GURU PEMBELAJAR
MODUL MATEMATIKA SMA

KELOMPOK KOMPETENSI I

Teknik Penilaian dalam Pembelajaran, Matriks, dan Vektor

DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
2016

Kata Sambutan

Peran guru profesional dalam proses pembelajaran sangat penting sebagai kunci keberhasilan belajar siswa. Guru profesional adalah guru yang kompeten membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan pendidikan yang berkualitas. Hal tersebut menjadikan guru sebagai komponen yang menjadi fokus perhatian pemerintah pusat maupun pemerintah daerah dalam peningkatan mutu pendidikan terutama menyangkut kompetensi guru.

Pengembangan profesionalitas guru melalui program Guru Pembelajar merupakan upaya peningkatan kompetensi untuk semua guru. Sejalan dengan hal tersebut, pemetaan kompetensi guru telah dilakukan melalui uji kompetensi guru (UKG) untuk kompetensi pedagogik profesional pada akhir tahun 2015. Hasil UKG menunjukkan peta kekuatan dan kelemahan kompetensi guru dalam penguasaan pengetahuan. Peta kompetensi guru tersebut dikelompokkan menjadi 10 (sepuluh) kelompok kompetensi. Tindak lanjut pelaksanaan UKG diwujudkan dalam bentuk pelatihan guru paska UKG melalui program Guru Pembelajar. Tujuannya untuk meningkatkan kompetensi guru sebagai agen perubahan dan sumber belajar utama bagi peserta didik. Program Guru Pembelajar dilaksanakan melalui pola tatap muka, daring penuh (*online*), dan daring kombinasi (*blended*) tatap muka dengan *online*.

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK), Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Kelautan Perikanan Teknologi Informasi dan Komunikasi (LP3TK KPTK) dan Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Kepala Sekolah (LP2KS) merupakan Unit Pelaksanana Teknis di lingkungan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan yang bertanggung jawab dalam mengembangkan perangkat dan melaksanakan peningkatan kompetensi guru sesuai bidangnya. Adapun perangkat pembelajaran yang dikembangkan tersebut adalah modul untuk program Guru Pembelajar tatap muka dan Guru Pembelajar online untuk semua mata pelajaran dan kelompok kompetensi. Dengan modul ini diharapkan program Guru Pembelajar memberikan sumbangan yang sangat besar dalam peningkatan kualitas kompetensi guru.

Mari kita sukseskan program Guru Pembelajar ini untuk mewujudkan Guru Mulia Karena Karya.

Jakarta, Maret 2016

Direktur Jenderal,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

Sumarna Surapranata

NIP. 195908011985031002

GURU PEMBELAJAR

MODUL

MATEMATIKA SMA

KELOMPOK KOMPETENSI I

PEDAGOGIK

TEKNIK PENILAIAN DALAM PEMBELAJARAN

DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN

2016

Penulis:
Pujiadi, S.Pd., M.Pd., M.Kom. 08156501190, pujiadi.lpmpjateng@gmail.com

Penelaah:
Drs. Amin Suyitno, M.Pd. 085865168227, aminsuyitno.unnes@gmail.com

Ilustrator:
Denny Saputra, S.Kom. 085227133999, denny.s4putr4@gmail.com

Kata Pengantar

Peningkatan kualitas pendidikan saat ini menjadi prioritas, baik oleh pemerintah pusat maupun daerah. Salah satu komponen yang menjadi fokus perhatian adalah peningkatan kompetensi guru. Peran guru dalam pembelajaran di kelas merupakan kunci keberhasilan untuk mendukung keberhasilan belajar siswa. Guru yang profesional dituntut mampu membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan *output* dan *outcome* pendidikan yang berkualitas.

Dalam rangka memetakan kompetensi guru, telah dilaksanakan Uji Kompetensi Guru (UKG) Tahun 2015. UKG tersebut dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikat maupun belum bersertifikat untuk memperoleh gambaran objektif kompetensi guru, baik profesional maupun pedagogik. Hasil UKG kemudian ditindaklanjuti melalui Program Guru Pembelajar sehingga diharapkan kompetensi guru yang masih belum optimal dapat ditingkatkan.

PPPPTK Matematika sebagai Unit Pelaksana Teknis Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan dibawah pembinaan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan mendapat tugas untuk menyusun modul guna mendukung pelaksanaan Guru Pembelajar. Modul ini diharapkan dapat menjadi sumber belajar bagi guru dalam meningkatkan kompetensinya sehingga mampu mengambil tanggung jawab profesi dengan sebaik-baiknya.

Yogyakarta, Maret 2016
Kepala PPPPTK Matematika,

Dr. Dra. Daswatia Astuty, M.Pd.
NIP. 196002231985032001

DAFTAR ISI

Daftar Gambar

Daftar Lampiran

Pendahuluan

A. Latar Belakang

Penyelenggaraan pendidikan sebagaimana yang diamanatkan dalam Undang-undang Nomor 20 Tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional diharapkan dapat mewujudkan proses berkembangnya kualitas pribadi peserta didik sebagai generasi penerus bangsa di masa depan, yang diyakini akan menjadi faktor determinan bagi tumbuh kembangnya bangsa dan negara Indonesia sepanjang zaman.

Kompetensi guru merupakan faktor yang sangat penting bagi keberhasilan upaya meningkatkan mutu pendidikan khususnya yang terkait dengan pembelajaran dan penilaian. Kemampuan guru dalam melakukan penilaian harus sesuai dengan Standar Penilaian Pendidikan Dasar dan Menengah yang tertuang dalam Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan nomor 53 tahun 2015, yang menyatakan bahwa Penilaian Hasil Belajar oleh Pendidik adalah proses pengumpulan informasi/bukti tentang capaian pembelajaran peserta didik dalam kompetensi sikap spiritual dan sikap sosial, kompetensi pengetahuan, dan kompetensi keterampilan yang dilakukan secara terencana dan sistematis, yang dilakukan untuk

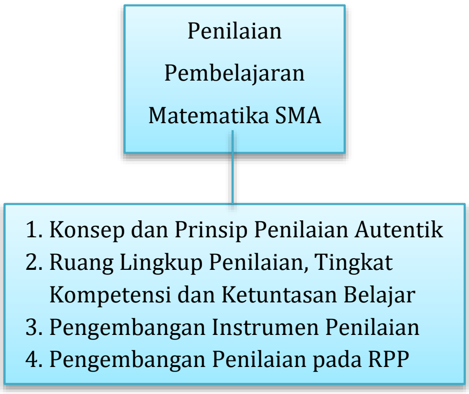
memantau proses, kemajuan belajar, dan perbaikan hasil belajar melalui penugasan dan evaluasi hasil belajar (Kemdikbud, 2015).

Modul ini merupakan bagian dari upaya peningkatan kompetensi guru, khususnya untuk kompetensi pedagogi terkait penilaian. Modul ini digunakan sebagai bahan pembelajaran untuk guru-guru matematika SMA yang mengikuti Guru Pembelajar, khususnya terkait dengan kompetensi pengembangan penilaian pembelajaran.

B. Tujuan

Modul ini disusun dalam rangka memfasilitasi guru-guru matematika SMA pada Guru Pembelajar agar dapat meningkatkan kompetensinya dalam memahami konsep penilaian pembelajaran matematika, sehingga para guru dapat mengembangkan instrumen penilaian proses dan hasil belajar yang terstandar.

C. Peta Kompetensi



D. Ruang Lingkup

Materi yang termuat pada modul ini sesuai dengan kebutuhan peningkatan kompetensi guru khususnya yang terkait dengan pengembangan kurikulum matematika. Secara garis besar ruang lingkup materi yang diuraikan dalam setiap kegiatan pembelajaran adalah sebagai berikut.

Kegiatan Pembelajaran 1 mengenai materi Penilaian Pembelajaran Matematika SMA, menguraikan tentang (1) Konsep dan Prinsip Penilaian Autentik, (2) Ruang Lingkup Penilaian, Tingkat Kompetensi, dan Ketuntasan Belajar. Kegiatan Pembelajaran 2 menguraikan tentang (1) Pengembangan Instrumen Penilaian, (2) Mengembangkan Penilaian pada RPP.

E. Saran Cara Penggunaan Modul

1. Modul ini berisi kegiatan pembelajaran yang memuat: Tujuan, Indikator Pencapaian Kompetensi, Uraian Materi, Aktivitas Pembelajaran, Latihan/Kasus/Tugas, Rangkuman, Umpan Balik dan Tindak Lanjut, serta Kunci Jawaban.
2. Kajilah uraian materi dengan seksama sebelum pembelajaran dimulai, dan selama pembelajaran.
3. Ikuti aktivitas pembelajaran yang telah diuraikan dengan sungguh-sunguh dan semangat, baik secara individu maupun kelompok.
4. Kerjakan setiap butir soal latihan yang telah disediakan dengan benar dan cermat, untuk mengukur tingkat penguasaan Anda pada setiap KB, dan cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban yang terdapat pada bagian akhir KB.

5. Upayakan untuk selalu berkomunikasi dan bertukar fikiran dengan sesama peserta Guru Pembelajar maupun fasilitator, terlebih bila Anda mengalami kesulitan terkait materi pembelajaran.
6. Kerjakan soal-soal evaluasi yang telah disediakan pada bagian akhir modul ini.
7. Bila Anda menghendaki penjelasan untuk memudahkan pemahaman Anda tentang kata-kata/istilah/frase yang berhubungan dengan uraian naskah, yang Anda anggap sulit/sukar dimengerti, maka Anda dapat melihat glosarium yang tersedia di bagian akhir modul ini.
8. Anda disarankan juga untuk membaca referensi yang menjadi rujukan utama penyusunan modul ini.

.

Kegiatan Pembelajaran (KB) 1:

Konsep dan Prinsip Penilaian

A. Tujuan

Melalui kegiatan pembelajaran ini, diharapkan dapat meningkatkan wawasan dan kompetensi guru khususnya dalam memahami tentang konsep penilaian autentik, prinsip penilaian autentik, ruang lingkup penilaian, tingkat kompetensi, dan ketuntasan belajar.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah mengikuti pembelajaran modul ini, peserta diharapkan dapat:

1. menjelaskan tentang konsep penilaian autentik;
2. menjelaskan tentang prinsip penilaian autentik;
3. menjelaskan tentang ruang lingkup penilaian;
4. menjelaskan tentang tingkat kompetensi;
5. menjelaskan tentang ketuntasan belajar.

C. Uraian Materi

1. Konsep dan Prinsip Penilaian

Penilaian merupakan hal yang penting dalam pembelajaran, karena penilaian itu bias menjadi umpan balik yang konstuktif bagi guru dan siswa. Dengan penilaian siswa dapat mengetahui seberapa tinggi kompetensi yang telah dicapainya. Sedangkan bagi guru, penilaian dapat menjadi arahan untuk menentukan apa langkah yang akan dilakukan selanjutnya.

Pada modul ini penilaian yang akan dibahas dan dijabarkan adalah penilaian autentik yang telah dikembangkan di dalam kurikulum 2013, mengingat bahwa untuk beberapa waktu ke depan secara bertahap kurikulum yang akan diterapkan adalah kurikulum 2013. Sebagian dari konsep penilaian yang ada di dalam kurikulum sebelumnya juga dibahas di dalam konsep penilaian pada kurikulum 2013 walaupun dalam kemasan yang berbeda. Untuk sebagian konsep penilaian yang lain dapat disesuaikan dari konsep konsep penilaian kurikulum 2013 ini.

Penilaian autentik merupakan pendekatan, prosedur, dan instrumen penilaian proses dan capaian pembelajaran peserta didik dalam penerapan sikap spiritual dan sikap sosial, penguasaan pengetahuan, dan penguasaan keterampilan yang diperolehnya dalam bentuk pelaksanaan tugas perilaku nyata atau perilaku dengan tingkat kemiripan dengan dunia nyata, atau kemandirian belajar. Penilaian autentik menilai kesiapan (input) peserta didik, serta proses dan hasil belajar (output) secara utuh.

Keterpaduan penilaian komponen input, proses, dan output akan menggambarkan kapasitas, gaya, dan hasil belajar peserta didik, bahkan mampu menghasilkan dampak instruksional (*instructional effects*) dan dampak pengiring (*nurturant effects*) dari pembelajaran.

Penilaian autentik mampu menggambarkan peningkatan hasil belajar peserta didik, baik dalam rangka mengobservasi, menanya, menalar, mencoba, dan membangun jejaring. Penilaian autentik cenderung fokus pada tugas-tugas kompleks atau kontekstual, memungkinkan peserta didik menunjukkan kompetensi mereka yang meliputi sikap, pengetahuan, dan keterampilan dalam kehidupan nyata (*real life*). Karenanya, penilaian autentik sangat relevan dengan pendekatan ilmiah (*scientific approach*) dalam pembelajaran matematika di SMA.

Penilaian autentik juga merupakan pendekatan dan instrumen penilaian yang memberikan kesempatan luas kepada peserta didik untuk menerapkan pengetahuan, keterampilan, dan sikap yang sudah dimilikinya dalam bentuk tugas-tugas membaca dan meringkasnya, eksperimen, mengamati, survei, proyek, makalah, membuat multi media, membuat karangan, dan diskusi kelas. Penilaian autentik tidak hanya mengukur apa yang diketahui oleh peserta didik, tetapi lebih menekankan mengukur apa yang dapat dilakukan oleh peserta didik. Penilaian autentik dapat diterapkan dalam berbagai bidang ilmu dengan orientasi utamanya pada proses dan hasil pembelajaran. Penilaian autentik dilakukan pendidik secara terus menerus (berkelanjutan) selama pelaksanaan pembelajaran.

Hasil penilaian autentik dapat digunakan oleh pendidik untuk merencanakan program perbaikan (remedial), pengayaan (*enrichment*), atau pelayanan konseling. Selain itu, hasil penilaian autentik dapat digunakan sebagai bahan untuk memperbaiki proses pembelajaran yang memenuhi Standar Penilaian Pendidikan.

Penilaian hasil belajar peserta didik pada jenjang pendidikan dasar dan menengah didasarkan pada prinsip umum dan prinsip khusus.

Prinsip umum penilaian yakni sebagai berikut.

1) Sahih, berarti penilaian didasarkan pada data yang mencerminkan kemampuan yang diukur.
2) Objektif, berarti penilaian berbasis pada standar (prosedur dan kriteria yang jelas) dan tidak dipengaruhi faktor subjektivitas penilai.
3) Terpadu, berarti penilaian oleh pendidik dilakukan secara terencana, menyatu dengan kegiatan pembelajaran, dan berkesinambungan.
4) Adil, berarti penilaian tidak menguntungkan atau merugikan peserta didik karena berkebutuhan khusus serta perbedaan latar belakang agama, suku, budaya, adat istiadat, status sosial ekonomi, dan gender.
5) Transparan, berarti prosedur penilaian, kriteria penilaian, dan dasar pengambilan keputusan dapat diketahui oleh semua pihak.
6) Akuntabel, berarti penilaian dapat dipertanggungjawabkan kepada pihak internal sekolah maupun eksternal untuk aspek teknik, prosedur, dan hasilnya.
7) Menyeluruh dan berkesinambungan, berarti penilaian mencakup semua aspek kompetensi menggunakan berbagai teknik penilaian yang sesuai untuk memantau perkembangan kemampuan peserta didik.
8) Sistematis, berarti penilaian dilakukan secara berencana dan bertahap dengan mengikuti langkah-langkah baku.
9) Edukatif, berarti penilaian bersifat mendidik dan memotivasi peserta didik dan pendidik.

Prinsip khusus penilaian autentik, yaitu sebagai berikut.

1) Materi penilaian dikembangkan dari kurikulum.
2) Bersifat lintas muatan atau mata pelajaran.
3) Berkaitan dengan kemampuan peserta didik.

4) Berbasis kinerja peserta didik.
5) Memotivasi belajar peserta didik.
6) Menekankan pada kegiatan dan pengalaman belajar peserta didik.
7) Memberi kebebasan peserta didik untuk mengkonstruksi responnya.
8) Menekankan keterpaduan sikap, pengetahuan, dan keterampilan.
9) Mengembangkan kemampuan berpikir divergen.
10) Menjadi bagian yang tidak terpisahkan dari pembelajaran.
11) Menghendaki balikan yang segera dan terus menerus.
12) Menekankan konteks yang mencerminkan dunia nyata.
13) Terkait dengan dunia kerja.
14) Menggunakan data yang diperoleh langsung dari dunia nyata.
15) Menggunakan berbagai cara dan instrumen.

2. Ruang Lingkup Penilaian, Tingkat Kompetensi dan Ketuntasan Belajar

Penilaian hasil belajar peserta didik mencakup kompetensi sikap, pengetahuan, dan keterampilan yang dilakukan secara berimbang sehingga dapat digunakan untuk menentukan posisi relatif setiap peserta didik terhadap standar yang telah ditetapkan. Cakupan penilaian merujuk pada ruang lingkup materi, kompetensi mata pelajaran, dan proses.

1) Sasaran penilaian hasil belajar oleh pendidik terhadap kompetensi sikap spiritual dan kompetensi sikap sosial meliputi tingkatan sikap: menerima, menanggapi, menghargai, menghayati, dan mengamalkan nilai spiritual dan nilai sosial.
2) Sasaran penilaian hasil belajar oleh pendidik pada kemampuan berpikir meliputi: mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi, dan mencipta.
3) Sasaran penilaian hasil belajar oleh pendidik pada dimensi pengetahuan meliputi: pengetahuan faktual, pengetahuan konseptual, pengetahuan prosedural, dan pengetahuan metakognitif.
4) Sasaran penilaian hasil belajar oleh pendidik pada keterampilan abstrak mencakup: mengamati, menanya, mengumpulkan informasi, menalar, dan mengomunikasikan.

5) Sasaran penilaian hasil belajar oleh pendidik pada keterampilan konkret mencakup: persepsi, kesiapan, meniru, membiasakan gerakan mahir, menjadi gerakan alami, menjadi tindakan orisinil.

Tingkat kompetensi merupakan batas minimal pencapaian kompetensi sikap, pengetahuan, dan keterampilan. Pencapaian kompetensi sikap dinyatakan dalam deskripsi kualitas tertentu, pencapaian kompetensi pengetahuan dinyatakan dalam skor tertentu untuk kemampuan berpikir dan dimensi pengetahuannya, dan untuk kompetensi keterampilan dinyatakan dalam deskripsi kemahiran dan/atau skor tertentu. Pencapaian tingkat kompetensi dinyatakan dalam bentuk deskripsi kemampuan dan/atau skor yang dipersyaratkan pada tingkat tertentu.

Acuan dalam penilaian menggunakan Penilain Acuan Kriteria (PAK) yang merupakan penilaian kemajuan peserta didik dibandingkan dengan kriteria capaian kompetensi yang ditetapkan. Skor yang diperoleh peserta didik dari hasil suatu penilaian baik yang formatif maupun sumatif tidak dibandingkan dengan skor peserta didik lainnya namun dibandingkan dengan penguasaan kompetensi yang dipersyaratkan.

PAK merupakan penilaian pencapaian kompetensi yang didasarkan pada kriteria ketuntasan minimal (KKM). KKM merupakan kriteria ketuntasan belajar minimal yang ditentukan oleh satuan pendidikan dengan mempertimbangkan karakteristik Kompetensi Dasar yang akan dicapai, daya dukung, dan karakteristik peserta didik. Sejalan dengan ini maka guru didorong untuk menerapkan prinsip-prinsip pembelajaran tuntas (mastery learning) serta tidak berorientasi pada pencapaian target kurikulum semata.

Ketuntasan belajar meliputi tingkat minimal pencapaian kompetensi sikap, pengetahuan, dan keterampilan yang meliputi ketuntasan penguasaan substansi dan ketuntasan belajar dalam konteks kurun waktu belajar.

1) Ketuntasan penguasaan substansi merupakan ketuntasan belajar peserta didik untuk setiap kompetensi dasar yang ditetapkan.

2) Ketuntasan belajar dalam konteks kurun waktu belajar terdiri atas ketuntasan belajar dalam setiap semester dan setiap tahun pelajaran. Ketuntasan belajar dalam setiap semester merupakan keberhasilan peserta didik

menguasai kompetensi dari setiap muatan pembelajaran yang diselesaikan dalam satu semester. Sedangkan ketuntasan belajar dalam setiap tahun pelajaran merupakan keberhasilan peserta didik menguasai kompetensi dari setiap muatan pembelajaran pada semester ganjil dan genap dalam satu tahun pelajaran untuk menentukan kenaikan kelas.

Penilaian hasil belajar oleh pendidik menggunakan skala penilaian. Penilaian hasil belajar oleh pendidik dilakukan terhadap penguasaan tingkat kompetensi sebagai capaian pembelajaran yang merupakan batas minimal pencapaian kompetensi sikap, kompetensi pengetahuan, dan kompetensi keterampilan.

Kompetensi sikap dinyatakan dalam deskripsi kualitas berdasarkan modus. Kompetensi pengetahuan untuk kemampuan berpikir pada berbagai tingkat pengetahuan dinyatakan dalam predikat berdasarkan skor rerata. Kompetensi keterampilan dinyatakan dalam deskripsi kemahiran berdasarkan rerata dari capaian optimum. Penguasaan tingkat kompetensi dinyatakan dalam bentuk deskripsi kemampuan dan/atau skor yang dipersyaratkan pada tingkat tertentu.

D. Aktifitas Pembelajaran

Kegiatan 1

Diskusikan dalam kelompok kecil.

Jelaskan apa yang Anda ketahui tentang konsep penilaian autentik!

Jawab:

Kegiatan 2

Diskusikan dalam kelompok kecil.

Penilaian hasil belajar peserta didik pada jenjang pendidikan dasar dan menengah didasarkan pada prinsip umum dan prinsip khusus. Uraikan masing-masing prinsip tersebut!

Jawab:

Kegiatan 3

Diskusikan dalam kelompok kecil.

Cakupan penilaian merujuk pada ruang lingkup materi, kompetensi mata pelajaran, dan proses. Jelaskan sasaran penilaian hasil belajar oleh pendidik terhadap kompetensi sikap, pengetahuan, dan keterampilan!

Jawab:

Kegiatan 4

Diskusikan dalam kelompok kecil.

Acuan dalam penilaian menggunakan Penilain Acuan Kriteria (PAK). Apa yang Anda ketahui tentang PAK?

Jawab:

Kegiatan 5

Diskusikan dalam kelompok kecil.

Ketuntasan belajar meliputi tingkat minimal pencapaian kompetensi sikap, pengetahuan, dan keterampilan yang meliputi ketuntasan penguasaan substansi dan ketuntasan belajar dalam konteks kurun waktu belajar. Jelaskan kedua jenis ketuntasan ini!

Jawab:

E. Latihan/Kasus/Tugas

Latihan

Pilihlah dengan memberi tanda silang (X) pada jawaban yang Anda anggap benar!

1. Berikut ini adalah konsep tentang penilaian autentik yang tepat.
   a. Penilaian autentik menilai kesiapan *(input)* peserta didik, dan hasil belajar *(output)* secara utuh
   b. Penilaian autentik lebih menekankan pada dampak pengiring *(nurturant effects)* dari pembelajaran
   c. Penilaian autentik cenderung fokus pada tugas-tugas rutin atau kontekstual
   d. Penilaian autentik lebih menekankan mengukur apa yang dapat dilakukan oleh peserta didik
2. Penilaian hasil belajar peserta didik pada jenjang pendidikan dasar dan menengah didasarkan pada prinsip umum dan prinsip khusus. Berikut ini yang **bukan** termasuk prinsip umum penilaian adalah ... .
   a. Terpadu
   b. Transparan
   c. Memotivasi belajar peserta didik
   d. Menyeluruh dan berkesinambungan
3. Kompetensi sikap dinyatakan dalam deskripsi kualitas berdasarkan... .
   a. modus
   b. capaian optimum
   c. skor rerata *(mean)*
   d. rerata dari capaian optimum
4. Kriteria yang menunjukkan kinerja dan aspek-aspek atau konsep-konsep yang akan dinilai, dan gradasi mutu, mulai dari tingkat yang paling sempurna sampai yang paling rendah. Ini adalah bagian dari penilaian yang dinamakan ... .
   a. instrumen penilaian kinerja
   b. instrumen penilaian tes lisan
   c. pedoman penilaian tes tulis
   d. rubrik penilaian non tes

5. Berikut merupakan kriteria ketuntasan belajar pada Kompetensi Dasar "Mendekripsikan konsep fungsi dan menerapkan operasi aljabar (penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian) pada fungsi", **kecuali** ...
   a. Menyelesaikan pembagian dua fungsi f dan g dengan domain $D_{f/g} = D_f \cap D_g$
   b. Menyelesaikan penjumlahan dua fungsi f dan g dengan domain $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
   c. Menyelesaikan pengurangan dua fungsi f dan g dengan domain $D_{f-g} = D_f \cap D_g$
   d. Menyelesaikan perkalian dua fungsi f dan g dengan domain $D_{f\times g} = D_f \cap D_g$
6. Rumusan KD sebagai berikut:
   "Merumuskan dan menganalisis aturan Sinus dan Kosinus serta menerapkannya dalam menentukan luas daerah segitiga". Rumusan indikator pencapaian kompetensi yang **tidak tepat** adalah ...
   a. Menentukan luas segitiga jika besar ketiga sudut segitiga diketahui
   b. Menentukan panjang salah satu sisi segitiga jika diketahui panjang dua sisi yang lain dan sudut yang berhadapan dengan salah satu sisi yang diketahui
   c. Menentukan besar salah satu sudut dalam segitiga jika diketahui panjang dua sisi segitiga dan sudut yang diapit kedua sisi tersebut
   d. Menentukan luas segitiga luas segitiga jika diketahui panjang dua sisi dan sudut yang diapit kedua sisi tersebut
7. Berikut merupakan kriteria ketuntasan belajar pada KD "Penguasaan konsep system persamaan dan pertidaksamaan serta penerapannya dalam pemecahan masalah.", **kecuali** ...
   a. Menentukan nilai minimum dan maksimum fungsi
   b. Menentukan daerah penyelesaian sitem pertidaksamaan
   c. Menyelesaikan sistem persamaan linier dua variabel
   d. Menyusun model matematika dari masalah sehari-hari terkait dengan sistem persamaan linier.

F. Rangkuman

1. Penilaian autentik merupakan pendekatan, prosedur, dan instrumen penilaian proses dan capaian pembelajaran peserta didik dalam penerapan sikap spiritual dan sikap sosial, penguasaan pengetahuan, dan penguasaan keterampilan yang

diperolehnya dalam bentuk pelaksanaan tugas perilaku nyata atau perilaku dengan tingkat kemiripan dengan dunia nyata, atau kemandirian belajar.

2. Penilaian hasil belajar peserta didik pada jenjang pendidikan dasar dan menengah didasarkan pada prinsip umum dan prinsip khusus.
3. Penilaian hasil belajar peserta didik mencakup kompetensi sikap, pengetahuan, dan keterampilan yang dilakukan secara berimbang sehingga dapat digunakan untuk menentukan posisi relatif setiap peserta didik terhadap standar yang telah ditetapkan. Cakupan penilaian merujuk pada ruang lingkup materi, kompetensi mata pelajaran, dan proses.
4. Tingkat kompetensi merupakan batas minimal pencapaian kompetensi sikap, pengetahuan, dan keterampilan.
5. Kriteria ketuntasan minimal (KKM) merupakan kriteria ketuntasan belajar minimal yang ditentukan oleh satuan pendidikan dengan mempertimbangkan karakteristik KD yang akan dicapai, daya dukung, dan karakteristik peserta didik.
6. Ketuntasan belajar meliputi tingkat minimal pencapaian kompetensi sikap, pengetahuan, dan keterampilan yang meliputi ketuntasan penguasaan substansi dan ketuntasan belajar dalam konteks kurun waktu belajar.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah jawaban Anda dengan kunci jawaban yang terdapat pada bagian akhir Kegiatan Pembelajaran ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian gunakan rumus berikut ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda dalam Kegiatan Pembelajaran ini.

Rumus:

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban yang benar}}{\text{Jumlah soal}} \text{x } 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90 – 100	=	Baik sekali
80 – 89	=	Baik
70 – 79	=	Cukup
< 70	=	kurang

Jika tingkat penguasaan Anda minimal 80%, maka Anda dinyatakan berhasil dengan baik. Anda dapat melanjutkan untuk mengerjakan soal evaluasi. Sebaliknya, bila tingkat penguasaan Anda kurang dari 80%, silakan pelajari kembali uraian yang terdapat dalam Kegiatan Pembelajaran ini, khususnya bagian yang belum Anda kuasai.

H. Kunci Jawaban

1. d 2. c 3. a 4. d 5. a 6. a 7. a

Kegiatan Pembelajaran (KB) 2:

Pengembangan Instrumen Penilaian

A. Tujuan

Melalui kegiatan pembelajaran ini, diharapkan dapat meningkatkan wawasan dan kompetensi guru serta mampu menggunakan teknik-teknik penilaian, dan mengembangkan instrumen penilaian sesuai dengan teknik penilaian untuk setiap dimensi kompetensi.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah mengikuti pembelajaran modul ini, peserta diharapkan dapat:

1. menggunakan teknik-teknik penilaian untuk setiap dimensi kompetensi;
2. mengembangkan instrumen penilaian sesuai dengan teknik penilaian untuk setiap dimensi kompetensi;
3. mengembangkan penilaian pada RPP.

C. Uraian Materi

1. Pengembangan Instrumental

Teknik dan instrumen yang digunakan untuk penilaian kompetensi sikap, pengetahuan, dan keterampilan memiliki karakteristik yang berbeda antara yang satu dengan yang lainnya. Instrumen penilaian harus memenuhi persyaratan substansi/materi, konstruksi dan bahasa. Persyaratan substansi merepresentasikan kompetensi yang dinilai; persyaratan konstruksi memenuhi persyaratan teknis sesuai dengan bentuk instrumen yang digunakan, dan persyaratan bahasa adalah penggunaan bahasa yang baik dan benar serta komunikatif sesuai dengan tingkat perkembangan peserta didik. Secara rinci teknik-teknik dan pengembangan instrumen penilaian pada masing-masing kompetensi diuraikan sebagai berikut.

a. **Penilaian kompetensi sikap**

Sikap bermula dari perasaan (suka atau tidak suka) yang terkait dengan kecenderungan seseorang dalam merespons sesuatu/objek. Sikap juga sebagai ekspresi dan dari nilai-nilai atau pandangan hidup yang dimiliki oleh seseorang.

Sikap dalam mata pelajaran berkaitan dengan nilai atau norma yang berhubungan dengan materi pembelajaran. Secara umum, objek sikap yang perlu dinilai dalam mata pelajaran adalah sikap terhadap: materi pelajaran, pendidik/pengajar, dan proses pembelajaran.

Sikap terdiri atas tiga komponen, yakni: afektif, kognitif, dan konatif/ perilaku. Komponen afektif adalah perasaan yang dimiliki oleh seseorang atau penilaiannya terhadap sesuatu objek. Komponen kognitif adalah kepercayaan atau keyakinan seseorang mengenai objek. Komponen konatif adalah kecenderungan untuk berperilaku atau berbuat dengan caracara tertentu berkenaan dengan kehadiran objek sikap.

Penilaian sikap adalah penilaian terhadap kecenderungan perilaku siswa sebagai hasil pendidikan, baik di dalam kelas maupun di luar kelas. Penilaian sikap memiliki karakteristik yang berbeda dengan penilaian pengetahuan dan keterampilan, sehingga teknik penilaian yang digunakan juga berbeda. Dalam hal ini, penilaian sikap ditujukan untuk mengetahui capaian dan membina perilaku serta budi pekerti siswa sesuai butir-butir sikap dalam Kompetensi Dasar KD pada Kompetensi Inti KI-1 dan KI-2.

Pendidik melakukan penilaian kompetensi sikap melalui observasi, penilaian diri (*self assessment*), penilaian teman sejawat/ antar peserta didik (*peer assessment*), dan jurnal. Instrumen yang digunakan untuk observasi, penilaian diri, dan penilaian antarpeserta didik adalah lembar pengamatan berupa daftar cek (*checklist*) atau skala penilaian (*rating scale*) yang disertai rubrik, sedangkan pada jurnal berupa catatan pendidik.

Rubrik adalah daftar kriteria yang menunjukkan kinerja dan aspek-aspek atau konsep-konsep yang akan dinilai, dan gradasi mutu, mulai dari tingkat yang paling sempurna sampai yang paling rendah. Kriteria rubrik sebagai berikut.

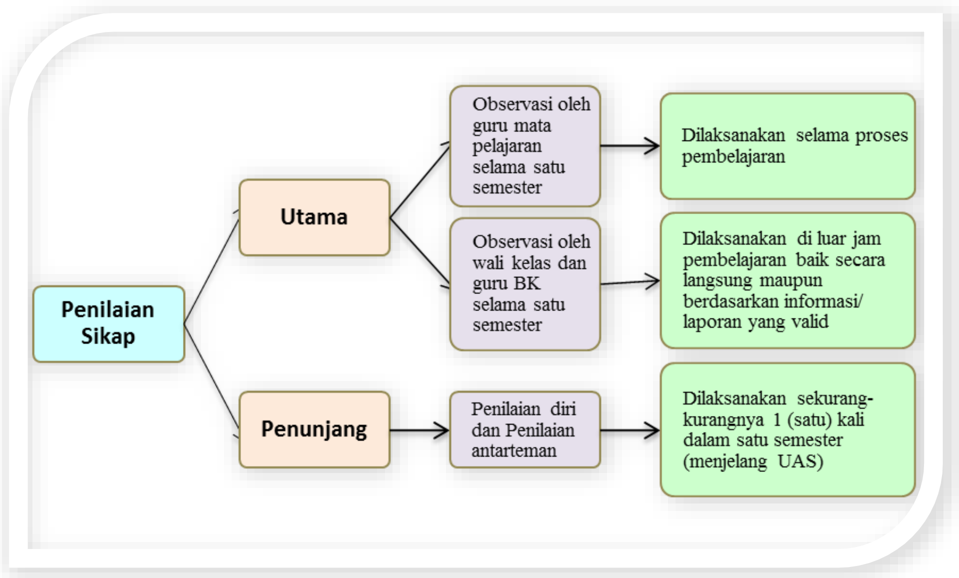
- Sederhana/mencakup aspek paling esensial untuk dinilai.
- Praktis/mudah digunakan.

- Menilai dengan efektif aspek yang akan diukur.
- Dapat digunakan untuk penilaian proses dan tugas sehari-hari
- Peserta didik dapat mempelajari rubrik & mengecek hasil penilaiannya.

Rubrik kunci adalah rubrik sederhana berisi seperangkat kriteria yang menunjukkan indikator esensial paling penting yang dapat menggambarkan capaian kompetensi peserta didik.

Penilaian sikap terutama dilakukan oleh guru mata pelajaran, guru bimbingan konseling (BK), dan wali kelas, melalui observasi yang dicatat dalam jurnal berupa catatan anekdot (*anecdotal record*) dan catatan kejadian tertentu (*incidental record*).

Rangkuman hasil penilaian sikap oleh guru mata pelajaran dan guru BK selama satu semester dikumpulkan kepada wali kelas, kemudian wali kelas menggabungkan dan merangkum dalam bentuk deskripsi yang akan diisikan ke dalam rapor setiap siswa di kelasnya. Skema penilaian sikap dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 1. Skema penilaian sikap

Berikut ini adalah penjelasan Gambar 1 di atas.

1) Observasi

Observasi merupakan teknik penilaian yang dilakukan secara berkesinambungan dengan menggunakan indera, baik secara langsung maupun tidak langsung dengan menggunakan pedoman observasi yang berisi sejumlah indikator perilaku yang diamati.

Pengamatan terhadap sikap dan perilaku yang terkait dengan mata pelajaran dilakukan oleh pendidik selama proses pembelajaran berlangsung, seperti: ketekunan belajar, percaya diri, rasa ingin tahu, kerajinan, kerjasama, kejujuran, disiplin, peduli lingkungan, dan selama peserta didik berada di sekolah atau bahkan di luar sekolah selama perilakunya dapat diamati pendidik.

Kriteria instrumen observasi.

- Mengukur aspek sikap yang dituntut pada Kompetensi Inti dan Kompetensi Dasar
- Sesuai dengan kompetensi yang akan diukur
- Memuat indikator sikap yang dapat diobservasi
- Mudah atau feasible untuk digunakan
- Dapat merekam sikap peserta didik

2) Penilaian Diri

Penilaian diri merupakan teknik penilaian dengan cara meminta peserta didik untuk mengemukakan kelebihan dan kekurangan dirinya dalam konteks pencapaian kompetensi. Penilaian diri digunakan untuk memberikan penguatan (*reinforcement*) terhadap kemajuan proses belajar peserta didik.

Instrumen yang digunakan berupa lembar penilaian diri. Penggunaan teknik ini dapat memberi dampak positif terhadap perkembangan kepribadian seseorang. Keuntungan penggunaan teknik penilaian diri dalam penilaian di kelas sebagai berikut:

- dapat menumbuhkan rasa percaya diri peserta didik, karena mereka diberi kepercayaan untuk menilai dirinya sendiri;
- peserta didik menyadari kekuatan dan kelemahan dirinya, karena ketika mereka melakukan penilaian, harus melakukan introspeksi terhadap kekuatan dan kelemahan yang dimilikinya;

- dapat mendorong, membiasakan, dan melatih peserta didik untuk berbuat jujur, karena mereka dituntut untuk jujur dan objektif dalam melakukan penilaian.

Instrumen penilaian diri perlu dirumuskan secara sederhana, namun jelas dan tidak bermakna ganda, dengan bahasa lugas dan dapat dipahami peserta didik, menggunakan format sederhana yang mudah diisi peserta didik, menunjukkan kemampuan peserta didik dalam situasi yang nyata/ sebenarnya, bermakna, dan mengarahkan peserta didik untuk memahami kemampuannya (kekuatan atau kelemahannya). Hal ini untuk menghilangkan kecenderungan peserta didik menilai diri terlalu tinggi dan subyektif.

Untuk itu penilaian diri oleh peserta didik di kelas perlu dilakukan melalui langkah-langkah sebagai berikut.

a) Menjelaskan kepada peserta didik tujuan penilaian diri.
b) Menentukan kompetensi yang akan dinilai.
c) Menentukan kriteria penilaian yang akan digunakan.
d) Merumuskan format penilaian, dapat berupa daftar cek, atau skala penilaian.

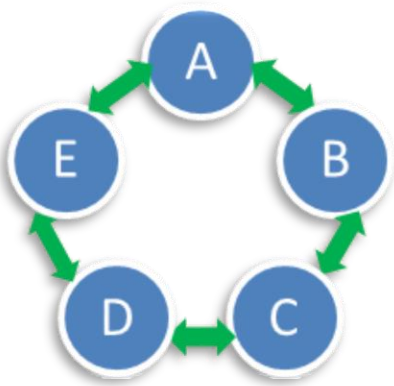
3) Penilaian antar peserta didik/ teman sebaya

Penilaian antar peserta didik merupakan teknik penilaian dengan cara meminta peserta didik untuk saling menilai temannya terkait dengan pencapaian kompetensi. Instrumen yang digunakan berupa lembar penilaian antarpeserta didik.

Kriteria instrumen penilaian antar peserta didik:

- sesuai dengan kompetensi dan indikator yang akan diukur;
- indikator dapat dilakukan melalui pengamatan peserta didik;
- kriteria penilaian dirumuskan secara sederhana, namun jelas dan tidak berpotensi munculnya penafsiran makna ganda/ berbeda;
- menggunakan bahasa lugas yang dapat dipahami peserta didik;
- menggunakan format sederhana dan mudah digunakan oleh peserta didik;
- indikator menunjukkan sikap peserta didik dalam situasi yang nyata atau sebenarnya dan dapat diukur.

Penilaian antar peserta didik paling cocok dilakukan pada saat siswa mengerjakan kegiatan kelompok. Misalnya setiap siswa diminta melakukan pengamatan/penilaian terhadap dua orang temannya, dan dia juga akan dinilai oleh dua orang teman dalam kelompoknya, sebagaimana diagram pada gambar berikut.



Gambar 2. Diagram penilaian antar peserta didik

Diagram di atas menggambarkan saling menilai sikap/perilaku antar teman.

- Siswa A mengamati dan menilai B dan E; A juga dinilai oleh B dan E
- Siswa B mengamati dan menilai A dan C; B juga dinilai oleh A dan C
- Siswa C mengamati dan menilai B dan D; C juga dinilai oleh B dan D
- Siswa D mengamati dan menilai C dan E; D juga dinilai oleh C dan E
- Siswa E mengamati dan menilai D dan A; E juga dinilai oleh D dan A

4) Penilaian Jurnal

Jurnal merupakan kumpulan rekaman atau catatan pendidik terhadap sikap peserta didik di dalam dan di luar kelas, yang berisi informasi hasil pengamatan tentang kekuatan dan kelemahan peserta didik yang berkaitan dengan sikap dan perilaku. Jurnal dapat memuat penilaian terhadap peserta didik pada aspek tertentu secara kronologis.

Kriteria jurnal.

- Mengukur capaian kompetensi sikap yang penting.
- Sesuai dengan kompetensi dasar dan indikator.
- Menggunakan format yang sederhana dan mudah diisi/digunakan.

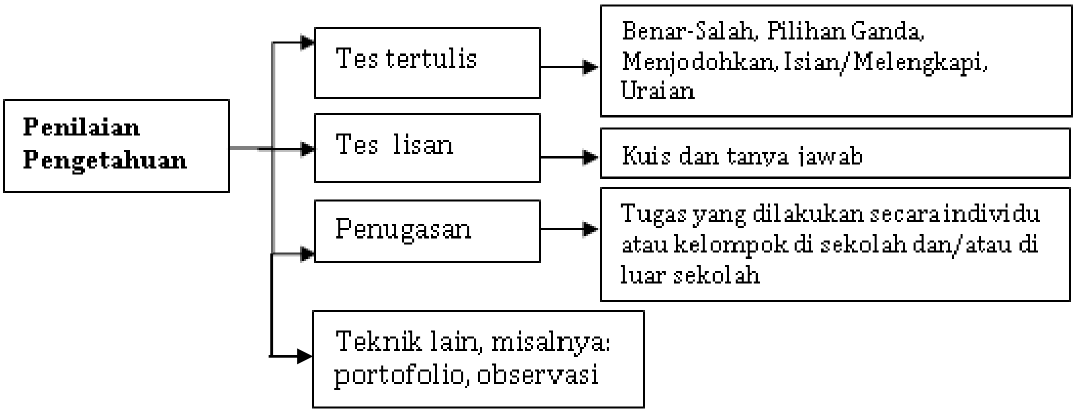
- Dapat dibuat rekapitulasi tampilan sikap peserta didik secara kronologis.
- Memungkinkan untuk dilakukan pencatatan yang sistematis, jelas dan komunikatif.
- Format pencatatan memudahkan dalam pemaknaan terhadap tampilan sikap peserta didik.
- Menuntun pendidik untuk mengidentifikasi kelemahan dan kekuatan peserta didik.

b. Penilaian Kompetensi Pengetahuan

Penilaian pengetahuan merupakan penilaian untuk mengukur kemampuan siswa yang meliputi pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif serta kecakapan berpikir tingkat rendah hingga tinggi. Penilaian ini berkaitan dengan ketercapaian Kompetensi Dasar pada KI-3 yang dilakukan oleh guru mata pelajaran. Penilaian pengetahuan dilakukan dengan berbagai teknik penilaian. Guru memilih teknik penilaian yang sesuai dengan karakteristik kompetensi yang akan dinilai. Penilaian dimulai dengan perencanaan yang dilakukan pada saat menyusun rencana pelaksanaan pembelajaran (RPP) yang mengacu pada silabus.

Penilaian pengetahuan, selain untuk mengetahui apakah siswa telah mencapai ketuntasan belajar (*mastery learning*), juga untuk mengidentifikasi kelemahan dan kekuatan penguasaan pengetahuan siswa dalam proses pembelajaran (*diagnostic*). Untuk itu, pemberian umpan balik (*feedback*) kepada siswa dan guru merupakan hal yang sangat penting, sehingga hasil penilaian dapat segera digunakan untuk perbaikan mutu pembelajaran.

Berbagai teknik penilaian pada kompetensi pengetahuan dapat digunakan sesuai dengan karakteristik masing-masing KD. Teknik yang biasa digunakan adalah tes tertulis, tes lisan, dan penugasan. Namun tidak menutup kemungkinan digunakan teknik lain yang sesuai, misalnya portofolio dan observasi. Skema penilaian pengetahuan dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3. Skema penilaian pengetahuan

Berikut ini adalah penjelasan dari skema pada gambar di atas.

1) Tes tertulis

Tes tertulis merupakan seperangkat pertanyaan atau tugas dalam bentuk tulisan yang direncanakan untuk mengukur atau memperoleh informasi tentang kemampuan peserta tes. Tes tertulis menuntut adanya respon dari peserta tes yang dapat dijadikan sebagai representasi dari kemampuan yang dimilikinya.

Soal tes tertulis yang menjadi penilaian autentik adalah soal-soal yang menghendaki peserta didik merumuskan jawabannya sendiri, seperti soal-soal uraian. Soal-soal uraian menghendaki peserta didik mengemukakan atau mengekspresikan gagasannya dalam bentuk uraian tertulis dengan menggunakan kata-katanya sendiri, misalnya mengemukakan pendapat, berpikir logis, dan menyimpulkan.

Instrumen tes tertulis dapat berupa soal pilihan ganda, isian, jawaban singkat, benar-salah, menjodohkan, dan uraian. Instrumen uraian dilengkapi pedoman penskoran. Bentuk soal yang sering digunakan di SMA adalah pilihan ganda dan uraian.

Butir soal pilihan ganda terdiri atas pokok soal (stem) dan pilihan jawaban (*option*). Untuk tingkat SMA biasanya digunakan 5 (lima) pilihan jawaban. Dari kelima pilihan jawaban tersebut, salah satu adalah kunci (*key*) yaitu jawaban yang benar atau paling tepat, dan lainnya disebut pengecoh (*distractor*).

Sebelum mengembangkan butir soal perlu dibuat kisi-kisi yang antara lain memuat indikator soal yang mengacu pada ketercapaian kompetensi dasar. Indikator merupakan karakteristik, ciri-ciri/ tanda-tanda, perbuatan, atau respons, yang harus dilakukan atau ditampilkan oleh peserta didik, untuk menunjukkan bahwa peserta didik telah memiliki kompetensi yang diharapkan.

Dalam mengembangkan butir soal perlu memperhatikan kaidah penulisan butir soal yang meliputi substansi/ materi, konstruksi, dan bahasa. Kaidah penulisan soal bentuk pilihan ganda sebagai berikut.

- Substansi/ Materi
  a) Soal sesuai dengan indikator (menuntut tes bentuk PG).
  b) Materi yang diukur sesuai dengan kompetensi (UKRK: Urgensi, Keberlanjutan, Relevansi, dan Keterpakaian).
  c) Pilihan jawaban homogen dan logis.
  d) Hanya ada satu kunci jawaban yang tepat.
- Konstruksi
  a) Pokok soal dirumuskan dengan singkat, jelas, dan tegas.
  b) Rumusan pokok soal dan pilihan jawaban merupakan pernyataan yang diperlukan saja.
  c) Pokok soal tidak memberi petunjuk kunci jawaban.
  d) Pokok soal tidak menggunakan pernyataan negatif ganda.
  e) Gambar/ grafik/ tabel/ diagram dan sebagainya jelas dan berfungsi.
  f) Panjang rumusan pilihan jawaban relatif sama.
  g) Pilihan jawaban tidak menggunakan pernyataan "semua jawaban benar” atau “semua jawaban salah”.
  h) Pilihan jawaban yang berbentuk angka atau waktu disusun berdasarkan besar kecilnya angka atau kronologis kejadian.
  i) Butir soal tidak bergantung pada jawaban soal sebelumnya.
- Bahasa
  a) Menggunakan bahasa yang sesuai dengan kaidah Bahasa Indonesia.
  b) Menggunakan bahasa yang komunikatif.
  c) Pilihan jawaban tidak mengulang kata/kelompok kata yang sama, kecuali merupakan satu kesatuan pengertian.

d) Tidak menggunakan bahasa yang berlaku setempat/ tabu.

Tes tulis bentuk uraian atau esai menuntut peserta didik untuk mengorganisasikan dan menuliskan jawabannya dengan kalimatnya sendiri. Jawaban tersebut melibatkan kemampuan mengingat, memahami, mengorganisasikan, menerapkan, menganalisis, mensintesis, mengevaluasi, dan sebagainya atas materi yang sudah dipelajari. Tes tulis berbentuk uraian sebisa mungkin bersifat komprehensif, sehingga mampu menggambarkan ranah sikap, pengetahuan, dan keterampilan peserta didik.

Kaidah penulisan soal bentuk uraian sebagai berikut.

- Substansi/Materi
  a) Soal sesuai dengan indikator (menuntut tes bentuk uraian)
  b) Batasan pertanyaan dan jawaban yang diharapkan sesuai
  c) Materi yang diukur sesuai dengan kompetensi (UKRK)
  d) Isi materi yang ditanyakan sesuai dengan jenjang, jenis sekolah, dan tingkat kelas
- Konstruksi
  a) Ada petunjuk yang jelas mengenai cara mengerjakan soal
  b) Rumusan kalimat soal/pertanyaan menggunakan kata tanya atau perintah yang menuntut jawaban terurai
  c) Gambar/ grafik/ tabel/ diagram dan sebagainya jelas dan berfungsi
  d) Ada pedoman penskoran
- Bahasa
  a) Rumusan kalimat soal/ pertanyaan komunikatif
  b) Butir soal menggunakan bahasa Indonesia yang baku
  c) Tidak mengandung kata-kata/ kalimat yang menimbulkan penafsiran ganda atau salah pengertian
  d) Tidak mengandung kata yang menyinggung perasaan
  e) Tidak menggunakan bahasa yang berlaku setempat/ tabu

2) Tes lisan

Tes lisan merupakan pemberian soal/pertanyaan yang menuntut siswa menjawabnya secara lisan, dan dapat diberikan secara klasikal pada waktu pembelajaran. Jawaban siswa dapat berupa kata, frase, kalimat maupun paragraf. Tes lisan menumbuhkan sikap siswa untuk berani berpendapat.

Kriteria instrumen tes lisan adalah sebagai berikut.

- Tes lisan dapat digunakan jika sesuai dengan kompetensi pada taraf pengetahuan yang hendak dinilai.
- Pertanyaan tidak boleh keluar dari bahan ajar yang ada.
- Pertanyaan diharapkan dapat mendorong peserta didik mengonstruksi jawabannya sendiri.
- Disusun dari pertanyaan yang sederhana ke pertanyaan yang komplek.

3) Penugasan

Penugasan adalah pemberian tugas kepada siswa untuk mengukur dan/ atau meningkatkan pengetahuan. Penugasan yang digunakan untuk mengukur kompetensi pengetahuan *(assessment of learning)* dapat dilakukan setelah proses pembelajaran sedangkan penugasan yang digunakan untuk meningkatkan pengetahuan *(assessment for learning)* diberikan sebelum dan/ atau selama proses pembelajaran. Penugasan dapat berupa pekerjaan rumah dan/ atau proyek yang dikerjakan secara individu atau kelompok sesuai dengan karakteristik tugas. Penugasan lebih ditekankan pada pemecahan masalah dan tugas produktif lainnya.

Kriteria instrumen penugasan adalah sebagai berikut.

- Tugas mengarah pada pencapaian indikator hasil belajar.
- Tugas dapat dikerjakan oleh peserta didik.
- Tugas dapat dikerjakan selama proses pembelajaran atau merupakan bagian dari pembelajaran mandiri.
- Pemberian tugas disesuaikan dengan taraf perkembangan peserta didik.
- Materi penugasan harus sesuai dengan cakupan kurikulum.
- Penugasan ditujukan untuk memberikan kesempatan kepada peserta didik menunjukkan kompetensi individualnya meskipun tugas diberikan secara kelompok.

- Untuk tugas kelompok, perlu dijelaskan rincian tugas setiap anggota kelompok.
- Tampilan kualitas hasil tugas yang diharapkan disampaikan secara jelas.
- Penugasan harus mencantumkan rentang waktu pengerjaan tugas.

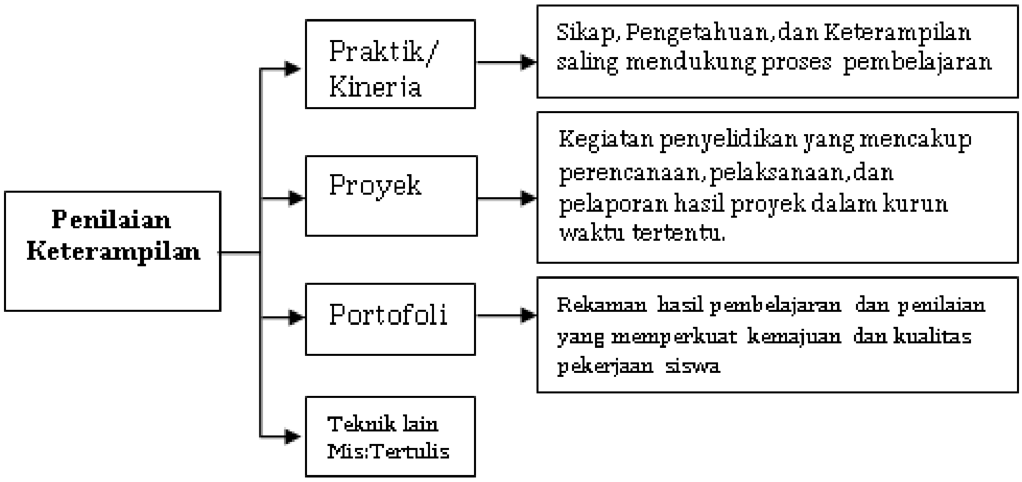
4) Observasi

Observasi bukan hanya instrumen untuk menilai sikap namun penilaian terhadap pengetahuan peserta didik dapat dilakukan juga melalui observasi terhadap diskusi, tanya jawab, dan percakapan. Teknik ini adalah cerminan dari penilaian autentik.

c. Penilaian Kompetensi Keterampilan

Penilaian keterampilan adalah penilaian untuk mengukur pencapaian kompetensi siswa terhadap kompetensi dasar pada KI-4. Penilaian keterampilan menuntut siswa mendemonstrasikan suatu kompetensi tertentu. Penilaian ini dimaksudkan untuk mengetahui apakah pengetahuan yang sudah dikuasai siswa dapat digunakan untuk mengenal dan menyelesaikan masalah dalam kehidupan sesungguhnya *(real life).*

Kompetensi keterampilan terdiri atas keterampilan abstrak dan keterampilan konkret. Penilaian keterampilan dapat dilakukan dengan berbagai teknik antara lain penilaian praktik/kinerja, proyek, dan portofolio. Teknik penilaian lain dapat digunakan sesuai dengan karakteristik KD pada KI-4 pada mata pelajaran yang akan diukur. Instrumen yang digunakan berupa daftar cek atau skala penilaian (*rating scale*) yang dilengkapi rubrik. Skema penilaian keterampilan dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 4. Skema penilaian keterampilan

Penjelasan gambar di atas sebagai berikut.

1) Penilaian Tes Praktik

   Adalah penilaian yang menuntut respon berupa keterampilan melakukan suatu aktivitas atau perilaku sesuai dengan tuntutan kompetensi. Hal-hal yang perlu diperhatikan dalam menilai tes praktik adalah sebagai berikut.

   a) Langkah-langkah kinerja yang perlu dilakukan peserta didik untuk menunjukkan kinerja dari suatu kompetensi.
   b) Kelengkapan dan ketepatan aspek yang akan dinilai dalam kinerja tersebut.
   c) Kemampuan-kemampuan khusus yang diperlukan untuk menyelesaikan tugas.
   d) Kemampuan yang akan dinilai tidak terlalu banyak, sehingga dapat diamati.
   e) Kemampuan yang akan dinilai selanjutnya diurutkan berdasarkan langkah-langkah pekerjaan yang akan diamati.

   Pengamatan unjuk kerja/ kinerja/ praktik perlu dilakukan dalam berbagai konteks untuk menetapkan tingkat pencapaian kemampuan tertentu. Misalnya untuk menilai kemampuan berbicara yang beragam dilakukan pengamatan terhadap kegiatan-kegiatan seperti: diskusi dalam kelompok kecil, presentasi, dan wawancara. Dengan demikian, gambaran kemampuan peserta didik akan lebih utuh. Contoh untuk menilai unjuk kerja/kinerja/praktik di laboratorium dilakukan pengamatan terhadap penggunaan alat dan bahan praktikum.

   Kriteria tugas untuk tes praktik adalah sebagai berikut.

a) Tugas mengarahkan peserta didik untuk menunjukkan capaian hasil belajar.
b) Tugas dapat dikerjakan oleh peserta didik.
c) Mencantumkan waktu/ kurun waktu pengerjaan tugas.
d) Sesuai dengan taraf perkembangan peserta didik.
e) Sesuai dengan konten/ cakupan kurikulum.

Kriteria rubrik untuk tes praktik adalah sebagai berikut.

1) Rubrik dapat mengukur target kemampuan yang akan diukur (valid).
2) Rubrik sesuai dengan tujuan pembelajaran.
3) Indikator pada rubrikmenunjukkan kemampuan yang dapat diamati (diobservasi) dan dapat diukur.
4) Rubrik dapat memetakan kemampuan peserta didik.
5) Rubrik menilai aspek-aspek penting pada proyek peserta didik.

2) Penilaian Proyek

Penilaian proyek dapat digunakan untuk mengetahui pemahaman, kemampuan mengaplikasi, kemampuan menyelidiki dan kemampuan menginformasikan suatu hal secara jelas.

Proyek adalah tugas-tugas belajar (*learning tasks*) yang meliputi kegiatan perancangan, pelaksanaan, dan pelaporan secara tertulis maupun lisan dalam waktu tertentu. Penilaian proyek merupakan kegiatan penilaian terhadap suatu tugas yang harus diselesaikan dalam periode/ waktu tertentu. Tugas tersebut berupa suatu investigasi sejak dari perencanaan, pengumpulan data, pengorganisasian, pengolahan dan penyajian data.

Penilaian proyek dapat digunakan untuk mengetahui pemahaman, kemampuan mengaplikasikan, kemampuan penyelidikan dan kemampuan peserta didik menginformasikan matapelajaran tertentu secara jelas. Penilaian proyek umumnya menggunakan metode belajar yang memecahkan masalah sebagai langkah awal dalam pengumpulan dan mengintegrasikan pengetahuan baru berdasarkan pengalamannya dalam beraktifitas secara nyata.

Dalam penilaian proyek setidaknya ada 3 (tiga) hal yang perlu dipertimbangkan yaitu pengelolaan, relevansi, dan keaslian.

- Pengelolaan yaitu kemampuan peserta didik dalam memilih topik, mencari informasi dan mengelola waktu pengumpulan data serta penulisan laporan.
- Relevansi yaitu kesesuaian dengan mata pelajaran dengan mempertimbangkan tahap pengetahuan, pemahaman, dan keterampilan dalam pembelajaran.
- Keaslian yaitu proyek yang dilakukan peserta didik harus merupakan hasil karyanya sendiri dengan mempertimbangkan kontribusi pendidikberupa bimbingan dan dukungan terhadap proyek peserta didik.

3) Penilaian Portofolio

Portofolio merupakan penilaian berkelanjutan yang didasarkan pada kumpulan informasi yang menunjukkan perkembangan kemampuan peserta didik dalam satu periode tertentu. Informasi tersebut dapat berupa karya peserta didik dari proses pembelajaran yang dianggap terbaik oleh peserta didik.

Penilaian portofolio pada dasarnya menilai karya-karya peserta didik secara individu pada satu periode untuk suatu matapelajaran. Pada akhir suatu periode hasil karya tersebut dikumpulkan dan dinilai oleh pendidik bersama peserta didik. Berdasarkan informasi perkembangan tersebut, pendidik dan peserta didik dapat menilai perkembangan kemampuan peserta didik dan terus melakukan perbaikan. Dengan demikian, portofolio dapat memperlihatkan perkembangan kemajuan belajar peserta didik melalui karyanya. Portofolio peserta didik disimpan dalam suatu folder dan diberi tanggal pembuatan sehingga dapat dilihat perkembangan kualitasnya dari waktu ke waktu.

Kriteria tugas pada penilaian portofolio adalah sebagai berikut.

- Tugas sesuai dengan kompetensi dan tujuan pembelajaran yang akan diukur.
- Tugas portofolio memuat aspek: judul, tujuan pembelajaran, ruang lingkup belajar, uraian tugas, dan kriteria penilaian.

- Uraian tugas memuat kegiatan yang melatih peserta didik mengembangkan kompetensi dalam semua aspek (sikap, pengetahuan, dan keterampilan).
- Uraian tugas bersifat terbuka, dalam arti mengakomodasi dihasilkannya portofolio yang beragam isinya.
- Kalimat yang digunakan dalam uraian tugas menggunakan bahasa yang komunikatif dan mudah dilaksanakan.
- Alat dan bahan yang digunakan dalam penyelesaian tugas portofolio tersedia di lingkungan peserta didik dan mudah diperoleh.

Kriteria rubrik untuk portofolio adalah sebagai berikut.

- memuat indikator kunci dari kompetensi dasar yang akan dinilai pencapaiannya dengan portofolio.
- memuat aspek-aspek penilaian yang macamnya relevan dengan isi tugas portofolio.
- memuat kriteria kesempurnaan (tingkat, level) hasil tugas.
- mudah untuk digunakan oleh pendidik dan peserta didik.
- menggunakan bahasa yang lugas dan mudah dipahami.

2. Mengembangkan Penilaian pada RPP.

Penilaian merupakan salah satu komponen dari Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP).

a. Penilaian pencapaian KD peserta didik dilakukan berdasarkan indikator.
b. Penilaian dilakukan dengan menggunakan penilaian autentik dan non autentik, dalam bentuk tertulis maupun lisan, pengamatan kinerja, pengukuran sikap, penilaian hasil karya berupa tugas, projek dan/atau produk, penggunaan portofolio, dan/atau penilaian diri.
c. Penilaian diarahkan untuk mendorong peserta didik menghasilkan karya, maka penyajian portofolio merupakan cara penilaian yang dapat dilakukan untuk jenjang pendidikan dasar dan menengah.
d. Penilaian diarahkan untuk mengukur pencapaian kompetensi.

e. Penilaian menggunakan acuan kriteria, yaitu berdasarkan apa yang bisa dilakukan peserta didik setelah mengikuti proses pembelajaran, dan bukan untuk menentukan posisi seseorang terhadap kelompoknya.
f. Sistem penilaiannya berkelanjutan dalam arti semua indikator ditagih, kemudian hasilnya dianalisis untuk menentukan KD yang telah dimiliki dan yang belum, serta untuk mengetahui kesulitan peserta didik. Hasil penilaian dianalisis untuk menentukan tindak lanjut.
g. Tindak lanjut hasil penilaian berupa perbaikan proses pembelajaran berikutnya, program remedi bagi peserta didik yang pencapaian kompetensinya di bawah ketuntasan, dan program pengayaan bagi peserta didik yang telah memenuhi ketuntasan.
h. Sistem penilaian disesuaikan dengan pengalaman belajar yang ditempuh dalam proses pembelajaran. Misalnya, jika pembelajaran menggunakan pendekatan tugas observasi lapangan maka evaluasi harus diberikan baik pada proses misalnya teknik wawancara, maupun produk berupa hasil melakukan observasi lapangan.

Komponen penilaian di dalam RPP adalah seperti yang nampak pada format RPP di bawah ini:

Format RPP

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN (RPP)

Sekolah : ....
Mata pelajaran : ....
Kelas/Semester : ....
AlokasiWaktu : ....

A. Kompetensi Inti (KI)
B. Kompetensi Dasar
   1. KD pada KI-1
   2. KD pada KI-2
   3. KD pada KI-3
   4. KD pada KI-4
C. Indikator Pencapaian Kompetensi
   1. Indikator KD pada KI-1
   2. Indikator KD pada KI-2
   3. Indikator KD pada KI-3
   4. Indikator KD pada KI-4
D. Materi Pembelajaran (dapat berasal dari buku teks pelajaran dan buku panduan guru, sumber belajar lain berupa muatan lokal, materi kekinian, konteks pembelajaran dari lingkungan sekitar yang dikelompokkan menjadi materi untuk pembelajaran reguler, pengayaan, dan remedial)
E. Kegiatan Pembelajaran
   1. Pertemuan Pertama: (... JP)
      a. KegiatanPendahuluan;
      b. Kegiatan Inti;
         - Mengamati
         - Menanya
         - Mengumpulkan informasi/mencoba
         - Menalar/mengasosiasi
         - Mengomunikasikan

c. Kegiatan Penutup

2. Pertemuan Kedua: (... JP)
   a. Kegiatan Pendahuluan
   b. Kegiatan Inti
      - Mengamati
      - Menanya
      - Mengumpulkan informasi/mencoba
      - Menalar/mengasosiasi
      - Mengomunikasikan
   c. Kegiatan Penutup
3. Pertemuan seterusnya.

F. Penilaian, Pembelajaran Remedial dan Pengayaan
   1. Teknik penilaian
   2. Instrumen penilaian
      a. Pertemuan Pertama
      b. Pertemuan Kedua
      c. Pertemuan seterusnya
   3. Pembelajaran remedial dan pengayaan
   Pembelajaran remedial dilakukan segera setelah kegiatan penilaian.

G. Media/alat, Bahan, dan Sumber Belajar
   1. Media/alat
   2. Bahan
   3. Sumber Belajar

D. Aktifitas Pembelajaran

Kegiatan 1

Diskusikan dalam kelompok kecil.

Penilaian sikap adalah penilaian terhadap kecenderungan perilaku siswa sebagai hasil pendidikan, baik di dalam kelas maupun di luar kelas. Jelaskan teknik dan instrumen yang digunakan untuk penilaian kompetensi sikap tersebut!

Jawab:

Kegiatan 2

Diskusikan dalam kelompok kecil.

Penilaian pengetahuan merupakan penilaian untuk mengukur kemampuan siswa yang meliputi pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif serta kecakapan berpikir tingkat rendah hingga tinggi. Jelaskan teknik dan instrumen yang digunakan untuk penilaian kompetensi pengetahuan ini!

Jawab:

Kegiatan 3

Diskusikan dalam kelompok kecil.

Penilaian keterampilan adalah penilaian untuk mengukur pencapaian kompetensi siswa terhadap kompetensi dasar pada KI-4. Jelaskan teknik dan instrumen yang digunakan untuk penilaian kompetensi keterampilan!

Jawab:

Kegiatan 4

Selesaikan tugas sesuai dengan petunjuk dan format yang tersedia pada LK-1 di Lampiran!

Kegiatan 5

Diskusikan dalam kelompok kecil.

Jelaskan secara umum bagaimana mengembangkan penilaian dalam penyusunan RPP!

Jawab:

E. Latihan/Kasus/Tugas

Latihan

Pilihlah dengan memberi tanda silang (X) pada jawaban yang Anda anggap benar!

1. Berikut ini adalah konsep tentang penilaian autentik yang tepat.
    a. Penilaian autentik menilai kesiapan *(input)* peserta didik, dan hasil belajar *(otput)* secara utuh
    b. Penilaian autentik lebih menekankan pada dampak pengiring *(nurturant effects)* dari pembelajaran
    c. Penilaian autentik cenderung fokus pada tugas-tugas rutin atau kontekstual
    d. Penilaian autentik lebih menekankan mengukur apa yang dapat dilakukan oleh peserta didik
2. Penilaian hasil belajar peserta didik pada jenjang pendidikan dasar dan menengah didasarkan pada prinsip umum dan prinsip khusus. Berikut ini yang **bukan** termasuk prinsip umum penilaian adalah ... .
    a. Terpadu
    b. Transparan
    c. Memotivasi belajar peserta didik
    d. Menyeluruh dan berkesinambungan
3. Berikut ini yang merupakan cakupan sasaran penilaian hasil belajar oleh pendidik pada keterampilan abstrak adalah ... .
    a. menalar
    b. menerapkan
    c. menganalisis
    d. mengevaluasi
4. Berikut ini yang **bukan** merupakan cakupan sasaran penilaian hasil belajar oleh pendidik pada dimensi sikap adalah ... .
    a. menerima
    b. memahami
    c. menanggapi
    d. menghayati
5. Kompetensi sikap dinyatakan dalam deskripsi kualitas berdasarkan... .
    a. modus
    b. capaian optimum
    c. skor rerata *(mean)*
    d. rerata dari capaian optimum

6. Penilaian keterampilan dapat dilakukan dengan berbagai teknik, antara lain teknik berikut ini, **kecuali** ... .
   a. penilaian praktik/kinerja
   b. portofolio
   c. Tes lisan
   d. proyek
7. Kriteria yang menunjukkan kinerja dan aspek-aspek atau konsep-konsep yang akan dinilai, dan gradasi mutu, mulai dari tingkat yang paling sempurna sampai yang paling rendah. Ini adalah bagian dari penilaian yang dinamakan ... .
   a. instrumen penilaian kinerja
   b. instrumen penilaian tes lisan
   c. pedoman penilaian tes tulis
   d. rubrik penilaian non tes
8. Teknik penilaian yang dilakukan secara berkesinambungan dengan menggunakan indera, baik secara langsung maupun tidak langsung dengan menggunakan pedoman yang berisi sejumlah indikator perilaku yang diamati. Ini adalah teknik penilaian ... .
   a. jurnal
   b. proyek
   c. observasi
   d. penugasan
9. Salah satu soal yang dapat digunakan untuk mengukur ketercapaian indikator "Menjelaskan definisi enam perbandingan trigonometri suatu sudut pada segitiga siku-siku" adalah …
   a. Pada segitiga ABC dengan sudut siku-siku B, nyatakan $\sin A$ sebagai perbandingan panjang sisi-sisi segitiga ABC
   b. Pada segitiga ABC dengan siku-siku di B, diketahui panjang $AB=3$ dan $BC=4$. Tentukan nilai $\sin A$
   c. Pada segitiga ABC dengan sudut siku-siku B, diketahui $\sin A = \frac{3}{5}$. Tentukan nilai $\cos A$
   d. Pada segitiga ABC dengan sudut siku-siku B, buktikan bahwa $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

10. Diberikan indikator "Siswa dapat menerapkan rumus sinus dan cosinus jumlah dan selisih dua sudut untuk menyelesaikan soal" Butir soal yang sesuai dengan indikator tersebut adalah ...
    a. "Nilai eksak dari cos 50^0 Cos $190^0 - \sin 50^0 \sin 190^0$ adalah..."
    b. "Diketahui $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ dan α sudut lancip. Nilai dari $\tan\alpha$ adalah ..."
    c. "Diketahui $\tan x = \frac{3}{4}$ dan x di kuadran III. Nilai dari $\cos\frac{x}{2}$ adalah ..."
    d. "Diketahui $\tan\frac{x}{2} = t$, maka nilai $\sin x$ adalah ..."
11. Berikut ini merupakan teknik-teknik penilaian untuk mengukur kompetensi siswa,
    1. Tes tulis
    2. Observasi
    3. Portopolio
    4. Penilaian teman sebaya

    Dari teknik-teknik penilaian di atas, teknik yang tepat untuk mengukur perkembangan sikap kerjasama siswa adalah ...

    a. (2) dan (4)
    b. (1) dan (4)
    c. (1) dan (2)
    d. (2) dan (3)
12. Salah satu soal yang dapat digunakan untuk mengukur ketercapaian indikator "Menentukan nilai fungsi trigonometri di kuadran II" adalah ...
    a. "Jika diketahui nilai $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ dan α sudut lancip, maka nilai $\sin(90^0 + \alpha) = \dots$ "
    b. "Jika diketahui nilai $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ dan α sudut lancip, maka nilai $\sin(90^0 - \alpha) = \dots$ "
    c. "Jika diketahui nilai $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ dan α sudut tumpul, maka nilai $\sin(90^0 + \alpha) = \dots$ "
    d. "Jika diketahui nilai $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ dan α sudut tumpul, maka nilai $\sin(90^0 - \alpha) = \dots$ "
13. Butir soal yang sesuai dengan indikator "Merumuskan persamaan garis singgung yang melalui suatu titik pada lingkaran" adalah ...

a. "Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 100$ di titik $(-6,8)$ adalah ..."
b. "Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ yang tegak lurus terhadap garis yang melalui titik $(-1,4)$ dan $(2,1)$ adalah ..."
c. "tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0$ yang sejajar dengan garis yang melalui titik $(-1,-1)$ dan $(1,3)$ adalah ..."
d. "Tentukan persamaan garis melalui titik $A(2,3)$ dan menyinggung lingkaran $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 25$²

14. Salah satu soal yang dapat digunakan untuk mengukur ketercapaian indikator "Menyelesaikan permasalahan terkait dengan persamaan lingkaran" adalah ...
a. "Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung garis $x + y = 1$ dan berpusat di (0,4)"
b. "Tentukan persaman lingkaran berpusat di $P(a, b)$ berjari-jari r"
c. Tentukan persaman lingkaran yang melalui garis (0,2)
d. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik (0,1), (0,1) dan (3,3)

15. Diberikan indikator "Menentukan persamaan kuadrat baru jika diketahui akar-akarnya berkaitan dengan akar-akar persamaan kuadrat lain". Butir soal yang sesuai dengan indikator tersebt adalah ...
a. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya 3 lebih dari akar-akar $2x^2 - x + 5 = 0$ adalah ...
b. Berikan contoh persamaan kuadrat yang salah satu akarnya dua kali akar yang lain!
c. Persamaan kuadrat $x^2 + px + 6 = 0$ salah satu akarnya adalah 2. Persamaan kuadrat yang dimaksud adalah ...
d. Berikan contoh persamaan kuadrat yang kedua akarnya berbeda!

Tugas

1. Berdasarkan indikator pencapaian kompetensi yang telah rumuskan pada LK-1, dan rancangan pembelajaran yang tertuang dalam LK-2, rancanglah intrumen penilaian sikap, pengetahuan dan keterampilan sesuai dengan teknik yang dipilih!
2. Tuangkan hasil diskusi dalam format di LK-3, yang tersedia pada lampiran 3!
3. Gunakan hasil rancangan instrumen penilaian ini untuk melengkapi RPP yang sudah Anda susun pada tugas sebelumnya!

F. Rangkuman

1. Teknik dan instrumen yang digunakan untuk penilaian kompetensi sikap, pengetahuan, dan keterampilan memiliki karakteristik yang berbeda antara yang satu dengan yang lainnya.
2. Penilaian sikap adalah penilaian terhadap kecenderungan perilaku siswa sebagai hasil pendidikan, baik di dalam kelasmaupun di luar kelas.
3. Pendidik melakukan penilaian kompetensi sikap melalui observasi, penilaian diri *(self assessment),* penilaian teman sejawat/ antar peserta didik *(peer assessment)*, dan jurnal.
4. Penilaian pengetahuan merupakan penilaian untuk mengukur kemampuan siswa yang meliputi pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif serta kecakapan berpikir tingkat rendah hingga tinggi.
5. Teknik yang bisa digunakan untuk penilaian pengetahuan adalah tes tertulis, tes lisan, dan penugasan. Namun tidak menutup kemungkinan digunakan teknik lain yang sesuai, misalnya portofolio dan observasi.
6. Penilaian keterampilan adalah penilaian untuk mengukur pencapaian kompetensi siswa terhadap kompetensi dasar pada KI-4.
7. Penilaian keterampilan dapat dilakukan dengan berbagai teknik antara lain penilaian praktik/kinerja, proyek, dan portofolio.
8. Penilaian pencapaian KD peserta didik dilakukan berdasarkan indicator.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Cocokkanlah jawaban Anda dengan kunci jawaban yang terdapat pada bagian akhir Kegiatan Pembelajaran ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian gunakan rumus berikut ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda dalam Kegiatan Pembelajaran ini.

Rumus:

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban yang benar}}{\text{Jumlah soal}} \text{ x } 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90 – 100	=	Baik sekali
80 – 89	=	Baik
70 – 79	=	Cukup
< 70	=	kurang

Jika tingkat penguasaan Anda minimal 80%, maka Anda dinyatakan berhasil dengan baik. Anda dapat melanjutkan untuk mengerjakan soal evaluasi. Sebaliknya, bila tingkat penguasaan Anda kurang dari 80%, silakan pelajari kembali uraian yang terdapat dalam Kegiatan Pembelajaran ini, khususnya bagian yang belum Anda kuasai.

H. Kunci Jawaban

1. d	2. c	3. a	4. b	5. a	6. c	7. d	8. c	9. d
10. a	11. a	12. a	13. d	14. a	15. a			

Evaluasi

Pilihlah dengan memberi tanda silang (X) pada jawaban yang Anda anggap benar!

1. Diberikan KD "Merancang model matematika dari masalah program linear". Penugasan yang dapat menumbuhkan kerjasama antar siswa adalah ...

   a. Guru membagi kelas ke dalam beberapa kelompok, setiap kelompok diberi tugas mencari data sekunder perancangan pembangunan suatu rumah tinggal.
   b. Guru membagi kelas ke dalam beberapa kelompok, setiap kelompok diberi tugas untuk mencari nilai maksimum hasil panen suatu lahan pertanian yang ditanami tiga tanaman dengan umur tanam hampir sama.
   c. Guru membagi kelas ke dalam beberapa kelompok, setiap kelompok diberi tugas merancang pembuatan slide presentasi pengambilan data transportasi BBM.
   d. Guru membagi kelas ke dalam beberapa kelompok, setiap kelompok diberi tugas merancang poster suatu materi pembelajaran matematika untuk acara dies sekolah yang segera dilaksanakan.

2. Diberikan KD "Menggunakan aturan sinus dan cosinus untuk menyelesaikan masalah". Indikator yang dapat disusun untuk mencapai kompetensi di atas adalah ... .

   a. Menentukan unsur-unsur segitiga yang belum diketahui jika diberikan panjang dua sisi dan sudut yang mengapitnya
   b. Menuliskan bukti aturan sinus dengan bantuan garis tinggi segitiga secara benar
   c. Menentukan nilai perbandingan trigonometri sudut-sudut istimewa
   d. Menuliskan definisi sinus suatu sudut pada posisi baku

3. Sikap **jujur** dapat dikembangkan melalui proses pembelajaran matematika. Perkembangan sikap tersebut **paling tepat** dinilai dengan …

   a. pencatatan oleh guru dan penilaian teman sebaya
   b. pengamatan dan penilaian teman sebaya
   c. wawancara dan pencatatan oleh guru

d. pengamatan dan wawancara

4. Pada saat mengoreksi hasil ulangan, seorang menemukan sebagian besar siswa mengerjakan suatu soal sebagai berikut.

$$\frac{\cancel{\frac{5}{4}} + x}{\cancel{\frac{5}{4}}} = 5$$

$$x = 5$$

Berkaitan dengan hal tersebut, tindakan yang tepat dilakukan oleh guru tersebut adalah ....

a. Menjelaskan kembali arti pencoretan pada persamaan

b. Memberikan penguatan pada siswa bahwa cara tersebut boleh dilakukan karena $x = 5$ adalah nilai yang benar

c. Malarang sama sekali melakukan pencoretan karena tidak ada konsep mencoret dalam matematika

d. Memberikan contoh yang serupa

5. Di bawah ini adalah beberapa teknik penilaian pengetahuan, kecuali …

a. Uraian
b. Lisan
c. Pilihan Ganda
d. Jurnal

6. Beberapa pernyataan di bawah ini adalah kaidah penulisan soal pilihan ganda, kecuali …

a. Soal sesuai dengan indikator
b. Jawaban yang tepat boleh lebih dari satu
c. Pilihan jawaban homogen dan logis
d. Materi yang diukur sesuai dengan kompetensi

Penutup

Demikianlah modul ini telah disusun dengan sebaik-baiknya, walaupun disana sini masih terdapat berbagai kekurangan. Modul ini memuat uraian materi yang terkait dengan penilaian pembelajaran matematika. Modul ini juga telah dilengkapi dengan petunjuk aktivitas pembelajaran, latihan soal, dan soal evaluasi.

Pada akhirnya, mudah-mudahan modul ini dapat memberi manfaat bagi Bapak/ Ibu guru matematika, khususnya para peserta Guru Pembelajar, sebagai acuan pembelajaran dalam mengikuti Program Guru Pembelajar, maupun sebagai bahan pembelajaran di luar Guru Pembelajar, sehingga dapat membantu Bapak/ Ibu guru dalam mengembankan kompetensinya.

Terakhir, semoga segala upaya kita untuk meningkatkan pendidikan di negeri ini, khususnya pendidikan matematika, senantiasa membawa hasil yang positif, dan tercatat sebagai amal kebaikan di sisi-Nya. Amin.

Glosarium

KI	:	Kependekan dari Kompetensi Inti yaitu tingkat kemampuan untuk mencapai Standar Kompetensi Lulusan yang harus dimiliki seorang Peserta Didik pada setiap tingkat kelas atau program yang menjadi landasan Pengembangan Kompetensi dasar.
KD	:	Kependekan dari Kompetensi Dasar yaitu tingkat kemampuan dalam konteks muatan Pembelajaran, pengalaman belajar, atau mata pelajaran yang mengacu pada Kompetensi inti.
Sikap spiritual:	:	Sikap yang terkait dengan pembentukan peserta didik yang beriman dan bertakwa.
Sikap sosial	:	Sikap yang terkait dengan pembentukan peserta didik yang berakhlak mulia, mandiri, demokratis, dan bertanggung jawab.

Daftar Pustaka

Kemdikbud. (2014-a). *Kompetensi Dasar Kelompok Mata Pelajaran Umum (Lampiran I-b Peraturan Menteri Pendidikan Dan Kebudayaan Nomor 59 Tahun 2014 Tentang Kurikulum 2013 Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah).* Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

Kemdikbud. (2014-b). *Pedoman Mata Pelajaran Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK (Lampiran III Peraturan Menteri Pendidikan Dan Kebudayaan Nomor 59 Tahun 2014 Tentang kurikulum 2013 Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah).* Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

Kemdikbud. (2015-a). *Model Pengembangan Rencana Pelaksanaan Pembelajaran Sekolah Menengah Atas*. Jakarta: Direktorat Pembinaan Sekolah Menengah Atas.

Kemdikbud. (2015-b). *Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 53 Tahun 2015 tentang Penilaian Hasil Belajar oleh Pendidik dan Satuan Pendidikan pada Pendidikan Dasar dan Pendidikan Menengah*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Kemdikbud. (2015-c). *Panduan Penilaian untuk Sekolah Menengah Atas*. Jakarta: Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah.

Lampiran

A. Lampiran 1

LK-1

Perancangan Penilaian dalam Pembelajaran Matematika

Tujuan Kegiatan:

Melalui kegiatan ini diharapkan peserta mampu merancang instrument penilaian sikap, pengetahuan dan keterampilan dalam pembelajajaran Matematika

Langkah Kegiatan.

1. Pilihlah satu subtopik/ submateri untuk satu KD, sebaiknya dipilih sesuai dengan subtopik/submateri yang telah dibahas oleh kelompok Anda sebelumnya
2. Rancanglah contoh intrumen penilaian sikap, pengetahuan dan keterampilan pada format untuk masing-masing bentuk penilaian.
3. Presentasikan hasil kerjakelompok Anda
4. Perbaiki rancangan instrument penilaian jika ada saran atau usulan perbaikan

1. Instrumen Penilaian Kompetensi Sikap

a. Penilaian Kompetensi Sikap Melalui Observasi

Penilaian Sikap Kegiatan Diskusi

Mata Pelajaran	:	Matematika
Kelas/Semester	:	______________________
Kompetensi Dasar	:	______________________

Topik/Subtopik : ______________________________

Indikator Pencapaian Kompetensi : ______________________________

Instrumen:

2. Instrumen Penilaian Kompetensi Pengetahuan

a. Tes Tulis

1) Soal Pilihan Ganda

Mata Pelajaran : Matematika

Kelas/Semester : ______________________________

Kompetensi Dasar : ______________________________

Topik/Subtopik : ______________________________

Indikator Pencapaian Kompetensi : ______________________________

Instrumen:

R-1

Rubrik Penilaian Perancangan Penilaian Dalam Pembelajaran

Rubrik penilaian ini digunakan fasilitator untuk menilai hasil rancangan instrument penilaian kompetensi sikap, kompetensi pengetahuan dan kompetensi keterampilan. Pada penilaian kompeteni sikap peserta ditugaskan dalam kelompoknya membuat instrument observasi, penilaian sikap melalui penilaian diri, penilaian antar peserta didik dan penilaian sikap melalui jurnal. Pada penilaian pengetahuan peserta ditugaskan membuat intrumen tes tertulis (Pilihan Ganda dan Uraian), observasi diskusi, tanya jawab dan percakapan dan penugasan, sedangkan pada penilaian kompetensi keterampilan peserta ditugaskan membuat instrument penilaian praktik, proyek dan produk dan portofolio

Langkah-langkah penilaian

1. Cermati tugas yang diberikan kepada peserta pelatihan pada LK 3 !
2. Berikan nilai pada hasil kerja peserta pelatihan yang berupa rancangan intrumen penilaian kompetensi sikap, pengetahuan dan keterampilan sesuai dengan penilaian Anda terhadap produk tersebut menggunakan kriteria penilaian nilai sebagai berikut

Penilaian Kompetensi Sikap

PERINGKAT	NILAI	KRITERIA
Amat Baik (AB)	90 < AB ≤ 100	1. Terdapat identitas instrumen : KD, topik, sub topik dengan lengkap 2. Terdapat indikator yang dirumuskan dengan benar 3. Terdapat empat bentuk instrument penilaian kompetensi sikap 4. Seluruh instrument penilaian dibuat sesuai criteria pengembangannya
Baik (B)	80 < B ≤ 90	Ada 3 aspek sesuai dengan kriteria, 1 aspek kurang sesuai

Cukup (C)	70 < C ≤ 80	Ada 2 aspek sesuai dengan kriteria, 2 aspek kurang sesuai
Kurang (K)	≤ 70	Ada 1 aspek sesuai dengan kriteria, 3 aspek kurang sesuai

b. Lampiran 2

Kunci Jawaban Evaluasi:

1. B 2. C 3. A 4. A 5. D 6. B

GURU PEMBELAJAR

MODUL

MATEMATIKA SMA

KELOMPOK KOMPETENSI I

PROFESIONAL

MATRIKS DAN VEKTOR

DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN

2016

Penulis:

1. Agus Dwi Wibawa, S.Pd., M.Si., 08175451011, agusdw70@yahoo.com
2. Marfuah, S.Si., M.T., 085875774483, marfuah@p4tkmatematika.org

Penelaah:

1. Wiworo, S.Si., M.M., 08562875885, percussionline@yahoo.com
2. Drs. Emut, M.Si., 085326103388, emut2741@gmail.com

Ilustrator:

Denny Saputra, S.Kom. 085227133999, denny.s4putr4@gmail.com

Kata Pengantar

Peningkatan kualitas pendidikan saat ini menjadi prioritas, baik oleh pemerintah pusat maupun daerah. Salah satu komponen yang menjadi fokus perhatian adalah peningkatan kompetensi guru. Peran guru dalam pembelajaran di kelas merupakan kunci keberhasilan untuk mendukung keberhasilan belajar siswa. Guru yang profesional dituntut mampu membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan *output* dan *outcome* pendidikan yang berkualitas.

Dalam rangka memetakan kompetensi guru, telah dilaksanakan Uji Kompetensi Guru (UKG) Tahun 2015. UKG tersebut dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikat maupun belum bersertifikat untuk memperoleh gambaran objektif kompetensi guru, baik professional maupun pedagogik. Hasil UKG kemudian ditindaklanjuti melalui Program Guru Pembelajar sehingga diharapkan kompetensi guru yang masih belum optimal dapat ditingkatkan.

PPPPTK Matematika sebagai Unit Pelaksana Teknis Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan dibawah pembinaan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan mendapat tugas untuk menyusun modul guna mendukung pelaksanaan Guru Pembelajar. Modul ini diharapkan dapat menjadi sumber belajar bagi guru dalam meningkatkan kompetensinya sehingga mampu mengambil tanggung jawab profesi dengan sebaik-baiknya.

Yogyakarta, Maret 2016

Kepala PPPPTK Matematika,

Dr. Dra. Daswatia Astuty, M.Pd.

NIP. 196002231985032001

DAFTAR ISI

Pendahuluan

A. Latar Belakang

Merujuk pada Peraturan Menteri Pendayagunaan Aparatur Negara dan Reformasi Birokrasi (Permenpan dan RB) Nomor 16 tahun 2009 tentang Jabatan Fungsional Guru dan Angka Kreditnya memuculkan paradigma baru profesi guru. Guru tidak lagi sekedar pelaksana teknis di kelas, tetapi lebih sebagai suatu jabatan fungsional. Jabatan fungsional guru adalah jabatan fungsional yang mempunyai ruang lingkup, tugas, tanggung jawab, dan wewenang untuk melakukan kegiatan mendidik, mengajar, membimbing, mengarahkan, melatih, menilai, dan mengevaluasi peserta didik pada pendidikan anak usia dini jalur pendidikan formal, pendidikan dasar, dan pendidikan menengah sesuai dengan peraturan perundang-undangan yang diduduki oleh Pegawai Negeri Sipil (Pasal 1 ayat 1). Konsekuensinya adalah guru dituntut melakukan pengembangan keprofesian berkelanjutan (PKB) sehingga guru dapat menjalankan tugas dan fungsinya secara profesional.

Peraturan Pemerintah No.19 tahun 2005 tentang Standar Nasional Pendidikan Bab VI pasal 28 ayat 1, menyiratkan bahwa pendidik harus memiliki kualifikasi akademik dan kompetensi sebagai agen pembelajaran, sehat jasmani dan rohani, serta memiliki kemampuan untuk mewujudkan tujuan pendidikan nasional. Sebagai agen pembelajar, guru dituntut untuk memiliki kompetensi pedagogik, kepribadian, sosial, dan profesional. Keempat kompetensi tersebut harus dikembangkan secara utuh sehingga terintegrasi dalam kinerja guru.

Salah satu kompetensi profesional yang harus dikuasai guru matematika sesuai dengan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 16 Tahun 2007 tentang Standar Kualifikasi Akademik dan Kompetensi Guru adalah menggunakan vektor dan matriks (20.11). Lebih lanjut, Matriks (bagian dari Vektor dan Matriks) merupakan salah satu kompetensi dasar yang wajib dikuasai siswa pada mata pelajaran matematika SMA sehingga guru diharapkan dapat mengampu materi ini secara profesional. Berdasar hal tersebut, modul Matriks (Vektor dan Matriks) disusun sebagai bentuk fasilitasi bagi guru dalam meningkatkan profesionalismenya.

B. Peta Kompetensi

1. Peserta Guru Pembelajar atau pembaca memahami konsep matriks dan vektor.
2. Peserta Guru Pembelajar atau pembaca mampu menggunakan prinsip dan sifat matriks dalam operasi matriks.
3. Peserta Guru Pembelajar atau pembaca mampu menggunakan konsep proyeksi dalam memecahkan masalah vektor.

C. Ruang Lingkup

Pembahasan pada modul ini menitikberatkan pada:

1. Pengertian matriks, notasi matriks, ordo matrik, dan jenis-jenis matriks.
2. Transpose matriks dan sifat-sifatnya serta kesamaan matriks.
3. Operasi penjumlahan matriks, pengurangan matriks, lawan suatu matrik, dan sifat-sifat operasi penjumlahan matriks.
4. Operasi bilangan real dengan matriks dan sifat-sifatnya.
5. Perkalian matriks dan syarat-syaratnya serta sifat-sifat operasi perkalian matriks.
6. Determinan matriks ordo 2×2, dua matriks saling invers, matriks singular dan matriks non singular, rumus inverse matriks ordo 2×2.
7. Invers matriks berordo 3×3, minor, kofaktor, adjoint, determinan matriks berordo 3×3, dan kaidah sarrus.
8. Vektor pada ruang dimensi dua dan ruang dimensi tiga, meliputi vektor posisi, vektor basis, kesamaan vektor, penjumlahan vektor, pengurangan vektor, hasil kali skalar dengan vektor, panjang vektor, vektor satuan, perkalian skalar dua vektor dan proyeksi vektor.

Setiap bagian modul ini dimulai dengan teori-teori, diikuti beberapa contoh dan diakhiri dengan latihan. Di samping itu, dikemukakan juga tentang hal-hal penting yang perlu mendapat penekanan para guru di saat membahas pokok bahasan ini di kelasnya. Karenanya, para pemakai modul ini disarankan untuk membaca lebih dahulu teorinya sebelum mencoba mengerjakan latihan yang ada. Saran dan masukan untuk modul ini dapat disampaikan kepada kami di PPPPTK Matematika dengan alamat: Jl. Kaliurang KM. 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, DIY, Kotak Pos

31 YK-BS Yogyakarta 55281. Telepon (0274) 881717, 885725, Fax. (0274) 885752, alamat email: *p4tkmatematika@yahoo.com.*

D. Saran Penggunaan Modul

Modul ini diperuntukkan pada saat peserta melakukan kegiatan Guru Pembelajar, namun demikian peserta atau pembaca diharapkan tetap dapat memanfaatkan di luar kediklatan. Untuk dapat mengerjakan tugas, peserta atau pembaca dapat membaca sumber bacaan yang berada di uraian materi modul ini atau sumber lain yang mendukung. Setelah selesai mengerjakan semua tugas dan membaca uraian materi, peserta melakukan refleksi sesuai dengan panduan pada bagian umpan balik dan tindak lanjut.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1:
Dasar-asar Matriks

A. Tujuan

Setelah mempelajari kegiatan belajar 1 ini diharapkan peserta kegiatan Guru Pembelajar atau pembaca mampu memahami dengan baik tentang dasar-dasar matriks yang meliputi: pengertian matriks, menuliskan notasi matriks, menyebutkan ordo suatu matriks, mengidentifikasi jenis-jenis matriks, menentukan transpose matriks, dan menyelesaikan kesamaan matriks.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Berikut diuraikan indikator pencapaian kompetensi pada kegiatan pembelajaran ini. Peserta Guru Pembelajar atau pembaca dapat menjelaskan pengertian matriks.

1. Peserta atau pembaca dapat menjelaskan pengertian matriks.
2. Peserta atau pembaca dapat menuliskan notasi matriks.
3. Peserta atau pembaca dapat menentukan ordo (ukuran) suatu matriks.
4. Peserta atau pembaca dapat menentukan jenis-jenis matriks.
5. Peserta atau pembaca dapat menentukan transpose matriks
6. Peserta atau pembaca dapat menyelesaikan kesamaan matriks

C. Uraian Materi

1. Pengertian Matriks

Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk persegipanjang yang tersusun dalam baris dan kolom. Susunan bilangan tersebut diletakkan dalam sepasang kurung biasa, ( ), atau sepasang kurung siku, [ ]. Bilangan-bilangan yang tersusun dalam baris dan kolom matriks disebut elemen matriks.

Bentuk umum matriks:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$a_{1.1}$ = elemen matriks pada baris ke-1 dan kolom ke-1

$a_{1.2}$ = elemen matriks pada baris ke-1 dan kolom ke-2

$a_{1.3}$ = elemen matriks pada baris ke-1 dan kolom ke-3

.

.

.

$a_{m.n}$ = elemen matriks pada baris ke-m dan kolom ke-n

Dalam matriks $A = (a_{ij})$, dengan i dan j adalah bilangan asli, bilangan a_{ij} disebut elemen matriks.

2. Notasi Matriks

Suatu matriks diberi notasi dengan huruf capital, misalnya: A, B, C, dan sebagainya.

Contoh: (Penulisan matriks)

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 35 & -47 \\ -19 & 65 & 71 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh:

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 12 & 21 \\ 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$

Jika a_{ij} menunjukkan elemen matriks A yang terletak pada baris ke-i dan kolom ke-j, tentukanlah:

a. Banyaknya baris matriks A
b. Banyaknya kolom matriks A
c. Elemen-elemen matriks A pada:
    1) baris ke-1,
    2) baris ke-3,
    3) kolom ke-1
    4) kolom ke-2
d. a_{11}, a_{12}, a_{21}, dan a_{32}

Jawab:

a. Banyaknya baris matriks A adalah 3 buah
b. Banyaknya kolom matriks A adalah 2 buah
c. 1). Elemen-elemen matriks A pada baris ke-1 adalah 12, dan 21
   2). Elemen-elemen matriks A pada baris ke-3 adalah 7, dan -8
   3). Elemen-elemen matriks A pada kolom ke-1 adalah 12, 5, dan 7
   4). Elemen-elemen matriks A pada kolom ke-2 adalah 21, 6, dan -8
d. $a_{11} = 12$, $a_{12} = 21$, $a_{21} = 5$, dan $a_{32} = -8$

3. Ordo Matriks

Ordo (ukuran) suatu matriks adalah banyaknya baris dan kolom yang dimiliki matriks tersebut. Misalnya matriks A memiliki m baris dan n kolom, artinya matriks A berordo $m \times n$, dan dinotasikan dengan $A_{m\times n}$.

Contoh :

Sebutkan ordo matriks-matriks di bawah ini:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 35 & -47 \\ -19 & 65 & 71 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Ordo matriks A adalah 2×3 dinotasikan $A_{2\times 3}$, ordo matriks B adalah 3×2 dinotasikan $B_{3\times 2}$, dan ordo matriks C adalah 2×2 dinotasikan $C_{2\times 2}$.

4. Jenis-Jenis Matriks

Setelah memahami kembali pengertian matriks dan ordo suatu matriks, Anda diperkenalkan/diingatkan kembali dengan jenis-jenis matriks. Berdasarkan ordonya terdapat jenis matriks, sebagai berikut :

a. Matriks baris (vektor baris)

Matriks baris adalah matriks yang terdiri dari satu baris atau matriks yang berordo $1 \times n$, dengan $n \in$ {bilangan asli} dan $n > 1$.

Contoh: $A = [\,2\ \ 3\ \ 0\ \ 7\,]$, $B = [6 \quad 9]$, $C = [0 \quad -3 \quad 4]$

b. Matriks kolom/lajur (vektor kolom/lajur)

Matriks kolom adalah matriks yang terdiri dari satu kolom atau matriks yang berordo $m \times 1$, dengan $m \in \{\text{bilangan asli}\}$ dan $m > 1$.

<u>Contoh:</u> $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ 2 \end{bmatrix}$

c. Matriks persegi

Matriks persegi adalah matriks yang banyak baris sama dengan banyak kolom.

Suatu matriks yang banyak baris sama dengan banyak kolom yaitu n, disebut **matriks persegi berordo $\boldsymbol{n \times n}$**, atau sering juga disebut sebagai **matriks persegi berordo $\boldsymbol{n}$**.

<u>Contoh:</u>

$A_{1\times1} = [5]$, $B_{2\times2} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$, $C_{3\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 8 & 1 & 9 \\ 7 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

Pada matriks persegi terdapat diagonal utama dan diagonal samping.

Diagonal samping

<u>Contoh :</u> $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 8 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 0 & 6 \\ 7 & -3 & -5 & 10 \end{bmatrix}$

Diagonal utama

Elemen-elemen dari matriks $A_{4\times4}$ yang terletak pada diagonal utama adalah 2, 8, 0, dan 10. Elemen-elemen dari matriks $A_{4\times4}$ yang terletak pada diagonal samping adalah 7, 9, 6, dan 3.

d. Matriks tegak

Adalah matriks yang banyak barisnya lebih dari banyak kolom, atau matriks berordo $m \times n$ dengan $m > n$, dengan $m, n \in \{\text{bilangan asli}\}$.

<u>Contoh</u>:

$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$, A berordo 3×2 dan $3 > 2$ sehingga matriks A tampak tegak.

e. Matriks mendatar

Matriks mendatar adalah matriks yang banyak barisnya kurang dari banyak kolom, atau matriks berordo $m \times n$ dengan $m < n$, dengan $m, n \in$ {bilangan asli}.

Contoh: $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$, B berordo 2×3 dan $2 < 3$ sehingga matriks B tampak mendatar.

Berdasarkan elemen-elemen penyusunnya, jenis-jenis matriks dikelompokkan menjadi:

a. Matriks nol

Matriks nol adalah matriks yang setiap elemennya nol.

Contoh:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b. Matriks diagonal

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang semua elemen di atas dan di bawah diagonal utamanya adalah 0 dan dinotasikan sebagai D.

Contoh: $D_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $D_{2\times 2} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

c. Matriks tridiagonal

Matriks tridiagonal adalah matriks persegi yang semua elemen-elemennya adalah nol kecuali elemen-elemen pada diagonal utama serta samping kanan dan kirinya.

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

d. Matriks skalar

Matriks skalar adalah matriks diagonal yang semua elemen pada diagonal utamanya sama.

Contoh: $S_{4\times4} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $T_{3\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

e. Matriks simetri

Matriks simetri adalah matriks persegi yang setiap elemennya, selain elemen diagonal utama, adalah simetris terhadap diagonal utama.

Contoh: $F_{2\times2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $G_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 9 \\ -4 & 3 & 2 \\ 9 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

f. Matriks simetri miring

Matriks simetri miring adalah matriks simetri yang elemen-elemennya, selain elemen diagonal utama, saling berlawanan.

Contoh: $H_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -7 \\ -5 & -3 & -2 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $K_{2\times2} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

g. Matriks Identitas (matriks satuan)

Matriks identitas adalah matriks persegi yang elemen-elemen (semua elemen) pada diagonal utamanya 1, sedangkan semua elemen yang lainnya nol.

Diagonal utama dari matriks persegi $A = (a_{ij})_{n\times n}$ adalah bilangan $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Jika matriks persegi-$n$ dengan semua elemen diagonal utamanya 1 dan elemen-elemen lainnya nol, maka matriks itu disebut matriks identitas (satuan) dan dilambangkan dengan I.

Contoh:

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, matriks satuan berordo 2.

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, matriks satuan berordo 3.

Matriks satuan mempunyai sifat:

Jika A dan I berordo sama, maka untuk setiap matrik persegi A berlaku $AI = IA = A$

h. Matriks segitiga atas

Matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya nol.

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

i. Matriks segitiga bawah

Matriks segitiga bawah adalah matriks persegi yang elemen-elemen di atas diagonal utamanya nol.

Contoh : $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

j. Matriks transpose

Matriks transpose adalah matriks yang diperoleh dari menukar/memindahkan elemen-elemen pada baris menjadi elemen-elemen pada kolom dan elemen-elemen pada kolom menjadi elemen-elemen pada baris. Transpose matriks A dilambangkan dengan A^t. Pada beberapa literatur yang ada, transpose matriks A dilambangkan dengan A^T, A^1 atau $\bar{A}$. Jika matriks A mempunyai ordo $m \times n$, maka matriks A^t akan mempunyai ordo $n \times m$. Sebagai pengingat Anda dapat memperhatikan arti suku kata dari istilah *transpose* yaitu *trans* dapat diartikan sebagai perpindahan dan *pose* dapat diartikan sebagai letak, sehingga *transpose* dapat diartikan sebagai perpindahan letak, dari baris ke kolom atau dari kolom ke baris.

Contoh: $A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$, maka $A^t_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Perhatikan bahwa elemen-elemen baris pada matriks A disusun menjadi elemen-elemen kolom pada matriks A^t, atau elemen-elemen kolom pada matriks A disusun menjadi elemen-elemen baris pada matriks A^t.

5. Kesamaan Matriks

Dua matriks dikatakan sama jika, keduanya mempunyai ordo yang sama dan elemen-elemen yang seletak (bersesuaian) juga sama.

Contoh:

1. Diberikan dua matriks A, dan B.

   Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} \frac{4}{2} & 2^3 \\ -5 & \frac{14}{-2} \end{bmatrix}$

   Maka $A = B$

2. Tentukan nilai a dan b dari kesamaan matriks berikut

   a. $\begin{bmatrix} 3a & -4 \\ 2b & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -4 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} -1 & 6a-1 \\ 4a+5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3b+2 \\ 2a & 3 \end{bmatrix}$

   [ ]

Jawab:

a. $3a = -12 \Leftrightarrow a = -\frac{12}{3} \Leftrightarrow a = -4$

   $2b = 9 \Leftrightarrow b = \frac{9}{2} \Leftrightarrow b = 4{,}5$

b. $4a + 5 = 2a \Leftrightarrow 4a - 2a = -5 \Leftrightarrow 2a = -5 \Leftrightarrow a = \frac{-5}{2}$

   $6a - 1 = 3b + 2 \Leftrightarrow 3b = 6a - 1 - 2 \Leftrightarrow 3b = 6\left(\frac{-5}{2}\right) - 3$

   $\Leftrightarrow 3b = -18 \Leftrightarrow b = \frac{-18}{3} \Leftrightarrow b = -6$

D. Aktivitas Pembelajaran

Sebagai aktifitas pembelajaran pada kegiatan belajar 1 ini, Anda diminta menjawab/mengerjakan semua pertanyaan/instruksi yang ada di bawah ini secara individual atau kelompok kecil. Bila posisi Anda sedang ada pada pembelajaran klasikal/diklat, Anda dapat berdiskusi dengan 1 atau 2 orang teman di dekat Anda untuk menjawab/mengerjakan semua pertanyaan/instruksi yang diberikan. Berikut ini pertanyaan/instruksi yang harus Anda jawab/kerjakan.

1. Jelaskan pengertian matriks serta berikanlah contoh kontekstualnya!
2. Bagaimanakah cara menuliskan notasi matriks? Berikanlah 2 buah contoh penulisan matriks!

3. Jelaskan pengertian ordo (ukuran) suatu matriks, berikanlah contoh 2 buah matris dan sebutkan ordonya!
4. Sebutkan jenis-jenis matriks yang Anda ketahui, dan jelaskan pengertian masing-masing jenis matriks tersebut! Berikanlah contoh sederhana dan contoh tidak sederhana (kritis) dari jenis-jenis matriks tersebut!
5. Berikanlah dua buah contoh matriks dan transpose dari matriks-matriks tersebut!
6. Berikanlah dua contoh permasalahan kesamaan matriks dan penyelesaiannya!

E. Latihan

1. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -12 & 16 & 20 \\ -2 & 7 & 4 & 6 & -3 \\ 1 & 5 & -6 & 12 & 4 \\ -11 & 4 & 10 & 15 & 5 \end{bmatrix}$

   a. Tentukan ordo matriks A

   b. Sebutkan elemen-elemen pada baris ke-2

   c. Sebutkan elemen-elemen pada kolom ke-3

   d. Sebutkan elemen a_{23}

   e. Sebutkan elemen a_{35}

2. Tentukan jenis-jenis matriks berikut ini:

   $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Tentukan nilai a dan b dari kesamaan matriks berikut :

   a. $\begin{bmatrix} a+b \\ 2a-15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a-5 \\ 6a+7b \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 7 & 5a-b \\ 2a+3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix} 2a & 2+a \\ b+3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2b+1 \\ a+1 & a+b \end{bmatrix}$

4. Tentukan nilai x, y, dan z dari kesamaan matriks berikut :

a. $\begin{bmatrix} x & 3 \\ 1-y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & x-1 \\ z & -2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ -y & z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & x-1 \\ y & z \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} x-5 \\ 3-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-11 \\ y+9 \end{bmatrix}$

5. Diketahui $P = \begin{bmatrix} 2x-y & 3x \\ x+2y & x+y \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -2y & -1 \end{bmatrix}$

   Jika $P = Q^t$, maka tentukan $x - y$

F. Rangkuman

1. Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk persegipanjang yang tersusun dalam baris dan kolom.
2. Suatu matriks diberi notasi dengan huruf capital, seperti A, B, C, dan sebagainya.
3. Ordo (ukuran) suatu matriks adalah banyaknya baris dan kolom yang dimiliki matriks tersebut.
4. Jenis-jenis matriks berdasarkan ordonya yaitu: Matriks baris (vektor baris, matriks kolom/lajur (vektor kolom/lajur), matriks persegi, matriks tegak, dan matriks mendatar
5. Jenis-jenis matriks berdasarkan elemen-elemen penyusunnya yaitu: matriks nol, matriks diagonal, matriks tridiagonal, matriks scalar, matriks simetri, matriks simetri miring, matriks identitas, matriks segitiga atas, matriks segitiga bawah, matriks transpose.
6. Dua matriks dikatakan sama jika, keduanya mempunyai ordo yang sama dan elemen-elemen yang seletak (bersesuaian) juga sama.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Sekarang Anda telah mempelajari materi-materi tentang pengertian matriks, notasi matriks, ordo matriks, jenis-jenis matriks, transpose matriks, dan kesamaan matriks. Keberhasilan Anda dalam mempelajari materi ini sangat berpengaruh pada kelancaran proses dan keberhasilan dalam mempelajari materi berikutnya. Pastikan Anda sudah mempelajari materi ini dengan baik. Untuk melihat keberhasilan Anda dalam mempelajari materi ini, Anda dapat mencocokkan jawaban soal-soal latihan yang sudah Anda kerjakan dengan kunci jawaban yang tersedia. Bila skor Anda minimal sudah mencapai angka 80 (penskoran menggunakan skala 0 sampai 100), berarti Anda sudah berhasil dalam mempelajari materi pada kegiatan pembelajaran 1 ini dan dapat melanjutkan mempelajari materi berikutnya. Tetapi apabila skor Anda masih dibawah 80, Anda harus mempelajari ulang materi yang belum Anda kuasai kemudian mengerjakan ulang latihan soal yang bersesuaian dengan materi yang Anda pelajari ulang tersebut hingga total skor latihan soal mencapai 80 atau lebih.

H. Kunci Jawaban soal latihan

1.
   a. Matriks A berordo 4×5
   b. Elemen-elemenpada baris ke-2 adalah $-2, 7, 4, 6, -3$
   c. Elemen-elemenpada kolom ke-3 adalah $-12,\ 4, -6, 10$
   d. Elemen a_{23} adalah 4
   e. Elemen a_{35} adalah 4
2.
   a. matriks segitiga atas
   b. matriks tridiagonal
   c. Idempoten
3.
   a. $a = \frac{4}{5}\ ,\ b = \frac{-13}{5}$
   b. $a = \frac{-7}{2}\ ,\ b = \frac{-55}{2}$
   c. $a = 5,\ \ b = 3$
4.
   a. $x = 4,\ y = 3,\ \ z = -2$
   b. $x = 3,\ y = 0,\ \ z = 1$
   c. $x = 6,\ y = -3,$
5.
   $x = 2,\ y = -3,$ maka $x - y = 2 - (-3) = 5$

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2:
Operasi Matriks dan Sifat-sifatnya

A. Tujuan

Peserta Guru Pembelajar atau pembaca mampu memahami dan menerapkan operasi-operasi matriks dan sifat-sifatnya.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Berikut ini adalah indikator pencapaian kompetensi pada kegiatan belajar 2.

1. Peserta atau pembaca dapat menyelesaikan dengan benar operasi penjumlahan matriks.
2. Peserta atau pembaca dapat menyelesaikan dengan benar operasi pengurangan matriks.
3. Peserta atau pembaca dapat menentukan dengan benar lawan suatu matriks.
4. Peserta atau pembaca dapat menunjukkan dengan benar kebenaran sifat-sifat operasi penjumlahan matriks
5. Peserta atau pembaca dapat menyelesaikan dengan benar operasi perkalian bilangan real (skalar) dengan matriks.
6. Peserta atau pembaca dapat menunjukkan dengan benar kebenaran sifat-sifat perkalian bilangan real dengan matriks.
7. Peserta atau pembaca dapat menyelesaikan dengan benar operasi perkalian matriks (perkalian matriks dengan matriks).
8. Peserta atau pembaca dapat menyelesaikan dengan benar operasi pemangkatan matriks.
9. Peserta atau pembaca dapat menunjukkan dengan benar kebenaran sifat-sifat operasi perkalian matriks.
10. Peserta atau pembaca dapat menerapkan dengan benar sifat-sifat operasi transpose pada matriks.

C. Uraian Materi

1. Penjumlahan Matriks

Dua matriks A dan B dapat dijumlahkan, jika keduanya mempunyai ordo yang sama. Hasil penjumlahan adalah matriks baru yang ordonya sama dengan matriks semula yang elemen-elemennya diperoleh dengan menjumlahkan elemen-elemen seletak pada matriks A dan matriks B.

Dengan demikian

Jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$,

$$\text{maka} \quad A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

<u>Contoh:</u>

Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$,

$$\text{maka } A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+1 & 4+(-4) \\ -3+5 & 5+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$$

2. Lawan suatu matriks

Jika A dan B dua matriks berordo sama dan jumlahnya merupakan matriks nol, maka matriks A disebut lawan matriks B dan sebaliknya. Lawan darimatriks A biasa dinotasikan dengan $-A$.

$A + B = 0 \Leftrightarrow B = -A$, sehingga $A + (-A) = (-A) + A = 0$

<u>Contoh:</u>

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$. Tentukan lawan dari matriks A.

<u>Jawab:</u>

Lawan dari matriks A adalah $-A = \begin{bmatrix} -9 & 8 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$

3. Pengurangan Matriks

Jika A dan B adalah dua matriks yang ordonya sama,

maka $A - B = A + (-B)$. Dengan demikian,

jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$,

maka $A - B = A + (-B)$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_{11} & -b_{12} & -b_{13} \\ -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} \end{bmatrix}$$

<u>Contoh:</u>

Jika $P = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$, dan $Q = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -7 \end{bmatrix}$,

maka $P - Q = P + (-q)$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -2 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -5 & -10 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Sifat-sifat Operasi Penjumlahan Matriks

Untuk setiap matriks A, B, dan C yang mempunyai ordo sama berlaku:

a) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (sifat asosiatif)

b) $A + B = B + A$ (sifat Komutatif)

c) $A + 0 = 0 + A = A$

d) Terdapat suatu matriks D sedemikian sehingga $A + D = B$

<u>Contoh:</u>

Diberikan matriks-matriks $A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

Tentukan$(A + B) + C$, dan $A + (B + C)$. Apakah $(A + B) + C = A + (B + C)$?

Jawab:

$$(A+B)+C=\left\{\begin{bmatrix}6 & 8\\ 9 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & -3\end{bmatrix}\right\}+\begin{bmatrix}-6 & 5\\ 1 & -4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8 & 12\\ 9 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6 & 5\\ 1 & -4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 17\\ 10 & 0\end{bmatrix}$$

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 9 & 7\end{bmatrix}+\left\{\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6 & 5\\ 1 & -4\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 9 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 9\\ 1 & -7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 17\\ 10 & 0\end{bmatrix}$$

Ternyata berlaku bahwa $(A+B)+C=A+(B+C)$

5. Perkalian Bilangan Real (Skalar) dengan Matriks

Jika k adalah suatu bilangan real dan A suatu matriks berordo $m \times n$, maka kA adalah matriks berordo $m \times n$ yang elemen-elemennya adalah setiap elemen A dikalikan dengan k.

Dengan demikian,

Jika $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$, maka $kA=k\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ka_{11} & ka_{12}\\ ka_{21} & ka_{22}\end{bmatrix}$

Contoh :

Diberikan matriks $A=\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 4 & 6\end{bmatrix}$.

Tentukan $2A$, $-5A$, dan $\frac{1}{2}A$.

Jawab:

$$2A=2\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 4 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 10\\ 8 & 12\end{bmatrix}$$

$$-5A=-5\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 4 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & -25\\ -20 & -30\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 4 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-3}{2} & \frac{15}{2}\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

6. Sifat-sifat Perkalian Bilangan Real dengan Matriks

Untuk bilangan-bilangan real k_1 dan k_2 dan untuk matriks-matriks A dan B yang berordo sama, berlaku:

a. $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$

b. $k_1(A+B) = k_1A + k_1B = (A+B)k_1$ (sifat distributif)

c. $(k_1+k_2)A = k_1A + k_2A$ (sifat distributif)

d. $1.A = A$

e. $0.A = 0$

<u>Contoh:</u>

Diberikan matriks-matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$

Tentukan:

a. $A + A$

b. $2A$

c. $5(A+B)$

d. $5A + 5B$

<u>Jawab:</u>

a. $A + A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{bmatrix}$

b. $2A = 2\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{bmatrix}$

c. $5(A+B) = 5\left\{\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}\right\} = 5\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 15 \\ -10 & 45 \end{bmatrix}$

d. $5A + 5B = 5\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 25 & 30 \\ 35 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & -15 \\ -45 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 35 & 15 \\ -10 & 45 \end{bmatrix}$

7. Perkalian Matriks dan Syarat-syaratnya

Hasil perkalian AB dalam urutan tersebut dari matriks $A_{1\times m}$ dengan matriks $B_{m\times 1}$ adalah matriks $C_{1\times 1}$ di mana elemen pada baris ke-1 merupakan jumlah dari perkalian elemen yang bersesuaian pada baris ke-1 dari matriks A dan kolom ke-1 dari matriks B.

$$AB = [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$

$$= [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \cdots + a_{1m}b_{m1}]$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{k1}\right]$$

<u>Contoh:</u>

a. $[1 \quad 3]\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = [1 \times 2 + 3 \times 4] = 14$

b. $[9 \quad -7 \quad 5]\begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} = [9(-8) + (-7)6 + 5(-4)] = [-134]$

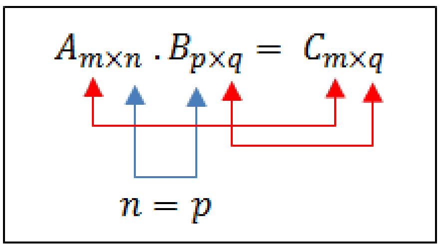
Hasil perkalian AB dalam urutan tersebut dari matriks $A = (a_{ij})_{m\times p}$ dengan matriks $B = (b_{ij})_{p\times n}$ diartikan sebagai matriks $(c_{ij})_{m\times n}$,

dengan $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$,

dimana $i = 1, 2, 3, \dots, m$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, n$

Pandang A sebagai matriks yang terdiri m baris dan B sebagai matriks yang terdiri atas n kolom. Dalam pembetukan $C = AB$, setiap baris A dikalikan satu dan hanya satu kali dengan kolom B, maka elemen c_{ij} dari C merupakan hasil kali baris ke-i dari A dan kolom ke-j dari B.

Dengan kata lain dua matriks dapat dikalikan jika banyaknya kolom matriks sebelah kiri sama dengan banyaknya baris matriks sebelah kanan. Matriks yang terbentuk mempunyai banyak baris sama dengan banyak baris matriks sebelah kiri dan mempunyai banyak kolom sama dengan banyak kolom matriks sebelah kanan. Perhatikan ilustrasi berikut.



Perkalian matriks AB disebut matriks B dikalikan dari kiri oleh matriks A dan perkalian matriks BA disebut matriks B dikalikan dari kanan oleh matriks A.

Contoh :

1. Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$, matriks $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, maka hasil kali matriks A dengan matriks B adalah:

$$A \cdot B = AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 & 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 5 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 + (-3) & 0 + (-13) \\ (-3) + 4 & 0 + 20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -15 \\ 1 & 20 \end{bmatrix}$$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 15 \\ 8 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 8 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 3 & -2 - 9 & 4 + 9 \\ 0 + 1 & -1 - 3 & 2 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -11 & 13 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$

8. Pengertian Pemangkatan Matriks Persegi

Jika A adalah matriks persegi, maka berlaku $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A^2$, $A^4 = A \times A^3$, … , $A^n = A \times A^{n-1}$

Contoh:

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, tentukan A^2, dan A^3

Jawab:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 + 3.2 & 1.3 + 3.5 \\ 2.1 + 5.2 & 2.3 + 5.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+6 & 3+8 \\ 2+10 & 6+25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 12 & 31 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 12 & 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7+3.12 & 1.11+3.31 \\ 2.7+5.12 & 2.11+5.31 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7+36 & 11+93 \\ 14+60 & 22+155 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 104 \\ 74 & 177 \end{bmatrix}$$

9. Sifat-sifat operasi perkalian matriks

Jika setiap operasi matriks berikut terdefinisi, maka:

a. $(AB)C = A(BC)$ (sifat asosiatif)

b. $A(B+C) = AB + AC$ (Sifat distributive kiri)

c. $(B+C)A = BA + CA$ (Sifat distributive kanan)

d. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, dengan $k \in R$ atau k scalar

Contoh:

Diberikan matriks-matriks $A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

Tentukan $(AB)C$ dan $A(BC)$. Apakah $(AB)C = A(BC)$?

Jawab:

$$(AB)C = \left\{\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 18 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 48 \\ 36 & 27 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 48 \\ 36 & 27 \end{bmatrix}$$

Ternyata $(AB)C = A(BC)$.

10. Sifat-sifat Operasi Transpose Matriks

a. $(A+B)^t = A^t + B^t$

b. $(A^t)^t = A$

c. $(kA)^t = kA^t$, dengan k skalar.

d. $(AB)^t = B^t A^t$

Contoh:

Diberikan matriks-matriks $A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

Tentukan$(AB)^t$ dan $B^t A^t$. Apakah $(AB)^t = B^t A^t$?

Jawab:

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 18 & 15 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^t = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 18 & 15 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 12 & 18 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

$$B^t A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 18 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

Ternyata $(AB)^t = B^t A^t$

D. Aktivitas Pembelajaran

Sebagai aktifitas pembelajaran pada kegiatan belajar 2 ini, Anda diminta menjawab/mengerjakan semua pertanyaan/instruksi yang ada di bawah ini secara individual atau kelompok kecil. Bila posisi Anda sedang ada pada pembelajaran klasikal/diklat, Anda dapat berdiskusi dengan 1 atau 2 orang teman di dekat Anda untuk menjawab/mengerjakan semua pertanyaan/instruksi yang diberikan. Berikut ini pertanyaan/instruksi yang harus Anda jawab/kerjakan.

1. Menentukan penjumlahan matriks.
   a. Diberikan tiga buah matrik berikut ini:

   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \ C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

   Tentukan: $A + B$, $A + C$, dan $B + A^t$

   b. Berilah beberapa contoh soal/masalah yang berhubungan dengan penjumlahan matriks beserta penyelesaiannya, yang dapat meningkatkan/ menguatkan pemahaman siswa tentang penjumlahan matriks.
2. Menentukan pengurangan matriks.
   a. Diberikan tiga buah matrik berikut ini:

   $$P = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 1 \\ 7 & -5 & 4 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 3 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$$

   Tentukan: $P - Q$, $Q - R$, dan $P^t - R$

   b. Berilah beberapa contoh soal/masalah yang berhubungan dengan pengurangan matriks beserta penyelesaiannya, yang dapat meningkatkan/ menguatkan pemahaman siswa tentang pengurangan matriks.

3. Menentukan lawan suatu matriks
   a. Diberikan matriks $L = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -7 & 3 \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$

      Tentukan: $-L, -(-L), -\big(-(-L)\big), L + (-L)$

      Perhatikan relasi dari matriks-matriks tersebut!
   b. Berlah beberapa contoh soal/masalah yang berhubungan dengan lawan matriks beserta penyelesaiannya, yang dapat meningkatkan/ menguatkan pemahaman siswa tentang lawan matriks.
4. Menunjukkan sifat-sifat operasi penjumlahan matriks.
   a. Diberikan tiga buah matriks

      $$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 3 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & -3 \\ -8 & 9 \end{bmatrix}, \text{dan } C = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 6 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

      Tunjukkan bahwa:

      1) $(A + B) + C = A + (B + C)$
      2) $A + B = B + A$
      3) $A + 0 = 0 + A = A$
      4) Terdapat suatu matriks D sedemikian sehingga $A + D = B$
   b. Berilah beberapa contoh soal/masalah yang berhubungan dengan sifat-sifat operasi penjumlahan matriks beserta penyelesaiannya, yang dapat meningkatkan/menguatkan pemahaman siswa tentang lawan matriks.
5. Menentukan perkalian bilangan real(skalar) dengan matriks.
   a. Diberikan tiga buah matrik berikut ini:

      $$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

      Tentukan: $2A, -5B, \frac{1}{3}C, \sqrt{2} \cdot A$, dan $\pi \cdot B$
   b. Berilah beberapa contoh soal/permasalahan yang berhubungan dengan perkalian bilangan real(skalar) dengan matriks beserta penyelesaiannya, yang dapat meningkatkan/menguatkan pemahaman siswa tentang perkalian bilangan real(skalar) dengan matriks.
6. Menunjukkan/membuktikan sifat-sifat perkalian bilangan real dengan matriks
   a. Diberikan dua buah matrik berikut ini:

      $$P = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 1 \\ 7 & -5 & 4 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 9 \end{bmatrix},$$

Tunjukkan/buktikan bahwa:

1) $P + P = 2P$
2) $5(P + Q) = 5P + 5Q = (P + Q)5$
3) $(2 + 5)P = 2P + 5P$
4) $1. P = P$
5) $0. Q = O$ (nol dikalikan matriks Q sama dengan matriks nol)

b. Berilah beberapa contoh soal/masalah yang berhubungan dengan sifat-sifat perkalian bilangan real (skalar) dengan matriks beserta penyelesaiannya, yang dapat meningkatkan/menguatkan pemahaman siswa tentang sifat-sifat perkalian bilangan real (skalar) dengan matriks.

7. Menentukan perkalian matriks

a. Diberikan matriks-matrik berikut ini:

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

$Q \times R,\quad R \times Q,\quad Q \times S,\quad S \times R,\quad R \times T,\quad T \times Q$

b. Berilah beberapa contoh soal/masalah yang berhubungan dengan perkalian matriks beserta penyelesaiannya, yang dapat meningkatkan/menguatkan pemahaman siswa tentang perkalian matriks.

8. Menentukan pemangkatan matriks

a. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

1) Tentukan: A^2, A^3, A^4
2) Apakah $\times A^2 = A^2 \times A$?
3) Apakah $\times A^3 = A^3 \times A = A^2 \times A^2$?

b. Berilah beberapa contoh soal/permasalahan yang berhubungan dengan pemangkatan matriks beserta penyelesaiannya, yang dapat meningkatkan/menguatkan pemahaman siswa tentang pemangkatan matriks.

9. Menunjukkan/membuktikan sifat-sifat operasi perkalian matriks

a. Diberikan matriks-matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$

Tunjukkan bahwa:

1) $(AB)C = A(BC)$
2) $A(B + C) = AB + AC$

3) $(B + C)A = BA + CA$

b. Berilah beberapa contoh soal/permasalahan yang berhubungan dengan sifat-sifat operasi perkalian matriks beserta penyelesaiannya, yang dapat meningkatkan/menguatkan pemahaman siswa tentang sifat-sifat operasi perkalian matriks.

10. Menunjukkan/mebuktikan sifat-sifat operasi transpose matriks.

a. Diberikan matriks-matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

Tunjukkan bahwa:

1) $(A + B)^t = A^t + B^t$
2) $(A^t)^t = A$
3) $(kA)^t = kA^t$, dengan k skalar.
4) $(AB)^t = B^t A^t$

b. Berilah beberapa contoh soal/permasalahan yang berhubungan dengan sifat-sifat operasi transpose matriks beserta penyelesaiannya, yang dapat meningkatkan/menguatkan pemahaman siswa tentang sifat- sifat-sifat operasi transpose matriks.

E. Latihan

1. Selesaikan operasi matriks berikut:

a. $\begin{bmatrix} 2a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7a \\ -3b \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2m \\ 3n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2a & b \\ 3a & -b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 2b \\ -4a & b \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ -x & 2y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & -y \\ -x & 2y \end{bmatrix}$

2. Diketahui $P = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$, dan $R = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

Tentukan:

a. $P + Q$

b. $Q - R$

c. $(P + Q) - R$

d. $P + (Q - R)$

3. Tentukan matriks X nya, jika X berordo 2×2

a. $X + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b. $X - \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} - X = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

4. Tentukan $x,\ y,\ w$, dan z jika diketahui:

$$\begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -1 \\ 6 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$$

5. Jika M adalah matriks berordo 2×2, tentukan matriks M dari:

a. $2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + M = 3\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} - 3M = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$

6. Diketahui $A = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 2b & 3c \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2a-3b & 2a+1 \\ a & b+7 \end{bmatrix}$.

Jika $A = 2B^t$, tentukanlah nilai $a + b + c$

7. Jika $3\begin{bmatrix} p & 2 \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ -1 & 2s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & p+q \\ r+s & 3 \end{bmatrix}$, tentukanlah nilai p, q, r, dan s.

8. Hitunglah perkalian matriks berikut.

a. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

9. Diketahui matriks-matriks sebagai berikut.

$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Tentukan:

a. $A \cdot B$

b. $B \cdot A$

c. $B \cdot C$

d. $(A \cdot B) \cdot C$

e. $A \cdot (B \cdot C)$

f. Buatlah kesimpulan untuk a dan b, serta d dan e

10. Jika $P = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ b & c \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} a-1 & 0 \\ -c & d \end{bmatrix}$, dan $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

    tentukan nilai d jika $P + Q^t = R^2$

11. Tentukan nilai x dan y dari persamaan berikut.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 18 \end{bmatrix}$$

F. Rangkuman

1. Dua matriks A dan B dapat dijumlahkan, jika keduanya mempunyai ordo yang sama. Hasil penjumlahan adalah matriks baru yang ordonya sama dengan matriks semula yang elemen-elemennya diperoleh dengan menjumlahkan elemen-elemen seletak pada matriks A dan matriks B.
2. Jika A dan B adalah dua matriks yang ordonya sama, maka $A - B = A + (-B)$.
3. Jika A dan B dua matriks berordo sama dan jumlahnya merupakan matriks nol, maka matriks A lawan matriks B dan sebaliknya. $A + B = 0 \Leftrightarrow B = -A$, sehingga $A + (-A) = (-A) + A = 0$
4. Untuk setiap matriks A, B, dan C yang mempunyai ordo sama berlaku:
   a) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (sifat asosiatif)
   b) $A + B = B + A$ (sifat Komutatif)
   c) $A + 0 = 0 + A = A$
   d) Terdapat suatu matriks D sedemikian sehingga $A + D = B$
5. Jika k adalah suatu bilangan real dan A suatu matriks berordo $m \times n$, maka kA adalah matriks berordo $m \times n$ yang elemen-elemennya adalah setiap elemen A dikalikan dengan k.

6. Untuk bilangan-bilangan real k_1 dan k_2 dan untuk matriks-matriks A dan B yang berordo sama, berlaku:
    a. $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$
    b. $k_1(A + B) = k_1A + k_1B = (A + B)k_1$ (sifat distributif)
    c. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$ (sifat distributif)
    d. $1.A = A$
    e. $0.A = 0$
7. Hasil perkalian AB dalam urutan tersebut dari matriks $A_{1\times m}$ dengan matriks $B_{m\times 1}$ adalah matriks $C_{1\times 1}$ di mana elemen pada baris ke-1 merupakan jumlah dari perkalian elemen yang bersesuaian pada baris ke-1 dari matriks A dan kolom ke-1 dari matriks B.
8. Jika A adalah matriks persegi, maka berlaku $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A^2$, $A^4 = A \times A^3, \dots, A^n = A \times A^{n-1}$
9. Jika setiap operasi matriks berikut terdefinisi, maka:
    a. $(AB)C = A(BC)$ (sifat asosiatif)
    b. $A(B + C) = AB + AC$ (Sifat distributive kiri)
    c. $(B + C)A = BA + CA$ (Sifat distributive kanan)
    d. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, dengan $k \in R$ atau k scalar
10. Sifat-sifat Operasi Transpose Matriks
    a. $(A + B)^t = A^t + B^t$
    b. $(A^t)^t = A$
    c. $(kA)^t = kA^t$, dengan k skalar.
    d. $(AB)^t = B^tA^t$

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Sekarang Anda Telah mempelajari materi-materi tentang penjumlahan matriks, pengurangan matriks, lawan suatu matriks, sifat-sifat operasi penjumlahan matriks, perkalian bilangan real (skalar) dengan matriks dan sifat-sifatnya, perkalian matriks dan syarat-syaratnya, pengertian pemangkatan matriks persegi, sifat-sifat operasi perkalian matriks, dan sifat-sifat operasi transpose matriks. Keberhasilan Anda dalam mempelajari materi ini sangat berpengaruh pada kelancaran proses dan keberhasilan dalam mempelajari materi berikutnya. Pastikan Anda sudah mempelajari materi ini dengan baik. Untuk melihat keberhasilan Anda dalam mempelajari materi ini, Anda dapat mencocokkan jawaban soal-soal latihan yang sudah Anda kerjakan dengan kunci jawaban yang tersedia. Bila skor Anda minimal sudah mencapai angka 80 (penskoran menggunakan skala 0 sampai 100), berarti Anda sudah berhasil dalam mempelajari materi pada kegiatan pembelajaran 2 ini dan dapat melanjutkan mempelajari materi berikutnya. Tetapi apabila skor Anda masih kurang dari 80, Anda harus mempelajari ulang materi yang belum Anda kuasai kemudian mengerjakan ulang latihan soal yang bersesuaian dengan materi yang Anda pelajari ulang tersebut hingga total skor latihan soal mencapai 80 atau lebih.

H. Kunci jawaban soal latihan

1. a. $\begin{bmatrix} 9a \\ -2b \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 2m-1 \\ 3n+4 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 3a & 3b \\ -a & 0 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} x & 4y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
2. a. $\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} -10 & 9 \\ -3 & -12 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} -5 & 12 \\ -5 & -16 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} -5 & 12 \\ -5 & -16 \end{bmatrix}$
3. a. $X = \begin{bmatrix} -10 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ b. $X = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ c. $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$
4. $x = 2, y = \frac{1}{2}, z = 4\frac{1}{2}, w = 3$
5. a. $M = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -21 & 5 \end{bmatrix}$ b. $M = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-11}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{-3}{3} \end{bmatrix}$
6. $a + b + c = 2 + 5 + 8 = 15$
7. $p = 2, q = 2, r = 1, s = 3$
8. a. $\begin{bmatrix} 22 & 12 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 23 \\ 15 \\ 35 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 7 & 17 \\ 0 & 33 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}$
9. a. $A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 17 & 22 \end{bmatrix}$ b. $B \cdot A = \begin{bmatrix} 10 & 16 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$ c. $B \cdot C = \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$

   $d. (A \cdot B) \cdot C = \begin{bmatrix} -16 & -8 \\ 78 & 73 \end{bmatrix}$ e. $A \cdot (B \cdot C) = \begin{bmatrix} -16 & -8 \\ 78 & 73 \end{bmatrix}$

   f. $AB \neq BA$ dan $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ pada perkalian matriks tidak berlaku sifat komutatif, tetapi berlaku sifat asosiatif.
10. $a = 1, b = 0, c = 1, d = 0$
11. $x = 2, y = -3$

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3:

Determinan dan Invers Matriks

A. Tujuan

Setelah mempelajari kegiatan belajar 3 ini diharapkan peserta Guru Pembelajar atau pembaca memiliki kemampuan untuk memahami dan menentukan determinan dan invers matriks dengan benar.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Setelah mempelajari kegiatan belajar 3 ini diharapkan sebagai berikut.

1. Peserta Guru Pembelajar atau pembaca dapat menentukan determinan matriks ordo 2×2.
2. Peserta Guru Pembelajar atau pembaca dapat mengidentifikasi dengan benar dua matriks saling invers.
3. Peserta Guru Pembelajar atau pembaca dapat mengidentifikasi matriks singular dan matriks non singular.
4. Peserta Guru Pembelajar atau pembaca dapat menentukan dengan benar invers matriks ordo 2×2.
5. Peserta Guru Pembelajar atau pembaca dapat menentukan dengan benar minor matriks.
6. Peserta Guru Pembelajar atau pembaca dapat menentukan dengan benar kofaktor matriks.
7. Peserta Guru Pembelajar atau pembaca dapat menentukan dengan benar Adjoint matriks.
8. Peserta Guru Pembelajar atau pembaca dapat menentukan dengan benar determinan matriks ordo 3×3.
9. Peserta Guru Pembelajar atau pembaca dapat menentukan dengan benar determinan matriks ordo 3×3 menggunakan Kaidah Sarrus
10. Peserta Guru Pembelajar atau pembaca dapat menentukan dengan benar Invers matriks ordo 3×3.

C. Uraian Materi

1. Determinan matriks ordo 2 × 2

Matriks berordo 2 × 2 terdiri atas dua baris dan dua kolom. Pada bagian ini akan dibahas determinan dari suatu matriks berordo 2 × 2. Misalkan A adalah matriks persegi ordo 2 × 2 dengan bentuk $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Determinan matriks A didefinisikan sebagai selisih antara perkalian elemen-elemen pada diagonal utama dengan perkalian elemen-elemen pada diagonal samping (sekunder). Determinan dari matriks A dinotasikan dengan det A atau $|A|$. Nilai dari determinan suatu matriks berupa bilangan real.

Berdasarkan definisi determinan suatu matriks, Anda bisa menentukan nilai determinan dari matriks A, yaitu:

$$\det A = |A| = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \times d - b \times c = ad - bc$$

(−)

(+)

Contoh:

Diketahui matriks-matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$.

Tentukan determinan A dan determinan B!

Jawab:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = 4 - 6 = -2$$

$$\det \text{B} = |B| = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = 8.(-5) - 7.6 = -40 - 42 = -82$$

2. Dua Matriks Saling Invers

Jika A dan B adalah matriks-matriks persegi yang ordonya sama,

dan $A \cdot B = B \cdot A = I$, maka B adalah invers dari A, ditulis $B = A^{-1}$ dan A invers dari B, ditulis $A = B^{-1}$. Jadi $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Contoh:

Diberikan dua matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Tunjukkan bahwa matriks A dan B saling invers!

Jawab:

Untuk menunjukkan bahwa Matriks A dan B saling invers, harus kita tunjukkan bahwa $A = B^{-1}$ dan $B = A^{-1}$ dengan menunjukkan bahwa $A \cdot B = B \cdot A = I$.

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 + (-7) \cdot 1 & 2 \cdot 7 + (-7) \cdot 2 \\ (-1) \cdot 4 + 4 \cdot 1 & (-1) \cdot 7 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) & 4 \cdot (-7) + 7 \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-7) + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Jadi $A \cdot B = B \cdot A = I$ (terbukti)

3. Matriks Singular dan Matriks Non Singular

Suatu matriks dikatakan singular jika determinannya nol, dan dikatakan non-singular jika determinannya tidak nol.

Contoh:

Diberikan matriks-matriks:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}, \text{dan } C = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Manakah dari matriks-matriks di atas yang merupakan matriks singular dan matriks non singular?

Jawab:

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -(3) \cdot 4 - (-2) \cdot 6 = (-12) - (-12) = 0$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) - 2 \cdot 6 = -15 - 12 = -27$$

$$|C| = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = (-6) \cdot (-5) - 2 \cdot 4 = 30 - 8 = 22$$

Oleh karena determinan matriks A adalah nol dan determinan matriks B dan C tidak nol, maka matriks A adalah matriks singular dan matriks B dan C adalah matriks non singular.

4. Invers Matriks Ordo 2 × 2.

Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan $|A| = ad - bc \neq 0$, maka invers matriks A adalah $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Dengan kata lain untuk memperoleh invers dari matriks A yang berordo 2 × 2 ditempuh dengan cara:

a. Pertukaran elemen-elemen pada diagonal utamanya
b. Berikan tanda negatif pada elemen-elemen lainnya
c. Bagilah setiap elemen matriks dengan determinannya.

Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan bahwa:

a. Suatu matriks persegi tidak memiliki invers jika dan hanya jika matriks itu singular.
b. Suatu matriks persegi memiliki invers jika dan hanya jika matriks itu non singular.

<u>Contoh:</u>

Tentukan invers matriks $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

<u>Jawab:</u>

Dengan menggunakan rumus invers matriks di atas didapatkan:

$$A^{-1} = \frac{1}{8 \cdot 4 - 6} \cdot (-5) \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \frac{5}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

Jadi invers matriks $A = A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \frac{5}{2} & 4 \end{bmatrix}$

5. Menentukan Invers Matriks Selain Berordo 2×2

Menentukan Invers matriks berordo 3×3, dengan menggunakan Adjoint matriks.

Jika A adalah matriks non singular berordo 3×3, maka invers A adalah

$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|}$,

Dengan: $|A|$ = determinan dari matriks A

$Adj\ A$ = adjoint dari matriks A

Untuk dapat menggunakan adjoint matriks, kita sebelumnya harus memahami tentang minor, dan kofaktor.

a. Minor

Apabila elemen-elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A berordo 3×3 dihapuskan maka didapat suatu matriks baru yang berordo 2×2. Matriks baru ini merupakan submatriks A. Determinan dari submatriks A ini disebut minor dan dinyatakan dengan $|M_{ij}|$

Misalkan matriks A berordo 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ determinan } A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Minor-minor dari matriks A setelah dihilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 sampai 3 dan kolom ke 1 sampai 3 adalah sebagai berikut:

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|M_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|M_{31}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad |M_{32}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad |M_{33}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Berikut ini diberikan contoh cara mendapatkan minor-minor dari matriks A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

dengan menghapus baris ke-1 dan kolom ke -1 matriks A didapat $|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

dengan menghapus baris ke-2 dan kolom ke -2 matriks A didapat $|M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

dengan menghapus baris ke-3 dan kolom ke-3 matriks A didapat $|M_{33}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Cara untuk mendapatkan minor-minor yang lainnya, digunakan cara yang serupa dengan cara mendapatkan minor-minor $|M_{11}|$, $|M_{22}|$, dan $|M_{33}|$.

<u>Contoh:</u>

Diberikan Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Tentukan minor-minornya!

<u>Jawab:</u>

Determinan $A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$,

$|M_{11}| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot 9 - 6 \cdot 8 = 45 - 48 = -3$

$|M_{12}| = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 - 6 \cdot 7 = 36 - 42 = -6$

$|M_{13}| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - 5 \cdot 7 = 32 - 35 = -3$

$|M_{21}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 8 = 18 - 24 = -6$

$|M_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 - 3 \cdot 7 = 9 - 21 = -12$

$|M_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 7 = 8 - 14 = -6$

$|M_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = 12 - 15 = -3$

$|M_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 6 - 12 = -6$

$|M_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = 5 - 8 = -3$

b. Kofaktor

Kofaktor A_{ij} dari matriks A ditentukan dengan rumus $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$.

Kofaktor-kofaktor dari matriks A adalah:

$A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = |M_{11}|$

$A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -|M_{12}|$

$A_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = |M_{13}|$

$A_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = -|M_{21}|$

$A_{22} = (-1)^{2+2}|M_{22}| = |M_{22}|$

$A_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = -|M_{23}|$

$A_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = |M_{31}|$

$A_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = -|M_{32}|$

$A_{33} = (-1)^{1+3}|M_{33}| = |M_{33}|$

<u>Contoh:</u>

Diberikan Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Tentukan kofaktor-kofaktornya!

Jawab:

Dengan menggunakan hasil penghitungan minor pada contoh soal di atas, kofaktor-kofaktor matriks A di atas adalah:

$A_{11} = (-1)^{1+1}(-3) = -3$

$A_{12} = (-1)^{1+2}(-6) = 6$

$A_{13} = (-1)^{1+3}(-3) = -3$

$A_{21} = (-1)^{2+1}(-6) = 6$

$A_{22} = (-1)^{2+2}(-12) = -12$

$A_{23} = (-1)^{2+3}(-6) = 6$

$A_{31} = (-1)^{3+1}(-3) = -3$

$A_{32} = (-1)^{3+2}(-6) = 6$

$A_{33} = (-1)^{1+3}(-3) = -3$

c. Adjoint

Adjoint A adalah suatu matriks yang diperoleh dengan melakukan operasi transpose (mentranspose) matriks kofaktor A_{ij}.

Misalkan $A = (a_{ij})$ suatu matriks persegi berordo $n \times n$ dan A_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka

$$\text{adjoint } A = \text{adj } A = (A_{ij})^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Jika matriks A berordo 3×3, maka

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Contoh:

Diberikan Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Tentukan Adjointnya!

Jawab:

Dengan menggunakan hasil penghitungan kofaktor-kofaktor pada contoh soal di atas, Adjoint matriks A tersebut adalah:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

6. Determinan matriks berordo 3×3

Misalkan matriks A diberikan sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Nilai determinan dari matriks A biasa ditulis det A, atau $|A|$ ditentukan dengan rumus:

a. Cara 1 (menggunakan metode kofaktor)

Determinan suatu matriks merupakan jumlah perkalian elemen-elemen dari sebuah baris (kolom) dengan kofaktor-kofaktor yang bersesuaian. Dapat dirumuskan:

det A $= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ dengan i sebarang, diekspansikan menurut baris ke-i.

det A $= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ dengan j sebarang, diekspansikan menurut kolom ke-j.

Dengan melakukan ekspansi menurut baris ke-i, didapat rumus:

1) $|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$

$= a_{11} \cdot |M_{11}| +\cdot (-1)^{1+2} \cdot |M_{12}| + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot |M_{13}|$

$= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$

$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

(Untuk ekspansi baris ke-1)

2) $|A| = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot +a_{23} \cdot A_{23}$

$= a_{21} \cdot (-1)^{2+1} \cdot |M_{21}| + a_{22} \cdot |M_{22}| + a_{23} \cdot (-1)^{2+3} \cdot |M_{23}|$

$= -a_{21}|M_{21}| + a_{22}|M_{22}| - a_{23}|M_{23}|$

$$= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(Untuk ekspansi baris ke-2)

3) $|A| = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33}$

$$= a_{31} \cdot (-1)^{3+1} \cdot |M_{31}| + a_{32} \cdot (-1)^{3+2} \cdot |M_{32}| + a_{33} \cdot (-1)^{3+3} \cdot |M_{33}|$$

$$= a_{31}|M_{31}| - a_{32}|M_{32}| + a_{33}|M_{33}|$$

$$= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(Untuk ekspansi baris ke-3)

Dengan melakukan ekspansi menurut kolom ke-i, didapat rumus:

1) $|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31}$

$$= a_{11} \cdot |M_{11}| + a_{21} \cdot (-1)^{2+1} \cdot |M_{21}| + a_{31} \cdot (-1)^{3+1} \cdot |M_{31}|$$

$$= a_{11}|M_{11}| - a_{21}|M_{21}| + a_{31}|M_{31}|$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

(Untuk ekspansi kolom ke-1)

2) $|A| = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32}$

$$= a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot |M_{12}| + a_{22} \cdot (-1)^{2+2} \cdot |M_{22}| + a_{32} \cdot (-1)^{3+2} \cdot |M_{32}|$$

$$= -a_{12}|M_{12}| + a_{22}|M_{22}| - a_{32}|M_{32}|$$

$$= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

(Untuk ekspansi kolom ke-2)

3) $|A| = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}$

$$= a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot |M_{13}| + a_{23} \cdot (-1)^{2+3} \cdot |M_{23}| + a_{33} \cdot (-1)^{3+3} \cdot |M_{33}|$$

$$= a_{13}|M_{13}| - a_{23}|M_{23}| + a_{33}|M_{33}|$$

$$= a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(Untuk ekspansi kolom ke-3)

Untuk mencari det A dengan metode kofaktor cukup menggunakan satu ekspansi saja, misalnya ekspansi baris ke-1.

b. Cara 2 (*Kaidah/metode Sarrus*)

Untuk mencari determinan dari matriks persegi berordo 3 × 3, akan digunakan suatu metode yang dinamakan *metode Sarrus*.

Adapun langkah-langkah yang harus di lakukan untuk mencari determinan matriks berordo 3 × 3 dengan *metode Sarrus* adalah sebagai berikut:

1) Salin kembali kolom pertama dan kolom kedua matriks A di sebelah kanan tanda determinan.

2) Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal utama (lihat gambar). Nyatakan jumlah hasil kali tersebut dengan *Du*

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$Du = a_{11}\ a_{22}\ a_{33} + a_{12}\ a_{23}\ a_{31} + a_{13}\ a_{21}\ a_{32}$

3) Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal sekunder dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal sekunder (lihat gambar). Nyatakan jumlah hasil harga tersebut dengan *Ds*.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$Ds = a_{31}\ a_{22}\ a_{13} + a_{32}\ a_{23}\ a_{11} + a_{33}\ a_{21}\ a_{12}$

4) Sesuai dengan definisi determinan matriks maka determinan dari matriks A adalah selisih antara *Du* dan *Ds* yaitu *Du* – *Ds*.

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$= (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12})$$

Keempat langkah di atas dapat juga dinyatakan sebagai berikut.

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Adjoint A diperoleh dengan mentranspose matriks kofaktor A_{ij}.

Setelah didapat nilai determinan dari matriks A dan adjoint A, maka invers matriks Adapat ditentukan.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}$$

Contoh :

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Tentukan nilai determinan matriks A dengan menggunakan dua cara di atas (dengan metode kofaktor dan *Kaidah Sarrus*), kemudian tentukan invers dari matriks A dengan menggunakan adjoint !

Jawab :

- Menentukan determinan matriks A dengan menggunakan kofaktor.

Pilih salah satu dari tiga rumus di atas. Sebagai contoh di pilih rumus no 1), yaitu:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} \\ &= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot |M_{11}| + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot |M_{12}| + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot |M_{13}| \\ &= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}| \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan elemen-elemen matriks A yang bersesuaian dengan rumus tersebut didapat:

$$|A| = (-3) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \{(-3)[1 \cdot (-1) - 3 \cdot 0]\} - \{4 \cdot [2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1]\} + \{2 \cdot [2 \cdot 0 - 1 \cdot 1]\}$$

$$= \{(-3)[(-1) - 0]\} - \{4 \cdot [(-2) - 3]\} + \{2 \cdot [0 - 1]\}$$

$$= \{(-3)[-1]\} - \{4 \cdot [-5]\} + \{2 \cdot [-1]\}$$

$$= \{3\} - \{-20\} + \{-2\}$$

$$= 21$$

- Menentukan determinan matriks A dengan menggunakan menggunakan *Kaidah Sarrus*.

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} -3 & 4 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow |A| = (-3) \cdot 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 3 \cdot (-3) - (-1) \cdot 2 \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow |A| = 3 + 12 + 0 - 2 - 0 + 8$$

$$\Leftrightarrow |A| = 21$$

Dengan menggunakan dua cara yang berbeda untuk menghitung determinan matriks A di atas ternyata didapatkan nilai determinan $A = |A| = 21$.

Selanjutnya akan dilakukan menentukan adjoint dari $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}, \text{dengan}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = |M_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) - 0 = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -|M_{12}| = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -[(-2) - 3] = 5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = |M_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = -|M_{21}| = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -[(-4) - 0] = 4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}|M_{22}| = |M_{22}| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = -|M_{23}| = -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -[0 - 4] = 4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = |M_{31}| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = -|M_{32}| = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -[(-9) - 4] = 13$$

$$A_{33} = (-1)^{1+3}|M_{33}| = |M_{33}| = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3) - 8 = -11$$

Sehingga didapat

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 10 \\ 5 & 1 & 13 \\ -1 & 4 & -11 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 4 & 10 \\ 5 & 1 & 13 \\ -1 & 4 & -11 \end{bmatrix}}{21} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{21} & \frac{4}{21} & \frac{10}{21} \\ \frac{5}{21} & \frac{1}{21} & \frac{13}{21} \\ \frac{-1}{21} & \frac{4}{21} & \frac{-11}{21} \end{bmatrix}$$

Jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{21} & \frac{4}{21} & \frac{10}{21} \\ \frac{5}{21} & \frac{1}{21} & \frac{13}{21} \\ \frac{-1}{21} & \frac{4}{21} & \frac{-11}{21} \end{bmatrix}$

D. Aktivitas Pembelajaran

Sebagai aktifitas pembelajaran pada kegiatan belajar 3 ini, Anda diminta menjawab/mengerjakan semua pertanyaan/instruksi yang ada di bawah ini secara individual atau kelompok kecil. Bila posisi Anda sedang ada pada pembelajaran klasikal/diklat, Anda dapat berdiskusi dengan 1 atau 2 orang teman di dekat Anda untuk menjawab/mengerjakan semua pertanyaan/instruksi yang diberikan. Berikut ini pertanyaan/instruksi yang harus Anda jawab/kerjakan.

1. Menentukan matriks dengan determinan tertentu

   a. Berilah contoh matriks ordo 2×2 yang determinannya adalah 1.

   b. Berilah contoh matriks ordo 2×2 yang determinannya adalah -3.

   c. Berilah contoh matriks ordo 2×2 yang determinannya adalah $\frac{1}{2}$.

   d. Berilah contoh matriks ordo 2×2 yang determinannya adalah 0.

2. Menentukan pasangan matriks yang saling invers

a. Berilah dua contoh pasangan matriks yang saling invers, tunjukkan!

b. Berilah contoh matriks ordo 2×2 yang tidak mempunyai pasangan saling invers!

c. Apakah untuk setiap matriks skalar ordo 2×2 pasangan saling inversnya juga matriks skalar ?

d. Apakah jika matriks segitiga bawah ordo 2×2 mempunyai pasangan saling invers maka pasangannya adalah juga matriks segitiga bawah?

3. Menentukan matriks singular dan non singular

a. Berilah dua contoh matriks singular ordo 2×2!

b. Berilah dua contoh matriks non singular ordo 2×2!

c. Apakah ada matriks segitiga bawah ordo 2×2 yang merupakan matriks singular? Berikan contohnya!

4. Menentukan invers matriks ordo 2×2!

a. Berikan contoh jenis-jenis matriks berikut dan tentukan inversnya!

1) Matriks persegi ordo 2×2
2) Matriks nol ordo 2×2
3) Matriks diagonal ordo 2×2
4) Matriks tridiagonal ordo 2×2
5) Matriks sekalar ordo 2×2
6) Matriks simetri ordo 2×2
7) Matriks simetri miring ordo 2×2
8) Matriks identitas ordo 2×2
9) Matriks segitiga atas ordo 2×2
10) Matriks segitiga bawah ordo 2×2
11) Matriks persegi ordo 2×2 dan tansposenya

b. Perhatikan matriks-matriks tersebut dan inversnya (jika ada), Apakah matriks dan inversnya mempunyai jenis yang sama atau matriks dan inversnya sama?

5. Menentukan invers matriks ordo 3×3!

a. Berikan contoh jenis-jenis matriks berikut dan tentukan inversnya menggunakan metode kofaktor dan *metode sarrus*!

1) Matriks persegi ordo 3×3
2) Matriks nol ordo ordo 3×3
3) Matriks diagonal ordo 3×3
4) Matriks tridiagonal ordo ordo 3×3
5) Matriks sekalar ordo ordo 3×3
6) Matriks simetri ordo ordo 3×3
7) Matriks simetri miring ordo 3×3
8) Matriks identitas ordo 3×3
9) Matriks segitiga atas ordo 3×3
10) Matriks segitiga bawah ordo 3×3
11) Matriks persegi ordo 3×3 dan tansposenya

b. Perhatikan matriks-matriks tersebut dan inversnya (jika ada), Apakah matriks dan inversnya mempunyai jenis yang sama atau matriks dan inversnya sama?

E. Latihan/Kasus/Tugas

1. Tentukan determinan dari matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

2. Tunjukkan bahwa pasangan-pasangan matriks berikut ini merupakan pasangan matriks yang saling invers.

   a. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$

   b. $K = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ dan $L = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

3. Diberikan matriks-matriks:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & \frac{1}{2} \\ -7 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}, \text{dan } C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Manakah dari matriks-matriks di atas yang merupakan matriks singular dan matriks *non singular*?

4. Tentukan invers dari matriks-matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{dan } D = \begin{bmatrix} -3 & \frac{1}{2} \\ -12 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, tentukanlah:
   a. minor-minor dari determinan matriks A,
   b. kofaktor-kofaktor dari matriks A,
   c. adjoint dari matriks A,
   d. determinan matriks A dengan menggunakan metode kofaktor, dan
   e. determinan matriks A dengan menggunakan metode sarrus.

6. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix}$, tentukanlah A^{-1}

F. Rangkuman

1. Determinan matriks A di definisikan sebagai selisih antara perkalian elemen-elemen pada diagonal utama dengan perkalian elemen-elemen pada diagonal samping (sekunder). Determinan dari matriks A dinotasikan dengan det A atau $|A|$. Nilai dari determinan suatu matriks berupa bilangan real.
2. Jika A dan B adalah matriks-matriks persegi yang ordonya sama dan $A.B = B.A = I$, maka B adalah invers dari A, ditulis $B = A^{-1}$ dan A invers dari B, ditulis $A = B^{-1}$. Jadi $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$
3. Suatu matriks dikatakan singular jika determinannya nol, dan dikatakan non singular jika determinannya tidak nol.
4. Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka invers matriks A adalah $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, dengan $|A| = ad - bc \neq 0$.
5. Jika eleme-elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A berordo 3×3 dihapuskan maka didapat matriks baru berordo 2×2, dengan determinannya disebut minor dari korespondensi determinan matriks A dan dinyatakan dengan $|M_{ij}|$

6. Kofaktor dari baris ke-i dan kolom ke-j dinyatakan dengan A_{ij} yang ditentukan dengan rumus $A_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$.
7. Misalkan $A = \left(a_{ij}\right)$ suatu matriks persegi berordo $n \times n$ dan A_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka

$$\text{adjoint } A = \text{adj } A = \left(A_{ij}\right)^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Jika matriks A berordo 3×3, maka

$$\text{adj } A = \left(A_{ij}\right)^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

8. Jika A adalah matriks non singular berordo 3×3, maka invers A adalah

$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|}$, dengan $|A|$ = determinan dari matriks A, dan

$Adj\ A$ = adjoint dari matriks A

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Sekarang Anda Telah mempelajari materi-materi tentang determinan matriks ordo 2×2, dua matriks saling invers, matriks singular dan matriks non singular, invers matriks ordo 2×2, minor matriks, kofaktor matriks, adjoint matriks, determinan matriks ordo 3×3, dan Invers matriks ordo 3×3.

Keberhasilan Anda dalam mempelajari materi-materi tersebut berpengaruh pada proses belajar Anda dalam mempelajari materi berikutnya. Pastikan Anda sudah mempelajari materi ini dengan baik. Untuk melihat keberhasilan Anda dalam mempelajari materi-materi tersebut, Anda dapat mencocokkan jawaban soal-soal latihan yang sudah Anda kerjakan dengan kunci jawaban yang tersedia. Bila skor Anda minimal sudah mencapai angka 80 (penskoran menggunakan skala 0 sampai 100), berarti Anda sudah berhasil dalam mempelajari materi pada kegiatan pembelajaran 3 ini dan dapat melanjutkan mempelajari materi berikutnya. Tetapi apabila skor Anda masih kurang dari 80, Anda harus mempelajari ulang materi yang belum Anda kuasai kemudian mengerjakan ulang latihan soal yang bersesuaian dengan materi yang Anda pelajari ulang tersebut hingga total skor latihan soal mencapai 80 atau lebih.

H. Kunci Jawaban Soal Latihan

1. Det $A = 2$, det $B = 1$, det $C = 14$
2. a. $A.B = B.A = I$ b. $K.L = L.K = I$
3. Matriks A matriks non singular, matriks B, dan C matriks singular
4. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$, $C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$,

   dan D^{-1} tidak terdefinisi
5. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$,

   a. minor-minor dari determinan matriks A adalah:

   $$|M_{11}| = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix},\ |M_{12}| = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix},\ |M_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

   $$|M_{21}| = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix},\ |M_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix},\ |M_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

   $$|M_{31}| = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix},\ |M_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix},\ |M_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

   b. kofaktor-kofaktor dari matriks A adalah:

   $$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix},\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix},\ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

   $$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix},\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix},\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

   $$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix},\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix},\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

   c. adjoint dari matriks A adalah:

   $$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

   d. determinan matriks A (antara lain dengan menggunakan metode kofaktor, ekspansi baris ke-1) adalah:

   $$|A| = 1\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

e. determinan matriks A dengan menggunakan metode sarrus adalah:

$|A| = 1.5.9 + 4.8.3 + 7.2.6 - 3.5.7 - 6.8.1 - 9.2.4 = 0$

6.

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 9 & 0 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

KEGIATAN PEMBELAJARAN 4:
Vektor

A. Tujuan

Peserta Guru Pembelajar atau pembaca dapat menggunakan konsep-konsep matriks dan vektor.

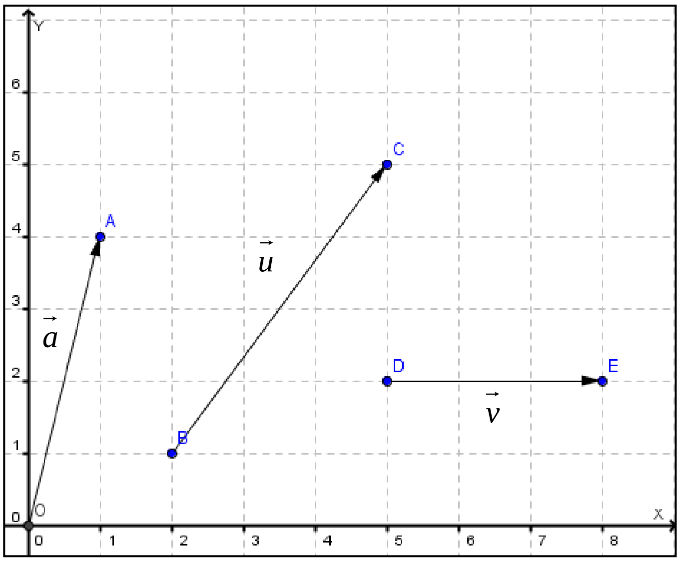
B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Peserta Guru Pembelajar atau pembaca dapat menggunakan konsep proyeksi dalam memecahkan masalah vektor.

C. Uraian Materi

1. Notasi Vektor

Secara geometris, vektor digambarkan oleh sebuah ruas garis berarah dengan panjang ruas menunjukkan besar, sedangkan arahnya menunjukkan arah vektor itu. Misal vektor pada gambar $\overrightarrow{OA}$ berikut. Titik O disebut <u>titik asal</u> atau <u>titik pangkal</u> vektor, dan titik A disebut <u>titik terminal</u> atau <u>terminus</u> vektor.

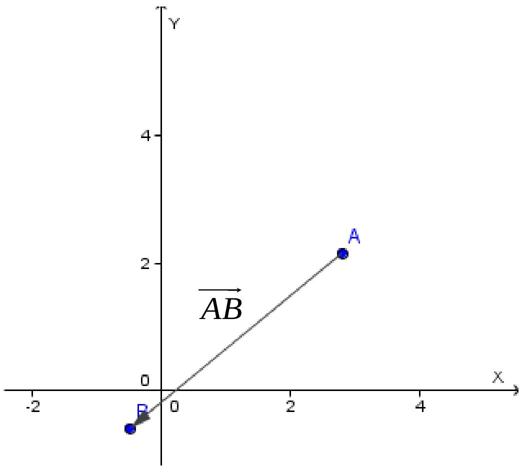


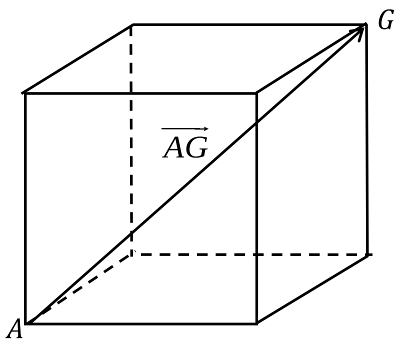
Suatu vektor dapat dilambangkan dengan notasi huruf kecil yang diberi tanda panah di atas huruf tersebut, misal vektor $\vec{a}$. Jika $\vec{a}$ menyatakan ruas garis berarah dari *O* ke *A* maka dapat ditulis $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Besar atau panjang vektor $\vec{a}$ dinyatakan dengan $|\vec{a}|$ atau $|\overrightarrow{OA}|$ Pada gambar,

$\vec{u} = \overrightarrow{BC}$ ($\overrightarrow{BC}$ mewakili $\vec{u}$)

$\vec{v} = \overrightarrow{DE}$ ($\overrightarrow{DE}$ mewakili $\vec{v}$)

Pada tulisan ini, akan dibahas vektor pada ruang dimensi dua dan ruang dimensi tiga. Pada gambar diperlihatkan ruas garis berarah yang dilukiskan pada ruang dimensi dua dan ruang dimensi tiga.





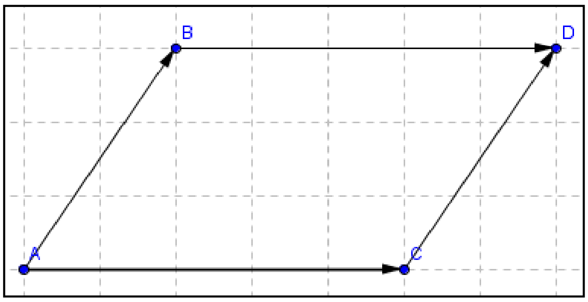
2. Pendekatan Geometris Vektor

Kesamaan Dua Vektor

Vektor $\vec{u}$ dikatakan sama dengan vektor $\vec{v}$ (ditulis: $\vec{u} = \vec{v}$) jika dan hanya jika:

- panjang vektor $\overrightarrow{AB}$ sama dengan panjang vektor $\vec{v}$, dan
- arah vektor $\vec{u}$ sama dengan arah vektor $\vec{v}$

Contoh:

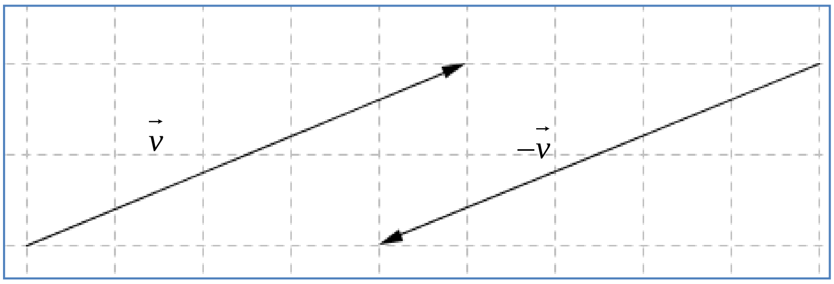


Vektor $\overrightarrow{AB}$ = Vektor $\overrightarrow{CD}$

Vektor $\overrightarrow{AC}$ = Vektor $\overrightarrow{BD}$

Lawan Suatu Vektor

Suatu vektor yang arahnya berlawanan dengan vektor $\vec{v}$ tetapi memiliki besar yang sama dinyatakan dengan $-\vec{v}$.

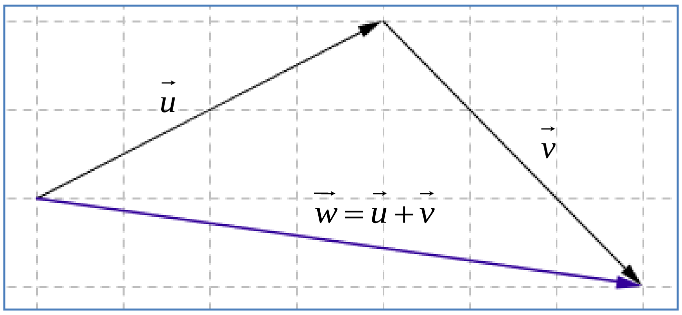


Penjumlahan dan Pengurangan Vektor

1) Penjumlahan dua vektor

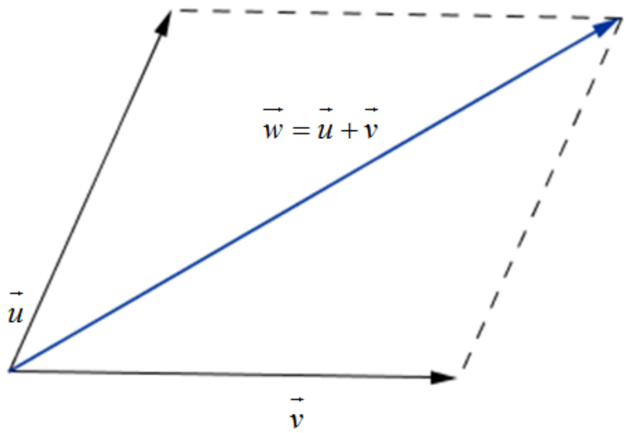
- Metode Segitiga

Jumlah atau resultan dari vektor-vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah vektor $\vec{w}$ yang dibentuk dengan menempatkan titik awal dari $\vec{v}$ pada titik terminal dari $\vec{u}$ dan kemudian menghubungkan titik awal dari $\vec{u}$ dengan titik terminal dari $\vec{v}$. Jumlah ini ditulis $\vec{u}+\vec{v}$, yakni $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$.



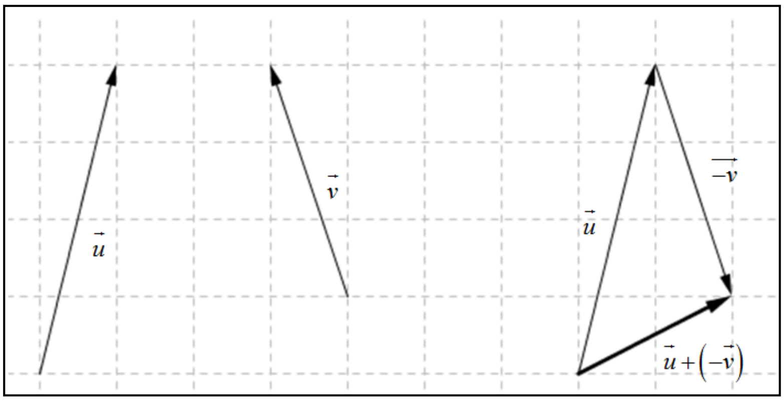
- Metode Jajargenjang

Penjumlahan vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ dengan metode jajargenjang dilakukan dengan memindahkan vektor $\vec{v}$ (tanpa mengubah arah dan besarnya), sehingga titik pangkal vektor $\vec{v}$ berimpit dengan titik pangkal vektor $\vec{u}$. Dengan proses ini dapat diperoleh sketsa jajargenjang seperti pada gambar di bawah. Vektor $\vec{w}$ yang merupakan jumlah vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$, $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ ditunjukkan sebagai diagonal dari jajargenjang yang berpangkal pertemuan titik pangkal vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.



2) Pengurangan vektor

Selisih dari vektor-vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah dinyatakan dengan $\vec{u}-\vec{v}$, adalah vektor $\vec{w}$ yang apabila ditambahkan dengan vektor $\vec{v}$ menghasilkan vektor $\vec{u}$. Secara ekuivalen, $\vec{u}-\vec{v}$ dapat didefinisikan sebagai jumlah vektor $\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$.



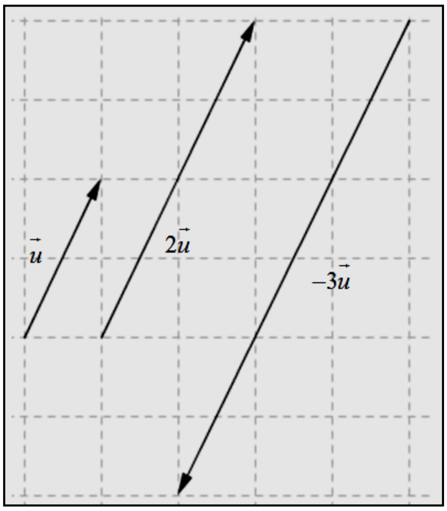
Jika $\vec{u} = \vec{v}$, maka $\vec{u}-\vec{v}$ didefinisikan sebagai <u>vektor nol</u> dan dinotasikan dengan simbol $\vec{0}$. Vektor nol adalah vektor yang besarnya nol dan tak memiliki arah tertentu.

3. Hasil Kali Vektor dengan Skalar

Untuk sebarang skalar *m*, apabila $m>0$, hasil kali suatu vektor $\vec{u}$ dengan m adalah suatu vektor $m\vec{u}$ yang besarnya $|m|$ kali besar vektor $\vec{u}$ dan arahnya searah dengan vektor $\vec{u}$.

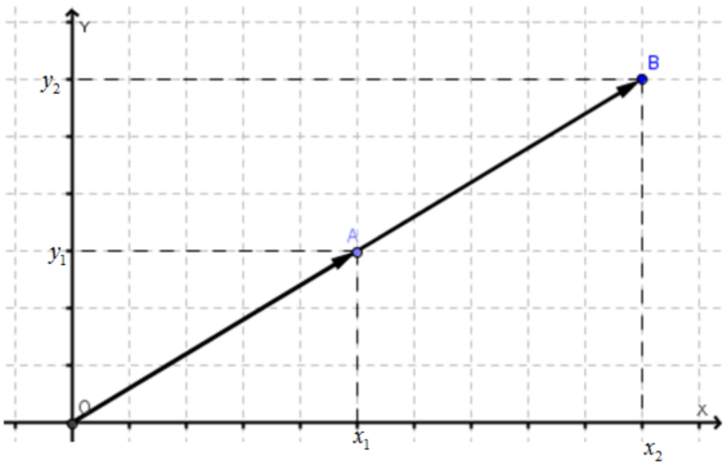
Apabila $m<0$, hasil kali suatu vektor $\vec{u}$ dengan m adalah suatu vektor $m\vec{u}$ yang besarnya $|m|$ kali besar vektor $\vec{u}$ namun arahnya berlawanan dengan vektor $\vec{u}$.

Apabila $m=0$, maka $m\vec{u}$ merupakan vektor nol.



4. Vektor Posisi dan Vektor Basis di Ruang Dimensi Dua ($\mathbb{R}^2$)

Vektor pada bidang datar biasa digambarkan dengan koordinat kartesius. Vektor di ruang dimensi dua ditandai dengan berapa jauh perpindahan ke kanan atau ke kiri (sumbu X) dan perpindahan ke atas atau ke bawah (sumbu Y).



Vektor posisi adalah vektor yang berpangkal di titik O. Vektor posisi titik A $\left(\overrightarrow{OA}\right)$ pada bidang dapat dinyatakan sebagai pasangan bilangan berurutan, yaitu:

- dalam bentuk vektor baris $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$
- dalam bentuk vektor kolom $\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ atau $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$. Selanjutnya pada tulisan ini akan digunakan notasi kurung siku untuk menyatakan vektor kolom.

Pada gambar, $\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ dan $\overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ maka diperoleh $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$.

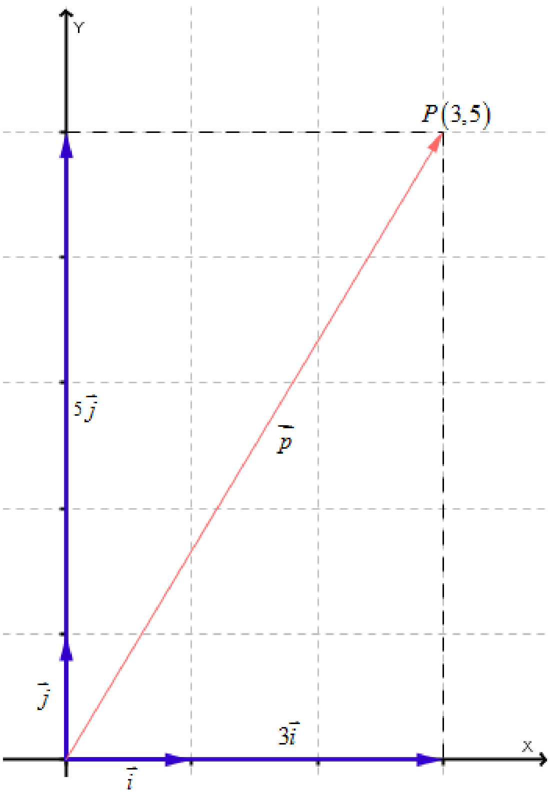
Contoh:

Diketahui titik $A(3,-2)$ dan $B(-1,5)$. Jika vektor $\vec{s}$ wakil dari ruas garis berarah $\overrightarrow{AB}$ dan vektor $\vec{t}$ wakil dari ruas garis berarah $\overrightarrow{BA}$, tentukan vektor $\vec{s}$ dan vektor $\vec{t}$ dalam bentuk vektor kolom.

Penyelesaian:

$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)-3 \\ 5-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$

$\vec{t} = \overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-(-1) \\ (-2)-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$



Pada $\mathbb{R}^2$, vektor basis dengan arah sumbu X dinotasikan dengan $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; dan vektor basis dengan arah sumbu Y dinotasikan dengan $\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Setiap vektor di $\mathbb{R}^2$ dapat dinyatakan dalam bentuk kombinasi linear dari vektor basis $\vec{i}$ dan $\vec{j}$. Misalkan $P(3,5)$ di $\mathbb{R}^2$, maka:

Vektor $\overrightarrow{OP}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor basis $\vec{i}$ dan $\vec{j}$, yakni:

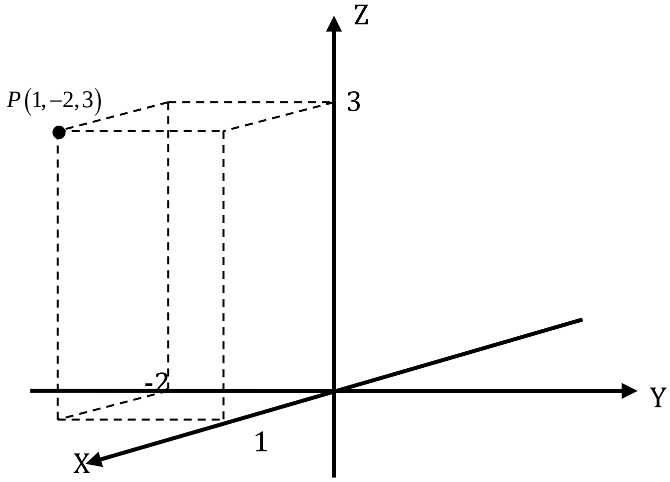
$\overrightarrow{OP} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$

5. Vektor Posisi dan Vektor Basis di Ruang Dimensi Tiga ($\mathbb{R}^3$)

Letak suatu titik A pada $\mathbb{R}^3$ ditentukan oleh tripel bilangan terurut (x, y, z). Tripel bilangan terurut ini dinamakan sebagai koordinat ruang titik A.

Letak titik P dengan koordinat (x, y, z) dalam sistem koordinat ruang diperlihatkan pada gambar berikut.

Contoh $P(1,-2,3)$



Vektor posisi titik A $(\overrightarrow{OA})$ pada ruang dapat dinyatakan sebagai pasangan bilangan berurutan, yaitu:

- dalam bentuk vektor baris $\overrightarrow{OA} = (x_a, y_a, z_a)$
- dalam bentuk vektor kolom $\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix}$

Dengan demikian, vektor dengan titik pangkal di $A(x_a, y_a, z_a)$ dan titik terminal di $B(x_b, y_b, z_b)$ ditentukan oleh: $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{bmatrix}$.

Pada $\mathbb{R}^3$ vektor basis dengan arah sumbu X dinotasikan dengan $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; vektor basis dengan arah sumbu Y dinotasikan dengan $\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; dan vektor basis dengan arah sumbu Z dinotasikan dengan $\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vektor-vektor di ! $\mathbb{R}^3$ juga dapat dinyatakan dalam bentuk kombinasi linear dari vektor basis $\vec{i}$, $\vec{j}$ dan $\vec{k}$. Misal: titik $P(1,-2,3)$. Maka vektor $\overrightarrow{OP} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

6. Operasi Aljabar Vektor di Ruang Dimensi Dua dan Ruang Dimensi Tiga

Misalkan $\vec{s} = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix}$ dan $\vec{t} = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$ vektor di ! $\mathbb{R}^2$, dan $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix}$ vektor di ! $\mathbb{R}^3$, dan *m* bilangan real. Maka berlaku operasi aljabar sebagai berikut.

a. Kesamaan vektor

Dua buah vektor dikatakan sama apabila setiap komponen yang bersesuaian bernilai sama. Dari sini maka:

Pada R2, berlaku $\vec{s} = \vec{t}$ jika dan hanya jika $x_s = x_t$ dan $y_s = y_t$.

Pada R3, berlaku $\vec{u} = \vec{v}$ jika dan hanya jika $x_u = x_v$, $y_u = y_v$ dan $z_u = z_v$

b. Penjumlahan vektor

Penjumlahan atau resultan vektor dapat dilakukan dengan menjumlahkan komponen-komponennya.

Pada R2, jika $\vec{r} = \vec{s} + \vec{t}$, maka $\vec{r} = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s + x_t \\ y_s + y_t \end{bmatrix}$

Pada R3, jika $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, maka $\vec{w} = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \\ z_u + z_v \end{bmatrix}$

Unsur identitas dalam operasi penjumlahan vektor adalah vektor nol $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$, dan vektor nol $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$. Sehingga untuk sebarang vektor $\vec{a}$ berlaku $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Lawan dari vektor $\vec{s} = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ adalah vektor $-\vec{s} = \begin{bmatrix} -x_s \\ -y_s \end{bmatrix}$

Lawan dari vektor $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ adalah vektor $-\vec{u} = \begin{bmatrix} -x_u \\ -y_u \\ -z_u \end{bmatrix}$

c. *Pengurangan vektor*

Seperti halnya penjumlahan vektor, pengurangan vektor dapat dilakukan dengan mengurangkan komponen-komponen yang bersesuaian.

Pada $\mathbb{R}^2$, jika $\vec{r} = \vec{s} - \vec{t}$, maka $\vec{r} = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s - x_t \\ y_s - y_t \end{bmatrix}$

Pada $\mathbb{R}^3$, jika $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$, maka $\vec{w} = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u - x_v \\ y_u - y_v \\ z_u - z_v \end{bmatrix}$

d. *Perkalian vektor dengan bilangan skalar*

Pada $\mathbb{R}^2$, hasil kali skalar m dengan $\vec{s} = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix}$ adalah $m\vec{s} = \begin{bmatrix} m \cdot x_s \\ m \cdot y_s \end{bmatrix}$.

Pada $\mathbb{R}^3$, hasil kali skalar m dengan $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix}$ adalah $m\vec{u} = \begin{bmatrix} m \cdot x_u \\ m \cdot y_u \\ m \cdot z_u \end{bmatrix}$.

Perkalian skalar dengan vektor memenuhi sifat-sifat berikut. Diketahui m dan n bilangan riil, $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ suatu vektor maka berlaku:

- $m(-\vec{u}) = -m(\vec{u}) = -m\vec{u}$
- $m(n\vec{u}) = (mn)\vec{u}$
- $(m+n)\vec{u} = m\vec{u} + n\vec{u}$
- $m(\vec{u} + \vec{v}) = m\vec{u} + m\vec{v}$

Contoh:

1. Diketahui vektor $\vec{a}=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$, vektor $\vec{b}=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$ dan vektor $\vec{c}=\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$, berlaku hubungan $2\vec{a}-3\vec{b}+n\vec{c}=\begin{bmatrix}0\\-4\end{bmatrix}$ dengan *n* bilangan real. Tentukan nilai *n*.

   Jawab.

   Diketahui:

   $$2\vec{a}-3\vec{b}+n\vec{c}=\begin{bmatrix}0\\-4\end{bmatrix}$$

   Maka berlaku:

   $$2\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-4\end{bmatrix}$$
   $$\begin{bmatrix}6\\-4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2n\\-n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-4\end{bmatrix}$$
   $$\begin{bmatrix}6-12-2n\\-4-3-n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-4\end{bmatrix}$$
   $$\begin{bmatrix}-6-2n\\-7-n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-4\end{bmatrix}$$

   Dengan aturan kesamaan dua vektor, berlaku:

   $-6-2n=0$ atau $-7-n=-4$, dipenuhi untuk $n=-3$.

2. Diketahui titik $P(4,1,-5)$ dan titik $Q(1,7,-14)$. Titik *R* titik pada garis hubung $\overrightarrow{PQ}$ sehingga $\overrightarrow{PR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$.

   a. Tentukan $\overrightarrow{PQ}$ dan $\overrightarrow{PR}$ dalam bentuk kombinasi linear vektor satuan.

   b. Tentukan koordinat titik *R*.

   Jawab

a. $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_q - x_p \\ y_q - y_p \\ z_q - z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4 \\ 7-1 \\ -14-(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -9 \end{bmatrix}$

Jadi $\overrightarrow{PQ} = -3\vec{i} + 6\vec{j} - 9\vec{k}$

$\overrightarrow{PR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

Jadi $\overrightarrow{PR} = -\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

b. Untuk menentukan koordinat titik *R*, misalkan koordinat *R* adalah (x, y, z), maka vektor posisi $\overrightarrow{OR} = \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Dari hasil yang diperoleh sebelumnya, $\overrightarrow{PR} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ sehingga berlaku:

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-4 \\ y-1 \\ z+5 \end{bmatrix}$$

Menggunakan kesamaan dua vektor, berlaku:

$$x - 4 = -1 \Leftrightarrow x = 3$$

$$y - 1 = 2 \Leftrightarrow y = 3$$

$$z + 5 = -3 \Leftrightarrow z = -8$$

Jadi koordinat titik *R* adalah $(3, 3, -8)$.

7. Panjang Vektor

Besar atau panjang vektor $\overrightarrow{PQ}$ dinotasikan dengan $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$.

Pada R2, misalkan $P(x_p, y_p)$ dan $Q(x_q, y_q)$. Diperoleh $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_q - x_p \\ y_q - y_p \end{bmatrix}$. Dari komponen-komponen vektor $\overrightarrow{PQ}$, ditentukan panjang atau besar vektor $\overrightarrow{PQ}$ dirumuskan sebagai berikut.

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{\left(x_q - x_p\right)^2 + \left(y_q - y_p\right)^2}$$

Jika diketahui vektor $\vec{p} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, maka:

$$\left|\vec{p}\right| = \sqrt{x_1^{\;2} + y_1^{\;2}}$$

Pada R3, panjang atau besar vektor $\overrightarrow{RS}$ dirumuskan sebagai berikut.

$$\left|\overrightarrow{RS}\right| = \sqrt{\left(x_s - x_r\right)^2 + \left(y_s - y_r\right)^2 + \left(z_s - z_r\right)^2}$$

dengan $R(x_r, y_r, z_r)$ dan $S(x_s, y_s, z_s)$ titik-titik di dalam ruang.

Jika diketahui vektor $\vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$, maka:

$$\left|\vec{r}\right| = \sqrt{x_1^{\;2} + y_1^{\;2} + z_1^{\;2}}$$

Vektor satuan adalah vektor yang panjangnya satu satuan. Vektor satuan dari $\vec{r}$ adalah vektor yang arahnya sama dengan arah vektor $\vec{r}$ dan panjangnya $\frac{1}{\left|\vec{r}\right|}$.

Jadi, vektor satuan dari $\vec{r}$ adalah $\frac{r}{\left|\vec{r}\right|}$.

Contoh

1. Diketahui $\vec{a} = 7\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k}$ dan $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ dan $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Tentukan panjang vektor $\vec{a}$, vektor $\vec{b}$ dan vektor $\vec{c}$.

   Jawab

   Panjang vektor $\vec{a} = \left|\vec{a}\right| = \sqrt{7^2 + (-1)^2 + 8^2} = \sqrt{49+1+64} = \sqrt{114}$ satuan

   Panjang vektor $\vec{b} = \left|\vec{b}\right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{9+4+16} = \sqrt{29}$ satuan

   $$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

   Panjang vektor $\vec{c} = \left|\vec{c}\right| = \sqrt{10^2 + (-3)^2 + 12^2} = \sqrt{100+9+144} = \sqrt{253}$ satuan

2. Diketahui vektor $\vec{r} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$. Tentukan vektor satuan dari vektor $\vec{r}$.

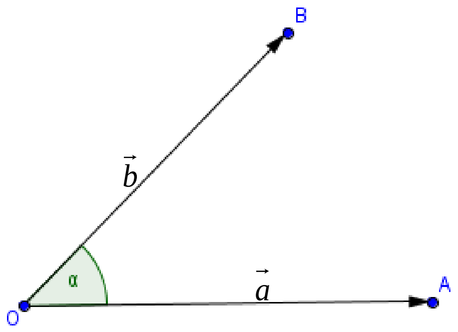
   Jawab

   Panjang vektor $\vec{r} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$

   Vektor satuan dari $\vec{r}$ adalah $\dfrac{r}{\left|\vec{r}\right|} = \dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{7} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \end{bmatrix}$.

8. Perkalian Skalar Dua Vektor

Misalkan diketahui dua vektor sebarang (baik di $\mathbb{R}^2$ maupun di $\mathbb{R}^3$), yakni vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$.



Hasil kali skalar antara vektor $\vec{a}$ dengan vektor $\vec{b}$ ditulis dengan notasi $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (dibaca: *a* kali titik *b*), ditentukan sebagai berikut.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha$$

dengan:

- $|\vec{a}|$ dan $|\vec{b}|$ berturut-turut menyatakan panjang vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$
- Sudut α menyatakan besar sudut terkecil (lancip) yang dibentuk oleh vektor $\vec{a}$ terhadap vektor $\vec{b}$

Hasil Kali Skalar Dua Vektor di R2

Misalkan $\vec{a} = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \end{bmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix}$ adalah vektor-vektor di R2. Hasil kali skalar vektor $\vec{a}$ dengan vektor $\vec{b}$ ditentukan sebagai berikut.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b$$

Hasil Kali Skalar Dua Vektor di R3

Misalkan $\vec{a} = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix}$ adalah vektor-vektor di R3. Hasil kali skalar vektor $\vec{a}$ dengan vektor $\vec{b}$ ditentukan sebagai berikut.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

Contoh

1. Diketahui $|\vec{a}|$ =3 cm dan $|\vec{b}|$= 4 cm dan vektor $\vec{a}$ dengan $\vec{b}$ membentuk sudut 60°.

   Tentukan perkalian skalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ dan $\vec{b} \cdot \vec{a}$.

2. Jika $\vec{a} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$, tentukan sudut antara vektor $\vec{a}$ dengan $\vec{b}$.

3. Diketahui vektor $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + n\vec{k}$ dan $\vec{b} = 2\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k}$. Jika vektor $\vec{a}$ ortogonal (tegak lurus) terhadap $\vec{b}$, tentukan nilai *n*.

Jawab

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 3 \cdot 4\cos(60°) = 6\text{ cm}$

   $\vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta = 4 \cdot 3\cos(60°) = 6\text{ cm}$

2. Diketahui $\vec{a} = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$

   $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b = 8 \cdot 5 + 4 \cdot (-4) = 24$

   $|\vec{a}| = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$ dan $|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$

   Dari $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, berlaku $\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, sehingga diperoleh:

   $$\cos\theta = \frac{24}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{41}} = \frac{24}{57{,}27} = 0{,}4423$$

   Dengan menggunakan kalkulator, diperoleh:

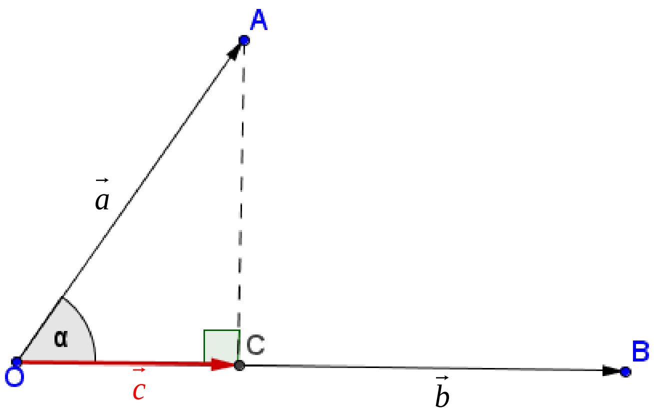
   $\theta = \cos^{-1}(0{,}4423)$=63,75°

3. Vektor $\vec{a} = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ n \end{bmatrix}$ ortogonal terhadap $\vec{b} = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix}$, maka sudut antara keduanya sebesar 90°, sehingga $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90° = 0$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$
$$x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0$$
$$1 \cdot 2 + 2 \cdot (-10) + n \cdot 2 = 0$$
$$2 - 20 + 2n = 0$$
$$n = 9$$

9. Proyeksi Vektor

Misalkan $\overrightarrow{OA}$ mewakili vektor $\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}$ mewakili vektor $\vec{b}$ dan α menyatakan besar sudut antara vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$.



Pada gambar, proyeksi titik A pada vektor $\overrightarrow{OB}$ adalah titik C dengan panjang $\overrightarrow{OC}$ ditentukan oleh:

$$\left|\overrightarrow{OC}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right| \cos\alpha = \left|\vec{a}\right| \cos\alpha$$

Panjang vektor $\overrightarrow{OC}$ ini dinamakan sebagai <u>proyeksi skalar ortogonal</u> (biasa disingkat dengan <u>proyeksi skalar</u> saja) dari vektor $\vec{a}$ pada arah vektor $\vec{b}$. Proyeksi skalar dari vektor $\vec{a}$ pada vektor $\vec{b}$ juga menyatakan <u>panjang proyeksi</u> dari vektor $\vec{a}$ pada arah vektor $\vec{b}$.

Perhatikan kembali pada gambar. Vektor $\vec{c}$ merupakan proyeksi vektor $\vec{a}$ pada arah vektor $\vec{b}$. Vektor $\vec{c}$ dinamakan <u>proyeksi vektor ortogonal</u> (atau <u>proyeksi vektor</u>) dari vektor $\vec{a}$ pada arah vektor $\vec{b}$.

Proyeksi skalar dari vektor $\vec{a}$ pada arah vektor $\vec{b}$, ditentukan oleh:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\cos\alpha$$

Substitusi nilai $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, diperoleh:

$$|\vec{c}| = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Proyeksi vektor dari vektor $\vec{a}$ pada arah vektor $\vec{b}$, ditentukan oleh:

$$\vec{c} = |\vec{c}|\vec{e}$$

dengan $\vec{e}$ adalah vektor satuan dari vektor $\vec{c}$. Karena vektor $\vec{c}$ searah dengan vektor $\vec{b}$, maka vektor satuan dari vektor $\vec{c}$ sama dengan vektor satuan dari vektor $\vec{b}$. Ingat kembali, vektor satuan dari vektor $\vec{b}$ ditentukan oleh:

$$\vec{e} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Apabila $|\vec{c}| = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$ dan $\vec{e} = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ disubstitusikan ke $\vec{c} = |\vec{c}|\vec{e}$, diperoleh

$$\vec{c} = |\vec{c}|\vec{e} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\,\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$\vec{c} = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$$

Contoh:

1. Diketahui titik $A(2,3,-1)$ dan $B(-2,-4,3)$ dan vektor $\vec{p} = 4\hat{i} - 3j + \hat{k}$.

    a. Tentukan proyeksi skalar ortogonal vektor $\vec{p}$ pada arah $\overrightarrow{AB}$

    b. Tentukan proyeksi vektor ortogonal vektor $\vec{p}$ pada arah $\overrightarrow{AB}$

2. Diketahui titik $A(1,2,2)$, $B(0,1,0)$ dan $C(2,-1,-1)$. Tentukan proyeksi vektor ortogonal $\overrightarrow{AB}$ pada arah $\overrightarrow{AC}$ dan proyeksi vektor ortogonal $\overrightarrow{AC}$ pada arah $\overrightarrow{AB}$.

Jawab

1. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-2 \\ -4-3 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{p} \cdot \overrightarrow{AB} = (-4)\cdot 4 + (-7)\cdot(-3) + 4\cdot 1 = 9$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-7)^2 + 4^2} = \sqrt{81} = 9$

a. Misal $|\vec{c}|$ adalah proyeksi skalar ortogonal vektor $\vec{p}$ pada arah $\overrightarrow{AB}$.

$$|\vec{c}| = \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{9}{9} = 1$$

Jadi proyeksi skalar ortogonal vektor $\vec{p}$ pada arah $\overrightarrow{AB}$ adalah 1.

b. Misal $\vec{c}$ proyeksi vektor ortogonal vektor $\vec{p}$ pada arah $\overrightarrow{AB}$.

$$\vec{c} = \left(\frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}\right)\overrightarrow{AB} = \frac{9}{9^2}\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/9 \\ -7/9 \\ 4/9 \end{pmatrix}$$

Jadi proyeksi vektor ortogonal vektor $\vec{p}$ pada arah $\overrightarrow{AB}$ adalah $\begin{pmatrix} -4/9 \\ -7/9 \\ 4/9 \end{pmatrix}$.

2. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-2 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-2 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{19}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot(-3) + (-2)\cdot(-3) = 8$$

Misal $\vec{c}$ proyeksi vektor ortogonal $\overrightarrow{AB}$ pada arah $\overrightarrow{AC}$,

$$\vec{c} = \left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2} \right) \overrightarrow{AC} = \frac{8}{19} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/19 \\ -24/19 \\ -24/19 \end{pmatrix}$$

Jadi proyeksi vektor ortogonal $\overrightarrow{AB}$ pada arah $\overrightarrow{AC}$ adalah $\begin{pmatrix} 8/19 \\ -24/19 \\ -24/19 \end{pmatrix}$.

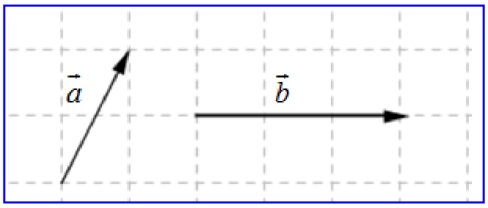
Misal $\vec{d}$ proyeksi vektor ortogonal $\overrightarrow{AC}$ pada arah $\overrightarrow{AB}$,

$$\vec{c} = \left(\frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2} \right) \overrightarrow{AB} = \frac{8}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/5 \\ -8/5 \\ -16/5 \end{pmatrix}$$

Jadi proyeksi vektor ortogonal $\overrightarrow{AC}$ pada arah $\overrightarrow{AB}$ adalah $\begin{pmatrix} -8/5 \\ -8/5 \\ -16/5 \end{pmatrix}$

D. Aktivitas Belajar

Kegiatan 1.



1. Vektor-vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ digambarkan sebagai berikut.

   Gambarkan dan jelaskan diagram vektor yang menunjukkan:

   a. $\vec{s} = \vec{a} + 2\vec{b}$

   b. $\vec{t} = 2\vec{a} - \vec{b}$

2. Pada kubus *ABCD.EFGH*, tentukan resultan dari penjumlahan vektor $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{HE}$.

Diskusikan permasalahan tersebut dan presentasikan hasil kerja Anda.

Kegiatan 2.

1. Diketahui $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, dan $\vec{w}$ resultan dari vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.

   a. Nyatakan vektor $\vec{w}$ dalam bentuk vektor kolom.

   b. Tentukan panjang vektor $\vec{w}$.

   c. Tentukan vektor satuan dari $\vec{w}$.

2. Diketahui $\vec{p} = 9\hat{i} + 3\hat{j}$ dan $\vec{q} = 4\hat{i} + 8\hat{j}$. Tentukan $-\frac{1}{3}\vec{p}$ dan $\frac{1}{4}\vec{q}$.

3. Diketahui $A(5,2,-3)$, $B(6,1,4)$, $C(-3,-2,-1)$ dan $D(-1,-4,13)$. Jika $\overrightarrow{AB} = k \times \overrightarrow{CD}$, tentukan nilai k (k bilangan real).

4. Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Tentukan besar sudut antara vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$.

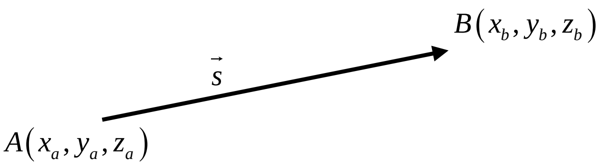
5. Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Tentukan proyeksi skalar ortogonal vektor $\vec{a}$ pada arah vektor $\vec{b}$, dan proyeksi vektor ortogonal vektor $\vec{a}$ pada arah vektor $\vec{b}$.

6. Misalkan $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ y \\ 2 \end{bmatrix}$. Jika proyeksi skalar ortogonal vektor $\vec{a}$ pada arah vektor $\vec{b}$ sama dengan setengah panjang vektor $\vec{b}$, carilah nilai-nilai y yang mungkin.

Diskusikan permasalahan tersebut dan presentasikan hasil kerja Anda.

E. Rangkuman

- Vektor adalah suatu besaran yang mempunyai nilai dan arah tertentu.



- Notasi vektor

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{bmatrix} = (x_b - x_a)\hat{i} + (y_b - y_a)\,j + (z_b - z_a)k$$

- Panjang vektor

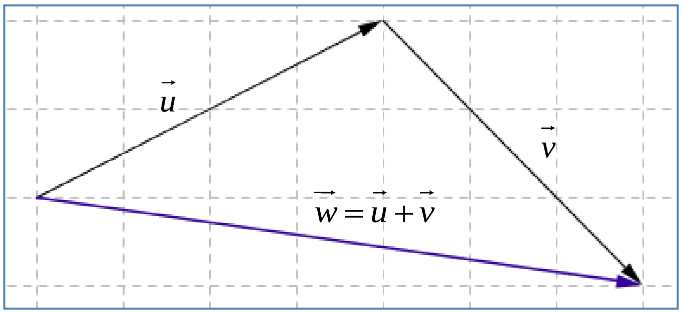
Panjang atau besar vektor $\overrightarrow{RS}$ dirumuskan sebagai berikut.

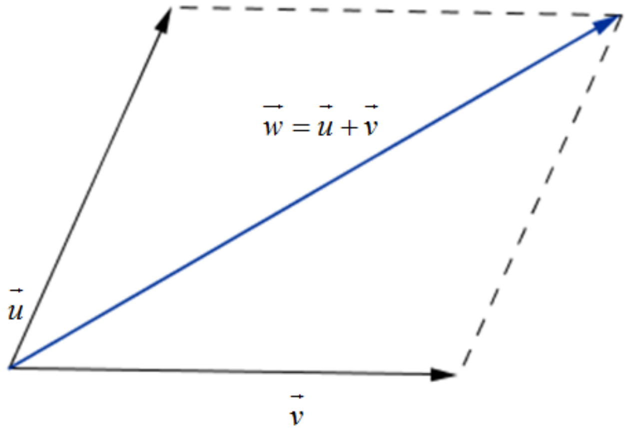
$$\left|\overrightarrow{RS}\right| = \sqrt{(x_s - x_r)^2 + (y_s - y_r)^2 + (z_s - z_r)^2}$$

- Vektor Satuan

Vektor satuan dari $\vec{r}$ adalah $\dfrac{r}{|\vec{r}|}$.

- Penjumlahan vektor





$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, maka $\vec{w} = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \\ z_u + z_v \end{bmatrix}$

- Hasil kali skalar

Hasil kali skalar antara vektor $\vec{a}$ dengan vektor $\vec{b}$ ditulis dengan notasi $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (dibaca: *a* kali titik *b*), ditentukan sebagai berikut.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

- Proyeksi ortogonal

Proyeksi skalar dari vektor $\vec{a}$ pada arah vektor $\vec{b}$, ditentukan oleh:

$$\left|\vec{c}\right| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$

Proyeksi vektor dari vektor $\vec{a}$ pada arah vektor $\vec{b}$, ditentukan oleh:

$$\vec{c} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\right)\vec{b}$$

F. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Evaluasi Diri

Untuk mengukur ketercapaian peserta dalam mempelajari bahan belajar ini lakukan evaluasi diri sebagai berikut secara jujur. Evaluasi terdiri dari lima soal. Pada masing-masing soal, pengerjaan yang benar mendapatkan skor maksimal 10. Jadi skor total 50. Capaian kompetensi (CK) dirumuskan sebagai

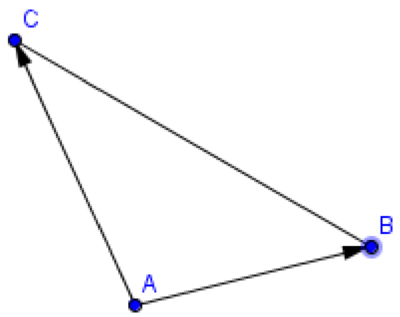
$$\text{CK} = \frac{\text{Skor yang diperoleh}}{50} \times 100\%$$

Setelah mengerjakan semua soal evaluasi cocokkan jawaban Anda dengan jawaban evaluasi pada lampiran untuk mengukur capaian kompetensi (CK).

Soal Latihan:

Pilihlah salah satu jawaban yang tepat!

1. Perhatikan gambar berikut. Hasil dari $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ adalah ....



A. $\overrightarrow{BC}$

B. $\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{BA}$

D. $\overrightarrow{CB}$

E. $\overrightarrow{CA}$

2. Diketahui titik-titik $P(1,1)$, $Q(5,3)$ dan $R(2,4)$. Jika titik S merupakan proyeksi titik R pada vektor $\overrightarrow{PQ}$, maka panjang $\overrightarrow{PS}$ adalah ...

A. $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ C. $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ E. $\sqrt{5}$

B. $\frac{1}{3}\sqrt{5}$ D. $\frac{1}{2}\sqrt{5}$

3. Panjang proyeksi ortogonal vektor $\vec{a} = -\sqrt{3}\vec{i} + p\vec{j} + \vec{k}$ terhadap vektor $\vec{b} = \sqrt{3}\vec{i} + 2\vec{j} + p\vec{k}$ adalah $\frac{2}{3}$. Nilai *p*= ...

A. 3 C. $\frac{1}{3}$ E. -3

B. 2 D. -2

4. Diketahui $A(2,-1,4)$, $B(4,1,3)$ dan $C(2,0,5)$. Kosinus sudut antara $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$ adalah ...

A. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{3}$ E. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

B. $\frac{1}{6}\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$

5. Diketahui $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, dan panjang proyeksi vektor $\vec{a}$ pada arah vektor $\vec{b}$ adalah $\frac{2}{\sqrt{6}}$. Bila sudut antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah α, nilai cos α = ...

A. $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ C. $\frac{5}{9}\sqrt{3}$ E. $\frac{2}{3}\sqrt{6}$

B. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ D. $\frac{1}{9}\sqrt{6}$

Tindak Lanjut

Seperti telah dijelaskan pada bagian sebelumnya bahwa evaluasi yang dilakukan oleh diri sendiri secara jujur adalah kunci keberhasilan mengukur capaian kompetensi (CK). Berkaitan dengan itu, pertimbangkan hal berikut.

Perolehan CK (dalam %)	Deskripsi dan tindak lanjut
$91 \leq CK \leq 100$	Sangat Baik, berarti Anda benar-benar memahami pengertian vektor. Selanjutnya kembangkan pengetahuan dan tuangkan dalam pembelajaran.
$76 \leq CK < 91$	Baik, berarti Anda cukup memahami pengertian vektor walaupun ada beberapa bagian yang perlu dipelajari lagi. Selanjutnya pelajari lagi beberapa bagian yang dirasakan belum begitu dipahami.
$50 \leq CK < 76$	Cukup, berarti Anda belum cukup memahami pengertian vektor. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi bagian yang belum dikuasai dan menambah referensi dari sumber lain.
$CK < 50$	Kurang, berarti Anda belum dapat memahami pengertian vektor. Oleh karena itu Anda perlu mempelajari lagi dari awal dan menambah referensi dari sumber lain.

Kunci Jawaban Evaluasi:

1. A
2. E
3. E
4. B
5. D

EVALUASI

A. Soal:

<u>Petunjuk :</u>

Pilihlah sebuah jawaban yang benar dengan memberi tanda silang (X) pada salah satu huruf A, B, C, atau D.

1. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, maka bentuk paling sederhana dari $(A + C) - (A + B)$ adalah … .

A. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 5 & 5 & 11 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

2. Nilai c dari persamaan matriks $\begin{bmatrix} 5 & a & 3 \\ b & 2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2a & 2 & ab \end{bmatrix}$ adalah … .

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

3. Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$, dan B^t adalah transpose matriks B, maka $A + 2B^t = $ … .

A. $\begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 0 & 15 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 16 & -5 \end{bmatrix}$

4. Jika matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, dan matriks $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, maka $A \times B$ adalah ...

A. $\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 11 & 0 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$

5. Diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$, P^t merupakan transpose dari P. Operasi yang dapat dilakukan pada P dan Q adalah ... .

A. $P + Q$ dan PQ

B. P^tQ dan QP

C. PQ dan QP

D. PQ dan QP^t

6. Jika $\begin{bmatrix} x-5 & 4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & y-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -16 & 5 \end{bmatrix}$ maka ... .

A. $y = \frac{x}{3}$

B. $y = \frac{x}{2}$

C. $y = 3x$

D. $y = 2x$

7. Jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, maka $(A + B)^2$ sama dengan ... .

A. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 36 & 16 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}$

8. Determinan dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ adalah ... .

   A. -13

   B. -1

   C. 1

   D. 13

9. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2x & 3 \\ 3 & x \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} x & -1 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$. Jika $|A| = |B|$ maka nilai x sama dengan ... .

   A. -2 atau -3

   B. 2 atau 3

   C. -1 atau 6

   D. -6 atau 1

10. Determinan dari matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ adalah ... .

   A. -2

   B. -1

   C. 1

   D. 2

11. Diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & x & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, Jika determinan $P = 6$ maka nilai x adalah ...

   A. 2

   B. 3

   C. 4

   D. 5

12. Invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ adalah .... .

A. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

13. Invers dari matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ adalah .... .

A. $\begin{bmatrix} 25 & -15 & 12 \\ -15 & 9 & 5 \\ 12 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 25 & -15 & 12 \\ -15 & 9 & -5 \\ 12 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -25 & 15 & -12 \\ 15 & -9 & -5 \\ -12 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -25 & 15 & -12 \\ 15 & -9 & 5 \\ -12 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

14. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, dan matriks C memenuhi $AC = B$, maka determinan C adalah .... .

A. 1

B. 6

C. 9

D. 11

15. P^t adalah transpose dari P. Jika $R = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ dan $P = R^{-1}$, maka determinan $P^t . Q$ adalah ...

A. -196

B. -188

C. 188

D. 196

16. $ABCDEF$ adalah segienam beraturan dengan pusat O. Bila $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{BC}$ masing-masing dinyatakan oleh vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$, maka $\overrightarrow{CD}$ sama dengan ...

A. $\vec{u} + \vec{v}$

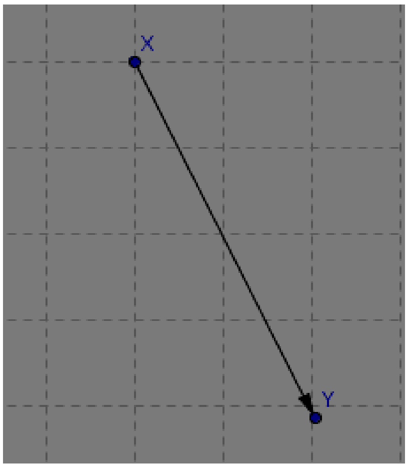
B. $\vec{u} - \vec{v}$

C. $2\vec{v} - \vec{u}$

D. $\vec{u} - 2\vec{v}$

E. $\vec{v} - \vec{u}$

17. Pada gambar di bawah, $\overrightarrow{XY}$ mewakili vektor $\vec{u}$. Komponen dari $-3\vec{u}$ adalah ...



A. $\begin{bmatrix} 18 \\ -6 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} -18 \\ 6 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 6 \\ -12 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -6 \\ 12 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} -6 \\ -12 \end{bmatrix}$

18. Vektor $\overrightarrow{PQ}=(2,0,1)$ dan $\overrightarrow{PR}=(1,1,2)$. Jika $\overrightarrow{PS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$, maka vektor $\overrightarrow{RS}$ = ...

A. $\left(0,-1,-\frac{3}{2}\right)$

B. $\left(-1,0,\frac{3}{2}\right)$

C. $\left(\frac{3}{2},1,0\right)$

D. $\left(\frac{1}{2},0,1\right)$

E. $(1,-1,0)$

19. Apabila titik $P\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2},1\right)$, $Q(1,0,0)$ dan $R(2,5,a)$ terletak pada garis lurus, maka *a*= ...

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. $\frac{5}{2}$

E. 2

20. Diketahui titik $A(-2,5,4)$, $B(2,-1,-2)$ dan $C(p,q,1)$. Jika *A*, *B* dan *C* segaris, maka nilai *p* dan *q* berturut-turut adalah ....

A. 1 dan 2

B. 2 dan 0

C. 0 dan 2

D. 2 dan 1

E. 0 dan 1

21. Diberikan vektor $\vec{a}=4\vec{i}-8\vec{j}+4\vec{k}$ dan $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$. Nilai $\vec{a}\cdot\vec{b}$ =

A. −8

B. −2

C. 4

D. 5

E. 7

22. Jika sudut antara vektor $\vec{a}=\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}$ dan vektor $\vec{b}=\begin{bmatrix}-1\\3\\-2\end{bmatrix}$ adalah α, besarnya α adalah ...

A. 45° C. 90° E. 150°

B. 60° D. 120°

23. Diketahui $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - x\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + x\vec{k}$ dan $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. Jika $\vec{a}$ tegak lurus $\vec{c}$, maka $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{c}\right)$ adalah ...

A. 4 C. 0 E. 4

B. -2 D. 2

24. Diketahui vektor $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + m\vec{k}$ dan $\vec{b} = 2\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k}$. Jika $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, nilai m adalah ....

A. 18 C. 6 E. −16

B. 9 D. 3

25. Vektor yang merupakan proyeksi vektor $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ pada vektor $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah...

A. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ B. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ C. $\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ D. $\frac{1}{3}\sqrt{30}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ E. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

B. Kunci Jawaban Soal Evaluasi.

1. B
2. D
3. B
4. C

5. D
6. A
7. D
8. D
9. C
10. B
11. C
12. C
13. A
14. D
15. D

PENUTUP

Modul Matriks dan Vektor ini disusun sebagai salah satu bahan belajar bagi guru dan tenaga kependidikan peserta Guru Pembelajar. Modul ini dapat dimanfaatkan semua pihak terkait Guru Pembelajar untuk meningkatkan kualitas kompetensi para guru dan tenaga kependidikan. Penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu baik langsung maupun tidak langsung dalam penyusunan modul ini. Kritik dan saran untuk perbaikan modul ini sangat diharapkan agar modul dapat terus ditingkatkan manfaatnya bagi guru dan tenaga kependidikan.

DAFTAR PUSTAKA

Marfuah, 2012, *Vektor*: *Bahan Ajar Diklat Pasca UKA*, Yogyakarta: PPPPTK Matematika

Markaban dan Sapon Suryopurnomo, 2015, *Aljabar, Matriks, dan Vektor*: *Modul Diklat Pasca UKG*, Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

Sartono Wirodikromo, 2006, *Matematika untuk SMA Kelas XII Semester 1*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Spiegel, Murray R, 1984, *Theory and Problem of Vektor Analysis* (*Schaum Series*), New York: McGrawHill, Inc.

Sunardi, Slamet Waluyo, Sutrisno, dan Subagya, 2005, *Matematika IPA*, Jakarta: Penerbit Bumi Aksara.

Wilson Simangunsong, 2005, *Matematika Dasar*, Jakarta: Penerbit Erlangga.

TUT WURI HANDAYANI