://jurnal.unej.ac.id/index.php/JPE/article/view/3438>

Suranto, B. 2019. Virtual Classroom: Strategi Pembelajaran Berbasis Synchronous Learning. *Seminar Nasional Teknologi Informasi (SNATI)* diakses pada 4 September 2021 dari <https://journal.uui.ac.id/Snati/article/view/1221>

Susanto, Aris Indro. 2020. Keefektifan Penggunaan Platform Google Classroom dan Schoology Terhadap Hasil Belajar Siswa pada Mata Pelajaran Dasar Desain Grafis Kelas X Multimedia Smk Negeri 1 Kebumen. Skripsi. Semarang: Universitas Negeri Semarang dalam <http://lib.unnes.ac.id/39184/>

https://edu.google.com/intl/ALL_id/products/classroom/ diakses pada 12 September 2021

*) Atika Dewi
SD Negeri Pangkalan Salatiga, Kab. Salatiga, Prov. Jawa Tengah



Gelaran 2nd ISMaTel (International Seminar on Mathematics Teaching and Learning) tanggal 26 s.d. 28 Oktober 2021 di Hotel Grand Rohan Jogja mengambil tema: "Achieving Higher Mathematical Literacy: Sharing Ideas and Experiences".



Olimpiade Nasional Inovasi Pembelajaran (ONIP) Matematika 2021 di Museum Benteng Vredenburg Yogyakarta tanggal 16 s.d. 20 November 2021.

Merupakan ajang inovasi para pendidik dan tenaga kependidikan dalam meningkatkan mutu pendidikan. Tema tahun ini "Merdeka Belajar: Implementasi dan Inovasi Pembelajaran Matematika turut Pulihkan Pendidikan"

ONIP Matematika 2021



SeNdiMat IX



Pembukaan Seminar Nasional Pendidikan Matematika (SeNdiMat) IX oleh Direktur Guru Pendidikan Dasar, Dr. Rachmadi Widiharto, M.A. Digelar tanggal 22 s.d. 24 November 2021 di Prime Plaza Hotel Jogjakarta dengan tema "Implementasi Merdeka Belajar dalam Meningkatkan Mutu Pembelajaran Matematika".