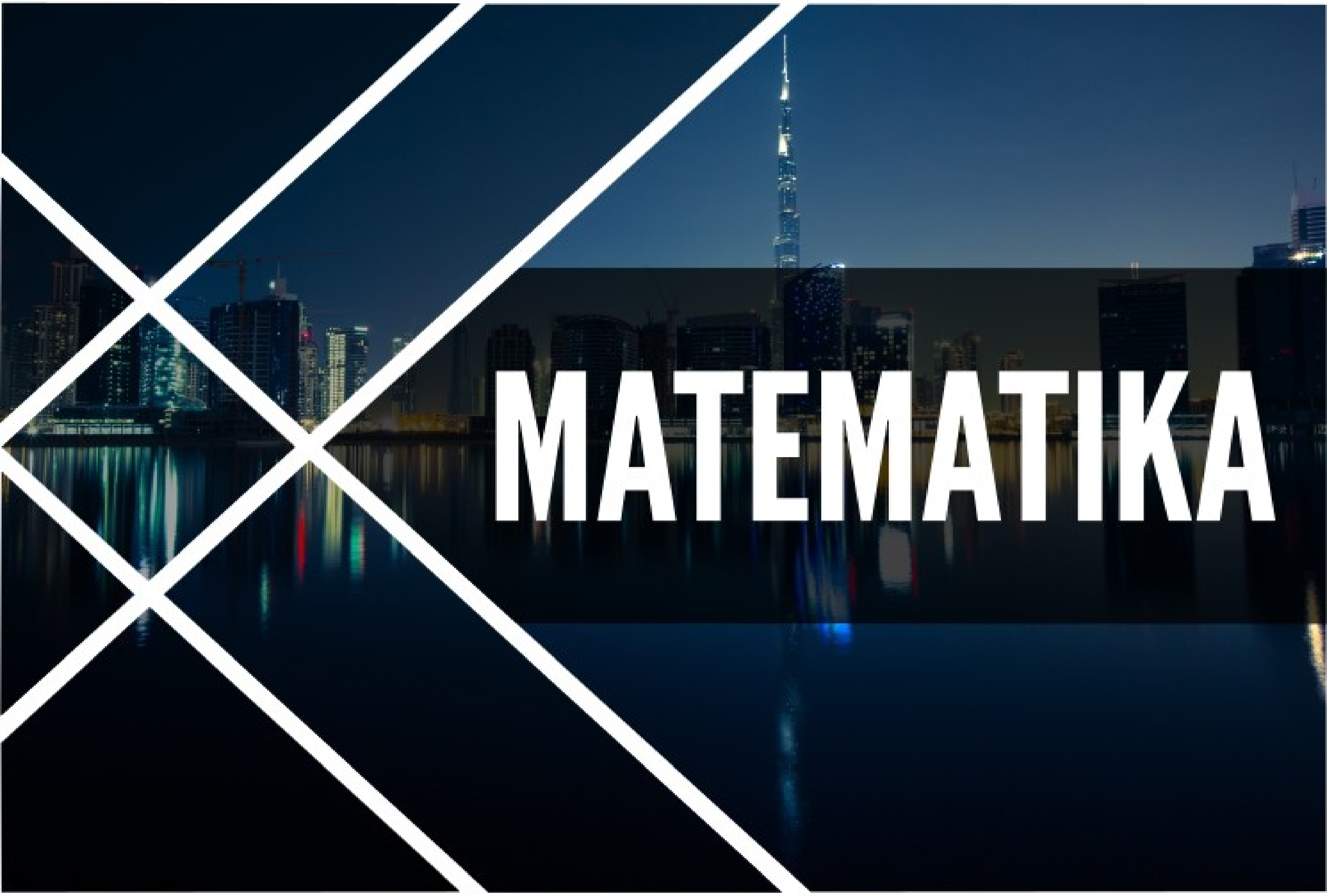
E-Modul



MATEMATIKA

Kelas XI

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah
Direktorat Pembinaan Sekolah Menengah Atas

e-Modul
Direktorat Pembinaan SMA

Penyusun :
Titik Puji W.H.
SMA Negeri I Amuntai-Kalimantan Selatan

Tim Pengembang :
Anim Hadi Susanto, M.Pd
Sukaryadi, S,Pd
Dr. Siswanto, M.Pd
Agus Wahyudi, S.Pd
Andi Prabowo, M.Pd
Heru Suseno, M.Pd
Latif Zamroni, M.Pd
Tri Rusdiono, S.Pd
Suyudi Suhartono, S.Pd
Langgeng Hadi P, ST
I Nyoman Pasek, M.Pd
Ismuji, S.Pd
Titut Ariyanto, M.Pd

e-Modul
Direktorat Pembinaan SMA

Determinan dan Invers Matriks

Tim Pengembang e-Modul
Direktorat Pembinaan SMA - Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

Daftar Isi

Glosarium

Adjoint adalah merupakan transpose dari matriks yang elemen-elemennya merupakan kofaktor-kofaktor dari elemen-elemen matriks

Determinan adalah suatu nilai tertentu yang berkaitan suatu bilangan real dengan suatu matriks bujursangkar

Identitas adalah jenis matriks yang elemen diagonal utamanya 1 dan yang lain 0 serta bila dikalikan dengan matriks lain hasilnya tetap matriks

Invers adalah (atau fungsi kebalikan) adalah (dalam matematika) fungsi yang merupakan kebalikan aksi dari suatu fungsi

Kofaktor adalah nilai yang diperoleh dari perkalian minor dan penandanya.

Minor adalah nilai determinan dari sub matriks prinsipal

Matriks adalah sekumpulan bilangan yang disusun secara baris dan kolom dan ditempatkan pada kurung biasa atau kurung siku sedemikian hingga berbentuk persegi panjang

Ordo adalah bilangan yang menunjukkan banyaknya baris (m) dan banyaknya kolom (n).

Sub Matriks adalah bagian dari suatu matriks yang dihilangkan baris tertentu dan atau kolom tertentu.

Sub Matriks Prinsipal adalah sub matriks yang masih memuat elemen diagonal dari matriks induknya.

Transpose adalah mengubah susunan matriks dari baris menjadi kolom atau sebaliknya

⌂ Daftar Isi

Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari–hari, banyak kita jumpai penulisan dan penyajian informasi dalam bentuk tabel. Misal tabel spesifikasi sebuah produk dalam berbagai tipe sebagai berikut.

Type	Load KW Motor Control	Electric KW	Gas CFH Direct Fired	Gas CFH Indirect Fired	Steam LB/HR
Type I	4,35	13,5	44	55,00	52
Type II	4,75	20,0	67	83,75	77
Type III	6,15	26,4	89	111,25	103
Type IV	5,65	39,6	133	166,25	154
Type V	8,55	52,8	177	221,25	205
Type VI	10,75	82,5	265	331,25	308

Tabel di atas dapat disusun lebih sederhana tanpa menggunakan kepala kolom dan kepala baris sehingga tampak seperti susunan di bawah ini.

4,35	13,5	44	55,00	52
4,75	20,0	67	83,75	77
6,15	26,4	89	111,25	103
5,65	39,6	133	166,25	154
8,55	52,8	177	221,25	205

10,75	82,5	265	331,25	308

Bila susunan lambang bilangan itu diberi kurung atau kurung siku, maka susunan itu disebut **matriks**.

$$\begin{bmatrix} 4,35 & 13,5 & 44 & 55,00 & 52 \\ 4,75 & 20,0 & 67 & 83,75 & 77 \\ 6,15 & 26,4 & 89 & 111,25 & 103 \\ 5,65 & 39,6 & 133 & 166,25 & 154 \\ 8,55 & 52,8 & 177 & 221,25 & 205 \\ 10,75 & 82,5 & 265 & 331,25 & 308 \end{bmatrix}$$

> Jadi matriks adalah susunan bilangan dalam bentuk persegi atau persegipanjang yang diatur menurut baris dan kolom dengan ukuran tertentu yang disebut **ordo**.
>
> Disimbolkan dengan huruf besar, dapat dioperasikan antar matriks dengan syarat-syarat tertentu, antara lain penjumlahan, pengurangan, perkalian dengan bilangan riil, dan perkalian antar matriks.

Selanjutnya akan kalian pelajari bagaimana menentukan nilai determinan dan invers suatu matriks, khusus untuk matriks ordo 2 x 2 dan 3 x 3.

PETUNJUK PENGGUNAAN MODUL

Materi bahasannya terbagi menjadi dua bagian besar pembelajaran. Pembelajaran pertama membahas tentang determinan. Yaitu cara menentukan determinan ordo 2 x 2 dan ordo 3 x 3, sifat-sifat dan permasalahan-permasalahan yang dapat diselesaikan dengan determinan.

Kemudian dalam bagian kegiatan belajar yang kedua dibahas invers matriks, baik ordo 2 x 2 maupun ordo 3 x 3. Di dalamnya terdapat materi tentang matriks minor (sub matriks), kofaktor, dan adjoin suatu matriks.

Pada setiap bagian akan diberikan rangkuman, soal-soal latihan, dan penilaian diri. Dan pada akhir modul ini kalian akan "ditantang" untuk mengerjakan soal evaluasi. Bila nilai pada evaluasi tersebut kurang dari 75, maka disarankan kalian untuk melakukan review pembelajaran hingga paham dan melakukan evaluasi lagi.

KOMPETENSI

Secara umum tujuan instruksional yang hendak dicapai modul ini adalah mengharapkan kalian dapat menentukan determinan dan invers suatu matriks persegi dan memanfaatkannya dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan.

Kompetensi Dasar dan Indikator

3.4 Menganalisis sifat-sifat determinan dan invers matriks berordo 2×2 dan 3×3.

- 3.4.1 Menentukan nilai determinan ordo 2 x 2.
- 3.4.2 Menentukan nilai determinan ordo 3 x 3.
- 3.4.3 Menentukan invers matriks ordo 2 x 2.
- 3.4.4 Menentukan invers matriks ordo 3 x 3.

4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan determinan dan invers matriks berordo 2×2 dan 3×3.

- 4.4.1 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan determinan matriks.
- 4.4.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan invers matriks.

Pembelajaran I

DEFINISI DETERMINAN

Determinan adalah suatu bilangan real yang diperoleh dari suatu proses dengan aturan tertentu terhadap matriks persegi. Determinan dari sebuah matriks persegi A, dinotasikan dengan det(A) atau |A|.

Beberapa kaidah berkaitan dengan determinan matriks.

- Untuk matriks tunggal A = [a] maka det(A) = |A| = a.
- Untuk matriks persegi A = [a_{ij}] dengan ordo *n* maka $|A| = \sum_{i=r,j=1}^{r,n} (a_{ij} \times K_{ij})$, dimana K adalah kofaktor.
- Determinan, minor, dan kofaktor akan saling berkaitan.

Contoh:

1. $\text{A}=[3] \rightarrow \det(A) = |A| = 3$
2. $\text{B}=[-2] \rightarrow \det(B) = |B| = -2$
3. $\text{C}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \det(C) = ?$
   (menunggu konsep berikutnya)

SUB-MATRIKS

Matriks bagian (submatriks) dari matriks A adalah matriks-matriks yang diperoleh dengan menghilangkan salah satu atau lebih vektor-vektor baris dan/atau vektor-vektor kolom dari matriks A.

Contoh:

Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

dengan menghilangkan baris ke-1 dan kolom ke-2, maka diperoleh submatriks $S_{1,2}$ = [2 6].

Submatriks prinsipal adalah matriks bagian dari matriks persegi yang diperoleh dengan jalan menghilangkan vektor baris dan vektor kolom yang bersesuaian sedemikian hingga matriks bagiannya tetap merupakan matriks persegi dan elemen-elemen diagonal dan submatriks adalah juga elemen diagonal dari matriks persegi semula.

Contoh:

Diberikan matriks $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, maka submatriks prinsipal nya adalah:

$S_{1,1}$ = [4]

$S_{1,2}$ = [2]

$S_{2,1}$ = [-1]

$S_{2,2}$ = [4]

MINOR

Bila matriks persegi A dengan ordo n memiliki submatriks prinsipal $S_{r,c}$, maka minor $M_{r,c}$ merupakan determinan dari $S_{r,c}$.

> **Catatan:**
> $M_{r,c} = |S_{r,c}|$

Contoh:

Diberikan matriks $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, maka minor-minornya adalah:

$M_{1,1} = |S_{1,1}| = |4| = 4$
$M_{1,2} = |S_{1,2}| = |2| = 2$
$M_{2,1} = |S_{2,1}| = |-1| = -1$
$M_{2,2} = |S_{2,2}| = |3| = 3$

KOFAKTOR

Kofaktor $K_{r,c}$ adalah hasil perkalian minor $M_{r,c}$ dengan penandanya. Penanda minor diperoleh dari $(-1)^{r+c}$.

> **Catatan:**
> $K_{r,c} = (-1)^{r+c} \times M_{r,c}$

Contoh:

Diberikan matriks $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, minor-minornya adalah:

$M_{1,1} = |S_{1,1}| = |4| = 4$
$M_{1,2} = |S_{1,2}| = |2| = 2$
$M_{2,1} = |S_{2,1}| = |-1| = -1$
$M_{2,2} = |S_{2,2}| = |3| = 3$

Maka kofaktor-kofaktornya:

$K_{1,1} = (-1)^{1+1} \times M_{1,1} = 4$
$K_{1,2} = (-1)^{1+2} \times M_{1,2} = -2$
$K_{2,1} = (-1)^{2+1} \times M_{2,1} = 1$
$K_{2,2} = (-1)^{2+2} \times M_{2,2} = 3$

DETERMINAN MATRIKS

Pada bagian sebelumnya telah dinyatakan bahwa menentukan determinan matriks dilakukan dengan ekspansi kofaktor terhadap elemen barisnya, seperti rumus:

$$|A| = \sum_{i=r, j=1}^{r,n} (a_{ij} \times K_{ij})$$

Determinan Matriks Ordo 2 × 2

Misal matriks $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, maka cara menentukan nilai determinannya sebagai berikut:

$c_{1,1} = 3;\ c_{1,2} = -1;\ c_{2,1} = 2;\ c_{2,2} = 4$

$K_{1,1} = 4;\ K_{1,2} = -2;\ K_{2,1} = 1;\ K_{2,2} = 3$

maka,

$$\begin{aligned} |C| &= \sum_{i=1, j=1}^{1,2} (c_{i,j} \times K_{i,j}) \\ &= c_{1,1} \times K_{1,1} + c_{1,2} \times K_{1,2} \\ &= 3 \times 4 + (-1) \times (-2) \\ &= 12 + 2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

atau,

$$\begin{aligned} |C| &= \sum_{i=2, j=1}^{2,2} (c_{i,j} \times K_{i,j}) \\ &= c_{2,1} \times K_{2,1} + c_{2,2} \times K_{2,2} \\ &= 2 \times 1 + 4 \times 3 \\ &= 2 + 12 \\ &= 14 \end{aligned}$$

> Dari pengembangan konsep di atas kita dapat membuat bentuk umum dari nilai determinan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ sebagai

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Contoh:

Tentukan determinan dari matriks $\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$!

Alternatif penyelesaian:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} &= (-3)(4) - (7)(5) \\ &= -12 - 35 \\ &= -47 \end{aligned}$$

Jadi nilai determinan matriks adalah –47.

Determinan Matriks Ordo 3 × 3

Sekarang, bagaimana menentukan nilai determinan matriks persegi ordo 3?

Misal diberikan matriks $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. Ikuti langkah-langkah berikut untuk menentukan nilai determinan matriks tersebut.

- Elemen baris yang dipilih
  $a_{1,1} = 2$
  $a_{1,2} = 1$
  $a_{1,3} = 4$

- Kofaktor dari elemen baris yang dipilih

$$K_{1,1} = (-1)^{1+1} \times M_{1,1} = (1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (1)\left[(3)(2) - (1)(-2)\right] = 8$$

$$K_{1,2} = (-1)^{1+2} \times M_{1,2} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\left[(-1)(2) - (1)(1)\right] = 3$$

$$K_{1,3} = (-1)^{1+3} \times M_{1,3} = (1)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (1)\left[(-1)(-2) - (3)(1)\right] = -1$$

- Nilai determinan matriks

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{i=1,j=1}^{1,3} (a_{i,j} \times K_{i,j}) \\ &= a_{1,1} \times K_{1,1} + a_{1,2} \times K_{1,2} + a_{1,3} \times K_{1,3} \\ &= (2)(8) + (1)(3) + (4)(-1) \\ &= 16 + 3 - 4 \\ &= 15 \end{aligned}$$

> Dari pengembangan konsep di atas, seorang bernama Piere Sarrus, matematikawan Perancis, menemukan metode sederhana untuk menghitung nilai determinan matriks ordo 3 × 3 yang kemudian disebut sebagai **metode Sarrus**.
>
> Misal menentukan nilai determinan matriks $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ dengan metode Sarrus:
>
> $$|A| = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}\right| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

Contoh:

Tentukan nilai determinan matriks $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$!

Alternatif penyelesaian:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{matrix}\Bigg|$$

$$\begin{aligned} &= [(2)(3)(2) + (1)(1)(1) + (4)(-1)(-2)] - [(4)(3)(1) + (2)(1)(-2) + (1)(-1)(2)] \\ &= (12 + 1 + 8) - (12 - 4 - 2) \\ &= 21 - 6 \\ &= 15 \end{aligned}$$

PENGGUNAAN DETERMINAN

Penggunaan determinan diantaranya dalam penyelesaian masalah sistem persamaan linier. Seorang ahli matematika Swiss bernama *Gabriel Cramer* menggunakan determinan untuk menyelesaikan masalah sistem persamaan linier, yang kemudian disebut sebagai **Metode Cramer**.

Untuk suatu sistem persamaan linier dua variabel,

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

diperoleh nilai-nilai

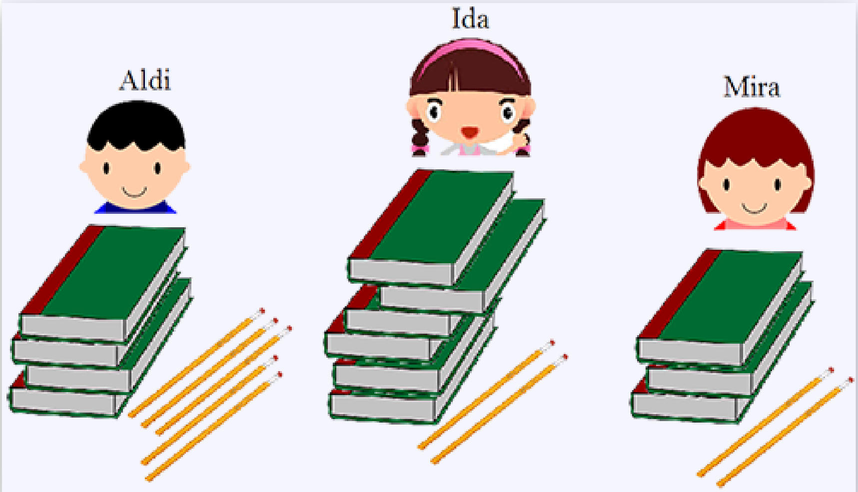
$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix};\ \ D_x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix};\ \ D_y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$$

sehingga nilai *x* dan *y* diperoleh

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ dan } y = \frac{D_y}{D}$$

Permasalahan 1:

Aldi membeli 4 buku dan 5 pensil seharga Rp21.500,00 . Ida membeli 6 buku dan 2 pensil seharga Rp24.000,00. Jika Mira ingin membeli 3 buku dan 2 pensil berapa yang harus dibayar Mira?



Alternatif penyelesaian:

Misal harga buku dinyatakan dengan *x* dan harga pensil dinyatakan dengan *y.*

Sistem persamaan linier yang dapat dibuat,

$$\begin{cases} 4x + 5y = 21500 \\ 6x + 2y = 24000 \end{cases}$$

Dengan metode Cramer diperoleh

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 30 = -22$$

$$\mathrm{D}_x = \begin{vmatrix} 21500 & 5 \\ 24000 & 2 \end{vmatrix} = 43000 - 120000 = -77000$$

$$\mathrm{D}_y = \begin{vmatrix} 4 & 21500 \\ 6 & 24000 \end{vmatrix} = 96.000 - 129.000 = -33000$$

Nilai variabel *x* dan *y* diperoleh

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-77000}{-22} = 3500$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-33000}{-22} = 1500$$

Jadi harga sebuah buku dan sebuah pensil masing-masing Rp3.500,- dan Rp1.500,-

Harga yang harus dibayar Mira,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3x + 2y \\ f(3500,1500) &= 3(3500) + 2(1500) \\ &= 10500 + 3000 \\ &= 13500 \end{aligned}$$

Jadi harga yang harus dibayar Mira Rp13.500,-

Permasalahan 2:

Sebuah bilangan terdiri dari 3 angka yang jumlahnya 9. Angka ratusan adalah $\frac{1}{8}$ dari bilangan yang dibentuk oleh kedua angka yang dibelakang. Angka satuan adalah $\frac{1}{8}$ dari bilangan yang dibentuk oleh kedua angka yang di depan.

Carilah bilangan tersebut !

Alternatif penyelesaian:

Misal bilangan tersebut *xyz*, dimana *x* ratusan, *y* puluhan, dan *z* satuan.

Persamaan 1: $x + y + z = 9$

Persamaan 2: $x = \frac{1}{8}(10y + z) \Rightarrow 8x - 10y - z = 0$

Persamaan 3: $z = \frac{1}{8}(10x + y) \Rightarrow 10x + y - 8z = 0$

Sistem persamaan linearnya: $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 8x - 10y - z = 0 \\ 10x + y - 8z = 0 \end{cases}$

Dengan metode Crammer diperoleh nilai-nilai

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & -10 & -1 \\ 10 & 1 & -8 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 8 & -10 \\ 10 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 80 - 10 + 8 - (-100 - 1 - 64) \\ &= 78 - (-165) \\ &= 243 \end{aligned}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & -8 \end{vmatrix}\begin{matrix} 9 & 1 \\ 0 & -10 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 720 - 0 + 0 - (0 - 9 - 0) \\ &= 729 \end{aligned}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 8 & 0 & -1 \\ 10 & 0 & -8 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 9 \\ 8 & 0 \\ 10 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 0 - 90 + 0 - (0 - 0 - 576) \\ &= 486 \end{aligned}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 8 & -10 & 0 \\ 10 & 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 8 & -10 \\ 10 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 0 + 0 + 72 - (-900 + 0 + 0) \\ &= 972 \end{aligned}$$

Nilai variabel *x*, *y*, dan *z*

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{729}{243} = 3$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{486}{243} = 2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{972}{243} = 4$$

Jadi bilangan yang dimaksud **324**.

« Pendahuluan ⌂ Daftar Isi Rangkuman »

Rangkuman

01. Determinan matriks ordo 2 ×2

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dirumuskan

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\ .$$

02. Determinan matriks ordo 3 × 3

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

dengan metode Sarrus dirumuskan

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

03. Menyelesaikan persamaan linier

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

dengan metode Cramer

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix};\ D_x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix};\ D_y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$$

sehingga nilai-nilai

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ dan } y = \frac{D_y}{D}$$

Latihan 1

Kerjakan semua soal di bawah ini di kertas, kemudian cocokan dengan alternatif penyelesaiannya!

01. Tentukan determinan dari matriks $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$!

    Altenatif penyelesaian

02. Tentukan determinan dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$!

    Altenatif penyelesaian

03. Dea dan Anton bekerja pada pabrik tas. Dea dapat menyelesaikan 3 buah tas setiap jam dan Anton dapat menyelesaikan 4 tas setiap jam. Jumlah jam kerja Asti dan Anton adalah 16 jam sehari, dengan jumlah tas yang dibuat oleh keduanya adalah 55 tas. Jika, jam kerja keduanya berbeda tentukan jam kerja mereka masing-masing!

    Altenatif penyelesaian

Tim Pengembang e-Modul
Direktorat Pembinaan SMA - Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
01.	Apakah Anda telah memahami cara menentukan determinan matriksordo 2 × 2?	Ya	Tidak
02.	Apakah Anda telah memahami cara menentukan determinan matriks ordo 3 × 3?	Ya	Tidak
03.	Apakah Anda telah memahami cara menyelesaikan SPL dua variabel atau tiga variabel dengan metode Crammer?	Ya	Tidak

Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak".

Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

« Latihan   ⌂ Daftar Isi   Pembelajaran II »

Pembelajaran II

ADJOIN MATRIKS

Adjoin suatu matriks A merupakan transpose dari matriks yang elemen-elemennya merupakan kofaktor-kofaktor dari elemen-elemen matriks A, dan dituliskan Adj (A). Jadi Adj (A) dituliskan:

$$\mathrm{adj}(A) = [K_{ij}]^T$$

dimana $[K_{ij}]$ adalah matriks kofaktor matriks A.

Contoh 1:

Tentukan adjoin dari matriks $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$!

Alternatif jawaban:

Menentukan semua kofaktor dari A,

$$\begin{aligned} K_{1,1} &= (-1)^{1+1} \times M_{1,1} = (1)\,|3| = 3 \\ K_{1,2} &= (-1)^{1+2} \times M_{1,2} = (-1)\,|-1| = 1 \\ K_{2,1} &= (-1)^{2+1} \times M_{2,1} = (-1)\,|1| = -1 \\ K_{2,2} &= (-1)^{2+2} \times M_{2,2} = (1)\,|2| = 2 \end{aligned}$$

Matriks kofaktor,

$$\mathrm{K}=\begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} \\ K_{2,1} & K_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Adjoin matriks A,

$$\mathrm{adj(A)} = K^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Contoh 2:

Tentukan adjoin dari matriks $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$!

Alternatif penyelesaian:

Menentukan semua kofaktor A,

$$K_{1,1} = (-1)^{1+1} \times M_{1,1} = (1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 9$$

$$K_{1,2} = (-1)^{1+2} \times M_{1,2} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

$$K_{1,3} = (-1)^{1+3} \times M_{1,3} = (1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

$$K_{2,1} = (-1)^{2+1} \times M_{2,1} = (-1)\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -10$$

$$K_{2,2} = (-1)^{2+2} \times M_{2,2} = (1)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 14$$

$$K_{2,3} = (-1)^{2+3} \times M_{2,3} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 18$$

$$K_{3,1} = (-1)^{3+1} \times M_{3,1} = (1)\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$K_{3,2} = (-1)^{3+2} \times M_{3,2} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$K_{3,3} = (-1)^{3+3} \times M_{3,3} = (1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

Matriks kofaktor,

$$\mathrm{K}=\begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} \\ K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 & -3 \\ -10 & 14 & 18 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Adjoin matriks A,

$$\mathrm{adj(A)}=[K_{ij}]^T=\begin{bmatrix} 9 & -10 & 8 \\ 7 & 14 & 0 \\ -3 & 18 & 8 \end{bmatrix}$$

> Untuk matrik
> $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ diperoleh $\mathrm{adj(A)}=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

INVERS MATRIKS

Jika A dan B adalah matriks persegi, dan berlaku A × B = B × A = I maka dikatakan matriks A dan B saling invers. B disebut invers dari A, atau ditulis A^{-1}. Matriks yang mempunyai invers disebut invertible atau matriks non singular, sedangkan matriks yang tidak mempunyai invers disebut matriks singular.

Secara umum, untuk menentukan invers suatu matriks digunakan rumus,

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\times \mathrm{adj}(A)$$

dimana det(A) adalah determinan matriks A dan adj(A) adalah adjoin matriks A.

Contoh 1:

Tentukan invers dari matriks $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$!

Alternatif jawaban:

Menentukan semua kofaktor dari A,

$$\begin{aligned} K_{1,1} &= (-1)^{1+1} \times M_{1,1} = (1)\,|3| = 3 \\ K_{1,2} &= (-1)^{1+2} \times M_{1,2} = (-1)\,|-1| = 1 \\ K_{2,1} &= (-1)^{2+1} \times M_{2,1} = (-1)\,|1| = -1 \\ K_{2,2} &= (-1)^{2+2} \times M_{2,2} = (1)\,|2| = 2 \end{aligned}$$

Matriks kofaktor,

$$\mathrm{K} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} \\ K_{2,1} & K_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Adjoin matriks A,

$$\mathrm{adj(A)} = K^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinan matriks A,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7$$

Invers matriks A,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times \mathrm{adj}(A) = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Untuk matrik $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ diperoleh $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Contoh 2:

Tentukan invers dari matriks $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$!

Alternatif penyelesaian:

Menentukan semua kofaktor A,

$$K_{1,1} = (-1)^{1+1} \times M_{1,1} = (1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 9$$

$$K_{1,2} = (-1)^{1+2} \times M_{1,2} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

$$K_{1,3} = (-1)^{1+3} \times M_{1,3} = (1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

$$K_{2,1} = (-1)^{2+1} \times M_{2,1} = (-1)\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -10$$

$$K_{2,2} = (-1)^{2+2} \times M_{2,2} = (1)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 14$$

$$K_{2,3} = (-1)^{2+3} \times M_{2,3} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 18$$

$$K_{3,1} = (-1)^{3+1} \times M_{3,1} = (1)\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$K_{3,2} = (-1)^{3+2} \times M_{3,2} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$K_{3,3} = (-1)^{3+3} \times M_{3,3} = (1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

Matriks kofaktor,

$$\mathrm{K} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} \\ K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 & -3 \\ -10 & 14 & 18 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Adjoin matriks A,

$$\mathrm{adj(A)} = [K_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 9 & -10 & 8 \\ 7 & 14 & 0 \\ -3 & 18 & 8 \end{bmatrix}$$

Determinan matriks A,

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{1,1}K_{1,1} + a_{1,2}K_{1,2} + a_{1,3}K_{1,3} \\ &= (2)(9) + (4)(7) + (-2)(-3) \\ &= 18 + 28 + 6 \\ &= 52\end{aligned}$$

Invers matriks A,

$$A-1 = \frac{1}{\det(A)} \times \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{52}\begin{bmatrix} 9 & -10 & 8 \\ 7 & 14 & 0 \\ -3 & 18 & 8 \end{bmatrix}$$

PERSAMAAN MATRIKS

Pada aljabar matriks dikembangkan hubungan dua matriks atau lebih dalam bentuk persamaan. Ada dua persamaan dasar akibat tidak berlakunya hukum komutatif pada perkalian matriks, yaitu AX = B dan XA = B.

$$\begin{aligned} AX &= B \\ \left(A^{-1}A\right)X &= A^{-1}B \\ IX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} XA &= B \\ XAA^{-1} &= BA^{-1} \\ X\left(AA^{-1}\right) &= BA^{-1} \\ XI &= BA^{-1} \\ X &= BA^{-1} \end{aligned}$$

Persamaan 1:

$\text{AX=B} \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

Persamaan 2:
XA=B⇔ $X = BA^{-1}$

Contoh:

Diketahui matriks-matriks A=$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ $\text{dan } B = \begin{bmatrix} -13 & 8 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$.

Tentukan matriks X yang memenuhi AX = B !

Alternatif penyelesaian:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ X &= A^{-1}B \\ &= \frac{1}{8+3}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -13 & 8 \\ -10 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -22 & 11 \\ -33 & 22 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tim Pengembang e-Modul
Direktorat Pembinaan SMA - Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

Rangkuman

01. Invers matriks secara umum dirumuskan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times \operatorname{adj}(A)$$

02. Invers matriks ordo 2 × 2

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dirumuskan

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

03. Persamaan matriks

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B} \Leftrightarrow X = A^{-1} B$$

dan

$$\mathrm{XA} = \mathrm{B} \Leftrightarrow X = B A^{-1}$$

« Pembelajaran | ⌂ Daftar Isi | Latihan »

Latihan 2

Kerjakan semua soal di bawah ini di kertas, kemudian cocokan dengan alternatif penyelesaiannya!

01. Tentukan invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$!

    Altenatif penyelesaian

02. Tentukan invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$!

    Altenatif penyelesaian

03. Diketahui matriks A dan B masing-masing $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -13 & 8 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$.

    Tentukan matriks X yang memenuhi XA = B !

    Altenatif penyelesaian

Tim Pengembang e-Modul
Direktorat Pembinaan SMA - Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
01.	Apakah Anda telah memahami cara menentukan invers matriks ordo 2 × 2?	Ya	Tidak
02.	Apakah Anda telah memahami cara menentukan invers matriks ordo 3 × 3?	Ya	Tidak
03.	Apakah Anda telah memahami cara menyelesaikan persamaan matriks?	Ya	Tidak

Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak".

Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

« Latihan   ⌂ Daftar Isi   Pembelajaran II »

Evaluasi

01. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

Nilai determinan matriks A adalah ....

- A. −14
- B. −12
- C. −10
- D. 10
- E. 14

02. Diberikan matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$.

Nilai |B| = ...

- A. −102
- B. −51
- C. 0
- D. 51
- E. 102

03. Paman Muthu memiliki 45 hewan ternak yang terdiri dari ayam dan kambing. Jika jumlah kaki hewan ternak paman adalah 100 kaki, maka banyak ayam paman Muthu adalah ....

- A. 50 ekor

B. 45 ekor

C. 40 ekor

D. 30 ekor

E. 20 ekor

04. Diketahui matriks $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Invers matriks A adalah ....

A. $-\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

B. $-\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

C. $-\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

D. $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

E. $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

05. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$.

Determinan matriks X yang memenuhi XA = B^{-1} adalah ....

A. 11

B. 5

C. 0

D. −5

E. −11

√ Hasil Evaluasi

Nilai	Deskripsi

⌂ Daftar Isi

Daftar Pustaka

Bornok Sinaga dkk. 2014. *Matematika XI*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Noormandiri dan Endar Sucipto. 2000. *Matematika 3*. Jakarta: Erlangga.

Tim LAPI ITB. 2005. *Modul Pelatihan Matematika*. Bandung: LAPI ITB.

⌂ Daftar Isi